## Άλγεβρα ΙΙ   Μάθημα 16ο

Αν $o(g)=n$, $x\in kG: (1-g)\cdot x=0.$

$\Rightarrow x=(1+g+\dots+g^{n-1})\cdot y$, $y\in kG$

**Συνέχεια απόδειξης ($\Rightarrow$)**

αν $kG$ ημιαπλός $\Rightarrow |G|\cdot 1\in \mathcal{U}(k)$

Έστω $g\in G$. Καθώς

$kG$ ημιαπλός $\Rightarrow kG$ είναι v.N κανονικός

$\Rightarrow \exists\, \alpha\in kG: \ 1-g=(1-g)\cdot\alpha(1-g)$

$\Rightarrow (1-g)[1-\alpha(1-g)]=0.$ Αν $n=o(g)$

$\Rightarrow \exists\, b\in kG: \ 1-\alpha(1-g)=(1+g+g^2+\dots+g^{n-1})b$

$\Rightarrow \varepsilon\big(1-\alpha(1-g)\big)=\varepsilon\big(\quad " \quad\big)$

$\Rightarrow 1=n\cdot\varepsilon(b)\in k \Rightarrow n\cdot 1\in\mathcal{U}(k).$

Γράφοντας $|G|=p\cdot q\cdots r$ για κατάλληλους πρώτους $p,q,\dots,r$, επιλέγοντας στοιχεία τάξεως $p,q,\dots,r \Rightarrow$ $p\cdot 1, q\cdot 1,\dots, r\cdot 1\in\mathcal{U}(k)\Rightarrow |G|\cdot 1\in\mathcal{U}(k).$

**Λήμμα**: Αν $R$ δακτύλιος, $V$ ένα $R$-πρότυπο και $U\leq V$ $R$-υποπρ.

ώστε για κάθε $R$-γραμμική ②

$\varphi: V \to U$ με $\varphi(u) = u, \forall u \in U$.

$\Rightarrow V = \ker\varphi \oplus U$.

<u>απόδειξη</u>: ① αν $v \in \ker\varphi \cap U$

$\Rightarrow \varphi(v) = v = 0$

② Έστω $v \in V$:

$$v = \underbrace{\varphi(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - \varphi(v))}_{\in \ker\varphi} \in U + \ker\varphi$$

□

---

<u>απόδειξη της ($\Leftarrow$)</u>:

Έστω $V$ ένα $kG$-πρότυπο και $U \leq V$ ένα $kG$-υποπρ. που είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της $G$ (δηλ. $gU \subseteq U, \forall g \in G$).

Εφόσον $k$ είναι υπόπλήρες:

$\exists U' \leq V$ $k$-υποπρ: $V = U \oplus U'$

Θεωρώ $\varphi: V \to U$: $\varphi|_U = id_U$ και $U' \subseteq \ker\varphi$.

Θεωρώ την $k$-γραμμική $\Phi: V \to U$ (3)

με $\Phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(g \cdot v) \in U$

$$\left[ \Phi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P(g^{-1}) \circ \varphi \circ P(g) \right]$$

Παρατηρώ ότι:

(α) $v \in U$: $\Phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(\underbrace{\overset{\in U}{\overbrace{g \cdot v}}})$

$= \frac{\sum_{g \in G} g^{-1} \cdot (g \cdot v)}{|G|} = \frac{|G| \cdot v}{|G|} = v.$

(β) η $\Phi$ είναι $kG$-γραμμική.

αν $h \in G$, $v \in V$ έχουμε ότι:

$\Phi(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \varphi(\underbrace{g(h \cdot v)}_{x})$

$= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} h x^{-1} \varphi(x \cdot v)$

$= h \left[ \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x^{-1} \varphi(x \cdot v) \right] = h \cdot \Phi(v).$

Από το Λήμμα: $V = U \oplus \underbrace{\ker \Phi}_{kG\text{-}\pi\rho.}$

**Πόρισμα** (Maschke) Ο $\mathbb{C}G$ ④

είναι ημιαπλός αν $|G|<\infty$.

(για κάθε ομάδα $G$: $\mathrm{rad}(\mathbb{C}G)=0$)

**Ορσ**: ($|G|<\infty$) Έστω $V$ ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο. με $\dim_{\mathbb{C}} V<\infty$.

Ο **χαρακτήρας** $\chi_V$ του $\mathbb{C}G$-πρ. $V$ είναι η απεικόνιση: $\chi_V: \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$

με $\chi_V(a) = \mathrm{Tr}\left(V \xrightarrow{a} V\right)$, $\forall a \in \mathbb{C}G$

(δηλ. $\chi_V(a) = \mathrm{Tr}(\rho(a))$, $\forall a \in \mathbb{C}G$

αν $\rho: \mathbb{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ ).

**Παρατήρηση**: Ο χαρακτήρας

είναι γραμμική απεικόνιση.

(δηλ. μια γραμμική μορφή του $\mathbb{C}$-δχ $\mathbb{C}G$)

Πράγματι, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}G$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

① $\rho(\alpha+\beta) = \rho(\alpha) + \rho(\beta) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

② $\rho(\lambda\alpha) = \lambda\, \rho(\alpha) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$

Συνεπώς,

$$\chi_V(\alpha+\beta) = Tr[\rho(\alpha+\beta)] = Tr[\rho(\alpha)+\rho(\beta)]$$
$$= Tr[\rho(\alpha)] + Tr[\rho(\beta)] = \chi_V(\alpha)+\chi_V(\beta)$$

Ομοίως $\chi_V(\lambda\alpha) = \lambda\cdot\chi_V(\alpha)$.

<u>Ορσ.</u> Έστω $V$ ένα $\mathbb{C}G$-ΠΡ με $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. Ο <u>χαρακτήρας</u> $\chi_V$ είναι η απεικόνιση $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ με $\chi_V(g) = Tr[\rho(g)]$, $\forall g\in G$.

<u>Παρατήρηση</u>. Ο χαρακτήρας $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ είναι ένα ίχνος δηλ. $\chi_V(\alpha\cdot\beta) = \chi_V(\beta\cdot\alpha)$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}G$

(Πράγματι, $\chi_V(\alpha\beta) = Tr[\rho(\alpha\beta)]$
$= Tr[\rho(\alpha)\circ\rho(\beta)] = Tr[\rho(\beta)\circ\rho(\alpha)]$
$= \chi_V(\beta\cdot\alpha)$.)

Ειδικότερα αν $x,y\in G$:
$\chi_V(xy) = \chi_V(yx)$

Αν $g, w \in G$, τα οποία είναι συζυγή, δηλ. $w = x g x^{-1}$, $x \in G$

$\Rightarrow \chi_V(g) = \chi_V(x^{-1} w x) = \chi_V(w x x^{-1})$

$= \chi_V(w)$

<u>Ορσ</u>: Αν $V$ είναι ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο, τότε ο <u>χαρακτήρας</u> $\chi_V$ του $V$ είναι μια απεικόνιση $\chi_V : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ (όπου $\mathcal{C}$ το σύνολο κλάσεων συζυγίας της $G$) με $\chi_V([g]) = Tr[\rho(g)] \in \mathbb{C}$ $\forall [g] \in \mathcal{C}(G)$.

<u>Ορσ.</u> Αν $R$ είναι ένας δακτύλιος ορίζω την υποομάδα $[R, R] \subseteq R$ (ως υποομ. του $(R, +)$) που παράγεται από τα στοιχεία $\alpha\beta - \beta\alpha$, $\alpha, \beta \in R$.

<u>Ασκ</u> $[M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})] =$

$= \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid Tr(A) = 0 \}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η υποομάδα $[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \subseteq \mathbb{C}G$ είναι ένας $\mathbb{C}$-δ.χ. Ο χαρακτήρας $\chi_V : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ μηδενίζεται στον $\mathbb{C}$-δ. υπόχωρο $[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ και άρα επάγει μια μοναδική $\mathbb{C}$-γραμμ.

$$\overline{\chi_V} : \mathbb{C}G/[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \to \mathbb{C} :$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\chi_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}G/[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \arrow[dl, dashed, "\overline{\chi_V}"] \\
\mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Τώρα, η απεικόνιση τυπικό. $G \to \mathcal{C}(G)$ επάγει μια $\mathbb{C}$-γραμμ. $\varphi : \mathbb{C}G \to \bigoplus_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{C}[g]$ η οποία είναι επί και έχει πυρήνα

$$\ker \varphi = [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \ (*).$$

Συνεπώς, υπάρχει ισομορφ. $\mathbb{C}$-δ.χ.

$\bar{\varphi} : \mathbb{C}G / [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \longrightarrow \bigoplus_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{C}[G]$ (8)

Έχουμε μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}G \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, "\chi_\nu"'] & \mathbb{C}G/[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}"] \arrow[d, "\bar{\chi}_\nu"] & \bigoplus_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{C}[g] \arrow[dl, bend left, "\text{"}\chi_\nu\text{"}"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη της $\circledast$ :

Γράφοντας, $\alpha, \sigma \in \mathbb{C}G$ ως.

$\alpha = \sum_g \lambda_g \cdot g \quad , \quad \sigma = \sum_h \mu_h \cdot h$.

$\Rightarrow \alpha\sigma - \sigma\alpha = \sum_{g,h} (\lambda_g \cdot \mu_h) gh - \sum_{g,h} (\mu_h \cdot \lambda_g) hg$

$= \sum_{gh} (\lambda_g \cdot \mu_h)(gh - hg)$

Άρα, ο $[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ παράγεται ως

$\mathbb{C}$-δ.χ. από τα $gh - hg$. καθώς

$\varphi(gh - hg) = 0 \Rightarrow [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \subset \ker\varphi$

Αντίστροφα, $\alpha = \sum_g \lambda_g \cdot g \in \ker\varphi$ (9)

$\Rightarrow \sum_g \lambda_g [g] = 0$. Γράφω:

$$\alpha = \sum_{[g]\in \mathcal{C}(G)} \left( \sum_{x\in[g]} \lambda_x \cdot x \right) \Rightarrow$$

$$\varphi(\alpha) = \sum_{[g]\in \mathcal{C}(G)} \left( \sum_{x\in[g]} \lambda_x [x] \right)$$

$$= \sum_{[g]\in \mathcal{C}(G)} \left( \sum_{x\in[g]} \lambda_x \right) \cdot [g] \Rightarrow$$

$\sum_{x\in[g]} \lambda_x = 0$, $\forall [g] \in \mathcal{C}(G)$, άρα

$\lambda_g = - \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x \in \mathbb{C}$, συνεπώς

$$a = \sum_{[g]\in \mathcal{C}(G)} \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x (x-g)$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $x-g \in [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ $\forall g \in G$, $\forall x\in[g]$. Αν $x = ygy^{-1}$

$\Rightarrow x-g = ygy^{-1} - g = ygy^{-1} - (gy^{-1})\cdot y \in [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$