Άλγεβρα ΙΙ

$|G| < \infty \Rightarrow \mathbb{C}G \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$.

$\underbrace{V_1 = \mathbb{C}^{n_1}}$, ..., $V_r = \mathbb{C}^{n_r}$.

δρα με την
φυσιολογική
η 2η συνιστώσα.
$M_{n_2}(\mathbb{C})$
και οι άλλες ως 0.

Πρόταση: $r = \# \mathcal{C}(G)$.

απόδειξη: $(*) \Rightarrow$

$Z(\mathbb{C}G) = Z\left[\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})\right] = \prod_{i=1}^{r} Z\left[M_{n_i}(\mathbb{C})\right]$

$= \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i} \rightarrow \dim\left[Z(\mathbb{C}G)\right] = \dim_{\mathbb{C}} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i}$
$= r$.

Θ.δ.ο. $\dim_{\mathbb{C}}\left[Z(\mathbb{C}G)\right] = \# \mathcal{C}(G)$.

Έστω $a = \sum_g a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$. Τότε ②

$a \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow x \cdot a = a \cdot x, \ \forall x \in G$.

$\Leftrightarrow x^{-1} a x = a, \ \forall x \in G$.

Είναι $x^{-1} a x = \sum_{g \in G} a_g (x^{-1} a x)$ και άρα $\in \mathbb{C}$.

$x^{-1} a x = a \Leftrightarrow a_g = a_{x^{-1} g x}$

$\forall g \in G$.

Συνεπώς, $a \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow$

$$\sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \left(\sum_{x \in [x]} a_x \cdot x \right) = \sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} a_g \left(\sum_{x \in [g]} x \right)$$

Άρα μια βάση του κέντρου αποτε-λούν τα στοιχεία $\sum_{x \in [g]} x$ για $[g] \in \mathcal{C}(G)$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} [Z(\mathbb{C}G)] = \# \mathcal{C}(G)$.

Εναλλακτική Απόδειξη:

Παρατήρηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ίχνος $tr: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ επάγει ένα ισομορφισμό δ.χ. ($\mathbb{C}$ - δ.χ.) ③

$$\frac{M_n(\mathbb{C})}{[M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})]} \cong \mathbb{C}.$$

δηλαδή $[M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})] = \ker(tr)$.

<u>απόδειξη</u>: καθώς $tr(AB) = tr(BA)$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow [M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})] \subseteq \ker(tr)$.

Αντίστροφα, είναι προφανές ότι

$\ker tr = \langle E_{11} - E_{22}, E_{11} - E_{33}, \ldots$

$E_{11} - E_{nn}, E_{ij}, i \neq j \rangle$. Όμως

$E_{11} - E_{22} = E_{12}E_{21} - E_{21}E_{12} \in [\,'' , ''\,]$.

Ομοίως, $E_{11} - E_{jj} \in [M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})]$

- Για $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - \underbrace{E_{ij}E_{ii}}_{0} \in [\,'' , ''\,]$.

$\Rightarrow \ker(tr) \subseteq [M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})]$.

α.

(4)

- $$\mathbb{C}G = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

$$[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] = \prod_{i=1}^{r} [M_{n_i}(\mathbb{C}), M_{n_i}(\mathbb{C})].$$

$$\frac{\mathbb{C}G}{[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]} = \frac{\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})}{\prod_{i=1}^{r} [M_{n_i}(\mathbb{C}), M_{n_i}(\mathbb{C})]}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}) \Big/ \left([M_{n_i}(\mathbb{C}), M_{n_i}(\mathbb{C})]\right)$$

$$\cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C}. \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}G}{[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]} = r.$$

<u>Πόρισμα</u>: Οι "πίνακες" των χαρακτήρων μιας πεπερ. αβέλιανής (?) ομάδας G είναι πάντα τετραγωνικοί.

<u>Στόχος</u>: Οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι. (Σχέσεις ορθογωνιότητας των χαρακτήρων).

Ορσ: Μια ομάδα G δρα στο σύνολο X αν υπάρχει μια $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g\cdot x$ έτσι ώστε $e\cdot x = x$, $\forall x \in X$

$g_1(g_2\cdot x) = (g_1\cdot g_2)x$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in X$.

[Εναλλακτικά, υπάρχει ομομορφ. ομάδων $G \to \mathrm{Sym}(X)$.]

Παραδείγματα: (α) S_n δρα στο $\{1,\dots,n\}$ με το φυσιολογικό τρόπο ($\sigma\cdot i = \sigma(i)$, $\forall \sigma \in S_n$, $\forall i$).

(β) Μια ομάδα G δρα στο σύνολο G με αριστερούς πολ/μούς.

Παρατήρηση: Αν G δρα στο X, τότε ο $\mathbb{C}$-δ.χ. $V = \bigoplus_{x\in X} \mathbb{C}e_x$ λαμβάνει τη δομή ενός $\mathbb{C}G$-πρ. όπου $g\cdot e_x := e_{g\cdot x}$ $\forall g, \forall x$

Παραδείγματα.

(α) Ο δ.χ. $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} e_i$ είναι ένα $\mathbb{C}S_n$ πρότ. με την φυσιολογική δράση. $[\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}]$.

(β) Ο δ.χ. $\mathbb{C}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} \cdot g$ είναι ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο μέσω των αριστερών πολ/σμών $[g \cdot x = gx]$.

"αριστερή κανονική αναπαράσταση της $\mathbb{C}G$".

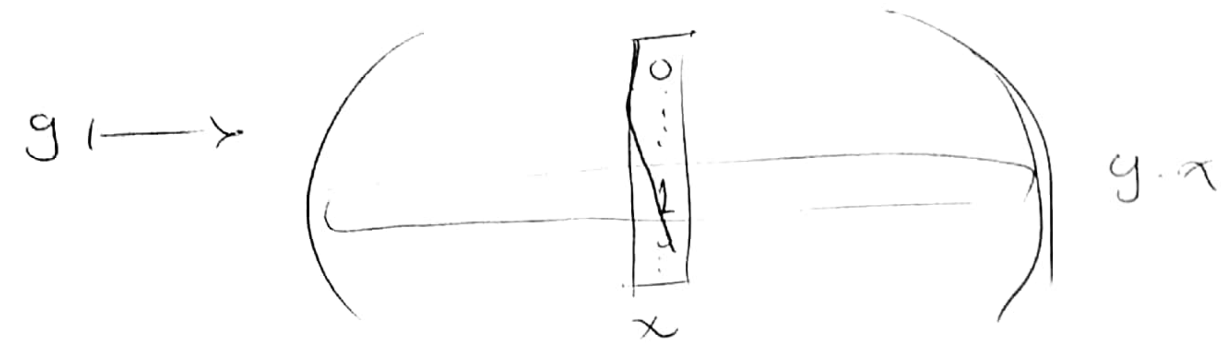
Πρόταση: $G \curvearrowright X$ πεπερ.

Θεωρώ το επαγόμενο $\mathbb{C}G$-πρ. $V = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$. Για τον χαρακτήρα $\chi_V : G \to \mathbb{C}$, $\chi_V(g) = \# \mathrm{Fix}(g)$.

$(\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.)$

απόδειξη: Αναπαριστώ τον πίνακα της γραμμικής $g : V \to V$

ως προς την βάση $(e_x)_{x \in X}$ (P)



$\Rightarrow tr[e(g)] = \#$ 1 στη διαγώνιο

$= \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}$. $\rightarrow |G| < \infty$

<u>Πόρισμα</u>: Για την αριστερή κανονική αναπαράσταση της $\mathbb{C}G$ στον δ.χ $\mathbb{C}G$ ισχύει $\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$

<u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{C}G = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$.

$Z(\mathbb{C}G) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i}$. Μια βάση του

$\mathbb{C}$-δ.χ $Z(\mathbb{C}G)$: τα στοιχεία

$C[g] = \sum_{x \in [g]} x$, για $[g] \in \mathcal{C}(G)$.

βάση του $\mathbb{C}$-δχ. $\prod_{i=1} \mathbb{C} \cdot I_{n_i}$ (8)

είναι $e_1, \dots, e_r$ με $e_i = (0, \dots, \underset{i\text{-θέση}}{I_{n_i}}, \dots, 0)$

Πρόταση: Ισχύουν τα εξής:

(α) $e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \cdot g$

(χ_i είναι ο χαρακτήρας του i-οστού απλού $\mathbb{C}G$-προτύπου $V_i = \mathbb{C}^{n_i}$)

$$= \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \chi_i(g^{-1}) \underbrace{\left(\sum_{x \in [g]} x\right)}_{C[g]}.$$

(β) $C[g] = \gamma_g \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(g)}{n_i} \cdot e_i \quad \forall [g] \in \mathcal{C}(G)$

όπου $\gamma_g = \# [g]$.

Απόδειξη. (α). Γράφω

$e_i = \sum_{g \in G} \lambda_{i,g} \cdot g$, για κατάλληλα $\lambda_{i,g} \in \mathbb{C}$.

και άρα για $x \in G$ είναι (9)

$$e_i x^{-1} = \sum_{g \in G} \lambda_{i,g}\, g \cdot x^{-1}.$$

Θεωρώ την αριστερή κανονική αναπ.

$$\chi_{reg}(e_i x^{-1}) = \sum_{g \in G} \lambda_{i,g}\, \chi_{reg}(g x^{-1}).$$

$$= \lambda_{i,x} |G|. \qquad \mathbb{C}G = V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$$

ως αρ. $\mathbb{C}G$-πρ.

και άρα

$$\chi_{reg} = n_1 \chi_1 + \cdots + n_r \chi_r = \sum n_j \chi_j$$

Συνεπώς, $\lambda_{i,x} \cdot |G| = \sum_{j=1}^{r} n_j \chi_j (e_i x^{-1})$

$$\left(tr\left[V_j \xrightarrow{e_i x^{-1}} V_j\right] = \chi_j \left(e_i x^{-1}\right)\right)$$

$$= n_i \chi_i(x^{-1}) \Rightarrow \lambda_{i,x} = \frac{n_i}{|G|} \chi_i(x^{-1}).$$

(β). Γράφω:

$$C_{[g]} = \sum_{i=1}^{r} \mu_{[g],i}\, e_i$$ και υπολογίζω.

(10)

$$\chi_j\left(C_{[g]}\right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{[g],i}\, \chi_j(e_i).$$

$$= \mu_{[g],j}\, n_j \quad \left(V_j = \mathbb{C}^{n_j}\right)$$

$$\chi_j\left(\sum_{[g]\ni x} x\right) = \sum_{x\in[g]} \chi_j(x) = \sum_{x\in[g]} \chi_j(g).$$

$$= \gamma_g \cdot \chi_j(g).$$ Τελικά

$$\mu_{[g],j} = \frac{\gamma_g \cdot \chi_j(g)}{n_j}$$