## Μάθημα 7ο: Χώροι Banach: Τύποι:

- $X$: αυτοπαθής <=> $\hat{X} = X^{**}$ δηλαδή: $\Lambda: X \longrightarrow X^{**}$ είναι επί
- $X^*$: αυτοπαθής <=> [redacted] $\Lambda: X^* \longrightarrow X^{***}$ είναι επί
- Αν ο $X$ είναι αυτοπαθής τότε και ο $X^*$ είναι αυτοπαθής και ο $X^{**}$ είναι αυτοπαθής
- Παρατήρηση 1η: Έστω $X$ Banach και $A \subseteq X$ φραγμένο.

Τότε $A$ είναι ασθενώς συμπαγές <=> $\overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\hat{A}}^{w*}$.

(=>): Αρχικά αν το $A$ είναι ασθενώς συμπαγές τότε [redacted] $\overline{A}^{w}$ είναι ασθενώς συμπαγές και αφού η $\Lambda: (X, \tau_w) \longrightarrow (\hat{X}, \tau_{w*})$ είναι συνεχής έπεται ότι και το $\overline{\hat{A}}^{w}$ είναι ασθενώς * συμπαγές και άρα:

$$\overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\overline{\hat{A}}^{w}}^{w*} \supseteq \overline{\hat{A}}^{w*} \Longrightarrow \overline{\hat{A}}^{w*} = \overline{\hat{A}}^{w}$$

$$\overline{\hat{A}}^{w} = \hat{X} \cap \overline{\hat{A}}^{w*} \subseteq \overline{\hat{A}}^{w*}$$

(<=): Αντίστροφα έχουμε ότι από θεώρημα Alaoglu έπεται ότι [redacted] $A$: φραγμένο

=> $A$ ασθενώς συμπαγές. γιατί ~~έχουμε ότι: αφού~~ το $A$ είναι φραγμένο (norm)

- **Παρατήρηση 2:** $A$ τω-συμπαγές $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ τω*-συμπαγές

- **Παρατήρηση 3:** Ο $X$ είναι αυτοπαθής $\Leftrightarrow$ $B_X$ είναι τω-συμπαγής γιατί:
  $X$: αυτοπαθής $\Leftrightarrow \hat{X} = X^{**} \Leftrightarrow \overline{\hat{B_X}}^{w^*} \underset{\text{Mazur}}{=} \hat{B_X} = B_{X^{**}} \underset{\text{Goldstein}}{=} \hat{B_X} \Leftrightarrow B_X$ τω συμπαγής από παρατήρηση 1

- **Ορισμός:** Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.

**(α).** Τότε ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται αριθμήσιμα συμπαγής αν κάθε αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμα του $X$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

**(β).** Έστω $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ και $x \in X$. Τότε το $x$ λέγεται σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n\geq 1}$ αν: $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$: $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ είναι άπειρο.

**(γ).** Έστω $A \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε το $x$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A$ αν $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$: $U \cap A =$ άπειρο.

- **Πρόταση:** Κάθε συμπαγής τοπολογικός χώρος είναι αριθμήσιμα συμπαγής τοπολογικός χώρος.

- **Πρόταση:** Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

**(α).** Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι αριθμήσιμα συμπαγής τοπολογικός χώρος

**(β).** Αν $(F_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $X$ με $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, τότε: $\forall J \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο: $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$.

**(γ).** Αν $A \subseteq X$ είναι άπειρο τότε έχει σημείο συσσώρευσης

**(δ).** Κάθε ακολουθία του $X$ έχει σημείο συσσώρευσης

- **Πρόταση:** Έχουμε ότι αν $(X, \mathcal{T})$ είναι αριθμήσιμα συμπαγής τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ και $x \in X$, τότε εάν η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης το $x \in X$ τότε $x_n \to x$

- **Θεώρημα:** (Eberlein-Smulian):

- Έστω $X$ χώρος Banach και $A \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- **(α).** Το $A$ είναι ασθενώς συμπαγές
- **(β).** Το $A$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές
- **(γ).** Το $A$ είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγές

▷ Λήμμα:

Έστω $X$ Banach και $A \subseteq X$ σχετικά αριθμήσιμο [redacted] $\tau_w$-συμπαγές, και $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$. Αν η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει μοναδικό $\tau_w$-σσ κάποιο $x \in X$, τότε: $x_n \xrightarrow{w} x$. (η προηγούμενη πρόταση)

---

- Απόδειξη:

γ) $\Longrightarrow$ β). Έστω αρχικά $\{x_n : n\geq 1\} \subseteq A$. Τότε εάν η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία τότε έχει $w$-συγκλίνουσα. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_k = \{x_n : n \geq k\}$ και τότε: $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{F_k}^{\|\cdot\|} = \emptyset$. Τώρα αφού το $\overline{A}^{w}$ είναι αριθμήσιμα συμπαγές (ως προς την $\tau_w$), έχουμε ότι υπάρχει $x \in \overline{A}^{w}$ $\tau_w$-σ.σ της $(x_n)_{n\geq 1}$. Άρα:

---

- Απόδειξη:

(α) $\Longrightarrow$ (β).: Αρχικά γνωρίζουμε ότι αν το $A$ είναι ασθενώς συμπαγές τότε είναι άμεσο ότι θα είναι και ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές: δηλαδή: για κάθε $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ όπου: $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in A$. Έστω $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ και τότε έχουμε από πρόταση ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει $\tau_w$-σημείο συσσώρευσης

---

- Απόδειξη: (α) $\Longrightarrow$ (γ). Αρχικά αν το $A \subseteq X$ είναι ασθενώς συμπαγές τότε είναι και αριθμήσιμα ασθενώς συμπαγές.

(β) $\longrightarrow$ (γ). Αν τώρα το $A \subseteq X$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές, τότε είναι και αριθμήσιμα ασθενώς συμπαγές γιατί: αν πάρουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ τότε αφού το $A$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ με $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in$ [redacted] $A$. Τότε το $x \in A$ είναι $\tau_w$-σ.σ της $(x_n)_{n\geq 1}$ και αν το αποδείξουμε αυτό τότε κάθε ακολουθία στο $A$ θα έχει σημείο συσσώρευσης και άρα από πρόταση το $A$ είναι αριθμήσιμα ασθενώς [redacted] συμπαγές.

Τώρα: έστω $U \in \tau_w$ και $x \in U$ και τότε αφού: $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$ έπεται ότι: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $x_{k_n} \in U$ και άρα: $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ είναι άπειρο και άρα το $x$ είναι $\tau_w$-σ.σ της $(x_n)_{n\geq 1}$. ($\{n \in \mathbb{N} : x_{k_n} \in U\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$)

(γ) $\Rightarrow$ (β).

Έστω ότι το A είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγές και έστω $(x_n)_{n\geq 1}\in A^{\mathbb{N}}$. Τότε αφού: $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$ έπεται ότι αν αποδείξουμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία τότε θα έχει και w-συγκλίνουσα υπακολουθία. Υποθέτουμε [redacted] ότι δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία. Θέτουμε: $F_k=\{x_n : n\geq k\}$, $\forall k\in\mathbb{N}$ και έχουμε ότι αφού το A είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγές έπεται ότι και το $\overline{A}^w$ είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγές. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}^{\|\cdot\|}=\emptyset$. αφού: $\bigcap F_k=\emptyset$ Τώρα αφού το $\overline{A}^w$ είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγές και $\{x_n : n\geq 1\}\subseteq A\subseteq \overline{A}^w$ έπεται από πρόταση ότι: $\exists x\in\overline{A}^w$ $\tau_w$-σ.σ της $(x_n)_{n\geq 1}$ και άρα τώρα έχουμε ότι: $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}^w$ γιατί: $\forall k\in\mathbb{N}$: $x\in\overline{F_k}^w$ : πράγματι: $x\in\overline{F_k}^w \iff \forall \mathcal{U}\in\tau_w : x\in\mathcal{U}$ : $F_k\cap\mathcal{U}\neq\emptyset$ και πράγματι αν $\mathcal{U}\in\tau_w$ και $x\in\mathcal{U}$ τότε αφού το x είναι $\tau_w$-σ.σ της $(x_n)_{n\geq 1}$ έπεται ότι: $\{n\in\mathbb{N} : x_n\in\mathcal{U}\}$ είναι άπειρο

Τώρα αφού: $\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}^{\|\cdot\|}=\emptyset$ και $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{F_k}^w$ έπεται ότι υπάρχει $k\in\mathbb{N}$: $x\in\overline{F_k}^w$ και $x\notin\overline{F_k}^{\|\cdot\|}$ και τότε: $0\in\overline{F_k-x}^w$ και $0\notin\overline{F_k-x}^{\|\cdot\|}$ και άρα έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\geq 1}\in F_k^{\mathbb{N}}=(\{x_n : n\geq k\}-x)^{\mathbb{N}}$ και άρα υπακολουθία της $(x_n)_{n\geq 1}$, έστω $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: $(x_{k_n}-x)_{n\geq 1}$ να είναι Schauder βασική. Τώρα: $\forall z$ $\tau_w$-σ.σ της $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ [redacted] το $z-w$ είναι $\tau_w$-σ.σ της $(x_{k_n}-x)_{n\geq 1}$ και αφού αυτή είναι Schauder βασική από λήμμα προηγούμενου μαθήματος $z-$[redacted]$x=0 \Rightarrow z=x$ και άρα το μοναδικό $\tau_w$-σ.σ της $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ είναι το x και αφού ο $(\overline{A}^w,\tau_w)$ είναι ασθενώς αριθμήσιμα συμπαγής, έπεται από πρόταση ότι: $x_{k_n}\xrightarrow{w} x$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(γ)$\Longrightarrow$(α). Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\hat{A}}^{w^*}$ από αρχική παρατήρηση.

Προς άτοπον υποθέτουμε ότι: $\exists\, x^{**} \in \overline{\hat{A}}^{w^*} \setminus \overline{\hat{A}}^{w}$ (γιατί: $\hat{X} \cap \overline{\hat{A}}^{w^*} = \overline{\hat{A}}^{w} \subseteq \overline{\hat{A}}^{w^*}$)

και τότε έχουμε ότι επιλέγουμε $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε: $x^{**}(x^*) > 1$ και

θέτουμε $A_0 = A \cap x^{*-1}((1,+\infty)) = \{x \in A : x^*(x) > 1\} \subseteq A$

Άσκηση: $x^{**} \in \overline{\hat{A}_0}^{w^*}$, $A_0 \neq \emptyset$, $0 \notin \overline{A_0}^{w}$

- Υπόδειξη: Θεωρείστε $U_1 = x^{*-1}((1,+\infty))$ και τότε: $A_0 = A \cap U_1$ και άρα: $\hat{A}_0 = \hat{A} \cap \hat{U}_1$

με ~~$\hat{V}_1 = \{\hat{x} \in \hat{X} : \hat{x}(x)$~~ $\hat{U}_1 = \{\hat{x} \in \hat{X} : x \in X : x^*(x) > 1\} = \{z^{**} \in X^{**} : z^{**}(x^*) > 1\}$

$\cap\, \hat{X} = U_2 \cap \hat{X}$ και αφού τώρα: $\hat{A} \subseteq \hat{X}$, $\hat{A}_0 = \hat{A} \cap \hat{U}_1 = \hat{A} \cap U_2$ με: $x^{**} \in U_2$.

Τότε: $x^{**} \in \overline{\hat{A}_0}^{w^*} \setminus \overline{\hat{A}_0}^{w} \Rightarrow \overline{\hat{A}_0}^{w}$ όχι ασθενώς συμπαγές. Από Kadet-Pelchinski:

υπάρχει $(x_n)_{n\geq 1} \in A_0^{\mathbb{N}}$ Schauder βασική. Αυτό σημαίνει ότι: $A_0 \subseteq A$ με $A$ αριθμήσιμα

ασθενώς συμπαγές $\Rightarrow A_0$: αριθμήσιμα ασθενώς συμπαγές και συνεπώς η $(x_n)_{n\geq 1}$ από

πρόταση έχει σημείο συσσώρευσης (τw - σ.σ) που λόγω Schauder βασικότητας (λήμμα

προηγούμενου μαθήματος) είναι το 0 και άρα $0 \in \overline{A_0}^{w}$, άτοπο.