1

Άλγεβρα ΙΙ. Μάθημα 21.

Βάσεις του $\mathbb{C}$-δ.χ. $Z(\mathbb{C}G)$:

- $e_1, \dots, e_r$ κεντρικά ταυτοδύναμα στοιχεία (διάσπαση W.-A.).
- $\{C[g]\}_{[g] \in \mathcal{C}(G)}$ $\left(C[g] = \sum_{x \in [g]} x \in \mathbb{C}G \right)$

1. $r = \# \mathcal{C}(G)$.

2. • $e_i = \dfrac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \cdot g$

$$= \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \chi(g^{-1}) C[g].$$

• $C[g] = \gamma_g \sum_{i=1}^{r} \dfrac{\chi_i(g)}{n_i} \cdot e_i$

Παράδειγμα: $G = S_3$

$$\mathbb{C}S_3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}).$$

τετρ. πρόσημο.

ισ. $\mathbb{C}$-αλγεβρών.

$$\mathbb{C}S_3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$$

② $\mathbb{1} \mapsto (1, 1, I_2)$ (Θεωρ. $D_3 \simeq S_3$)

$(12) \mapsto \left(1, -1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

$(13) \mapsto$ $(23) \mapsto$

$(123) \mapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right), \ \theta = \frac{2\pi}{3}$ (i)

$(132) \mapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\right)$,, (ii)

Θεωρώντας την S_3 της $\mathbb{C}^3$ και την αντίστοιχη 2-διαστ. αναπ.:

(i) $\longmapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$

(ii) $\longmapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

$e_1 = \left(1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \ e_2 = (0, 1, \mathbb{O})$

$e_3 = (0, 0, I_2)$.

	$\mathbb{1}$	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ	2	0	-1

$$e_1 = \frac{1}{6}\left(\mathbb{1} + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{6}\left(\mathbb{1} - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)\right)$$

$$e_3 = \frac{2}{6}\left(2\mathbb{1} - (123) - (132)\right).$$

Πόρισμα: (σχέσεις ορθογωνιότητας)

(i) για κάθε $i, j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = \begin{cases} |G|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(ii) $\forall\, g, w \in G$ είναι: τάξη κεντροποιούσας.

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g) \chi_i(w^{-1}) = \begin{cases} |C_G|, & g \sim w \\ 0, & \text{αν } g \nsim w \end{cases}$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\, g.$$

Εφαρμόζω τον χ_j:

$$\chi_j(e_i) = \sum_{g\in G} \frac{n_i}{|G|}\chi_i(g^{-1})\chi_j(g)$$

$$\| $$

$n_i\delta_{ij}$ (στα στοιχεία του απλού $M_{n_j}(\mathbb{C})$ το e_i δρα ως 0. αν $i\neq j$)

Εναλλακτικά

$$e_i = \frac{n_i}{|G|}\sum_{[g]} \chi_i(g^{-1})C_{[g]}.$$

$$= \frac{n_i}{|G|}\sum_{[g]} \chi_i(g^{-1})\gamma_g \sum_{j=1}^{r}\frac{\chi_j(g)e_j}{n_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{[g]} \frac{n_i}{|G|}\frac{\gamma_g}{n_j}\chi_i(g^{-1})\chi_j(g)\right)e_j$$

$$\Rightarrow \sum_{[g]}\frac{n_i}{n_j}\gamma_g\,\chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = |G|\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{g\in G}\frac{n_i}{n_j}\chi_i(g^{-1})\chi_j(g) = |G|\delta_{ij}$$

(ii) Γνωρίζουμε ότι

$$C[g] = \gamma_g\sum_{i=1}^{r}\frac{\chi_i(g)e_i}{n_i}$$

$$= \gamma_g \sum_{i=1} \frac{\chi_i(g)}{m_i} \sum_{[n] \in \mathcal{C}(G)} \frac{m_i \chi_i(n^{-1})}{|G|} C_{[n]}.$$

$$= \sum_{[n]} \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\gamma_g}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(n^{-1}) \right) C_{[n]}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g)\chi_i(n^{-1}) = \frac{|G|}{\gamma_g} \delta_{[g],[n]}.$$

$$= \begin{cases} \frac{|G|}{\gamma_g} = |C_G|, & g \sim n \\ 0, & g \nsim n. \end{cases}$$

Ορσ: $Cl(G) = \{ \varphi : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathbb{C} \}$. → class functions

$= \{ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi$ σταθ. στις κλάσεις συζυγίας$\}$.

Για $\varphi, \psi \in Cl(G)$ ορίζω

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g) \in \mathbb{C}.$$

Πόρισμα: $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ για

κάθε $i, j = 1, \dots, r$

Πόρισμα: Τα $\chi_1, \dots, \chi_r \in Cl(G)$ ορίζουν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}$-δχ $Cl(G)$.

αποδειξη:

$$\lambda_1 \chi_1 + \dots + \lambda_r \chi_r = 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \left\langle \sum \lambda_i \chi_i, \chi_1 \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\sum \lambda_i \langle \chi_i, \chi_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Ανάλογα $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Επίσης $\dim_{\mathbb{C}} [Cl(G)] = \# \mathcal{C}(G) = r$.

$\square$

Πόρισμα Έστω V ένα $\mathbb{C}G$-πρ. $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$

το V είναι απλό $\Leftrightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Απόδειξη : ($\Rightarrow$) (7)

αν $V \cong V_i$, για κάποιο i $\Rightarrow$

$\chi_V = \chi_{V_i} \Rightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

($\Leftarrow$) Γράφω, $V = V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{a_r}$

για κάποια $a_1, \ldots, a_r$, άρα έχουμε $\chi_V = \sum a_i \chi_i$ καθώς $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1 = a_1^2 + \cdots + a_r^2 \Rightarrow$

υπάρχει $a_i = 1$ και $a_j = 0$, $\forall j \neq i$

$\Rightarrow V = V_i$ $\square$

Εφαρμογή: Θεωρώ την S_5 να δρα στα $e_1, \ldots, e_5$ του $\mathbb{C}^5 = \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{C} e_i$

και τον αναλλοίωτο υπόχωρο.

$U = \langle (1,1,1,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{C}^5$

Τότε το $\mathbb{C}S_5$-πρ. $V = \dfrac{\mathbb{C}^5}{U}$

είναι απλό.

Γράφω ως: $V = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C}\bar{e}_i = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{C}\bar{e}_i$

$\left(\bar{e}_5 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 - \bar{e}_4\right)$

Υπολογίζω τον χαρακτήρα του V

	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
χ_V	4	2	1	0	−1	0	−1
$(\chi_V)^2$	16	4	1	0	1	0	1

$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(1234) \longmapsto \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(12345) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Υπολογίζω: $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{120} \sum_{\sigma \in S_5} \chi_V(\sigma^{-1}) \chi_V(\sigma)$

$= \frac{1}{120} \sum_{\sigma \in S_5} (\chi_V(\sigma))^2 \overset{?}{=} 1.$