①

Άλγεβρα ΙΙ — Μάθημα 12

Πρόταση: Τ.α.ε.ι για τον R:

(α) R είναι αριστερά του Artin.

(β) R " " της Noether.

το $rad(R)$ είναι μηδ/ικό. και $R/radR$ είναι ημιαπλός.

απόδειξη: Άνευ.

Πρόταση: Έστω ότι $rad(R)$ είναι μηδενικό/ικό και ο $R/rad(R)$ είναι αριστερά ημιαπλός. Τότε, ο R είναι αριστερά του Artin $\Leftarrow\Rightarrow$ ο R είναι αρ. της Noether

Παρατηρήσεις: (α) Έστω S ημιαπλός δακτ. και M ένα S-πρότ. Τότε M του Artin $\Leftarrow\Rightarrow$ M της Noether

αποδ: Γράφω $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, απλά S-πρότ. M_i. Αν M του Artin, τότε $|I|<\infty$. Διαφορετικά, θα μπορούσα να βρω άπειρη φθίνουσα ακολ. υποπρότ.

$M \supsetneqq \bigoplus_{i \neq i_0} M_i \supsetneqq \bigoplus_{i \neq i_0, i_1} M_i \supsetneqq \cdots$ (2)

(όπου $i_0, i_1, \ldots \in I$ διακεκριμένα).

Τότε M είναι ευθύ άθροισμα πεπερ. πλήθους απλών προτύπων. Συνεπώς M είναι της Noether.

Αντίστροφα, αν M είναι της Noether $\Rightarrow |I| < \infty$. Διαφορετικά:

$0 \subsetneqq M_{i_0} \subsetneqq M_{i_0} \oplus M_{i_1} \subsetneqq \cdots$

($i_1, i_2, \ldots \in I$ διακεκριμένα.)

Τότε M είναι ένα πεπερ. ευθύ άθροισμα απλών προτύπων. Συνεπώς M είναι του Artin.

(2) Έστω S ένας δακτύλιος, $J \subseteq S$ ιδεώδες, M ένας S/J-πρότ. Μπορώ να θεωρήσω το M ως S-πρότ. αφού $JM = 0$. $\Rightarrow$ $(N,+)$ υποομάδα της $(M,+)$ είναι S-υποπρότυπο ⟺ N είναι S/J-υποπρότυπο.

Συνεπώς.

Συνεπώς S-πρότυπο M είναι της ③ Noether (Artin) $\Leftrightarrow$ S^{-1}-πρ. M είναι της Noether (Artin).

(γ) Έστω R δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο, εφοδιασμένο με μια φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} = 0$$

Τότε M είναι του Artin. (Noether) $\Leftrightarrow$ για κάθε M_i/M_{i+1} είναι του Artin. $i=1,\dots,n$.

Απόδ: Αν M του Artin $\Rightarrow$ M_i του Artin, $\forall i$. $\Rightarrow$ M_i/M_{i+1} του Artin $\forall\, i=0,\dots,n$

Αντίστροφα, M_0/M_1, M_1/M_2, ... είναι Noether. $M_n/M_{n+1}=0$.

Θα δείξω ότι M είναι της Noether.

Χρησιμοποιώ επαγωγή στο n.

• $n=0$: Το ζητούμενο είναι προφανές. ($M = M_0$, $M_1 = 0$).

• Επαγωγικό Βήμα: Θεωρώντας το.

$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} = 0$
έπεται ότι M_1 είναι της Noether.

Συνεπώς: $\left.\begin{array}{l} M_1 \text{ Noether} \\ M/M_1 \quad '' \end{array}\right\} \Rightarrow M$ της Noether.

<u>Απόδειξη</u> (Πρότασης)

Θέτω $I = rad(R)$, $I^{n+1} = 0$. Θεωρώ το $\overline{R} = R/I$ είναι ημιαπλός. Θεωρώ το αριστερό R-πρότυπο R και

$R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \cdots \supseteq I^{n+1} = 0$.

Γνωρίζω ότι ${}_R R$ της Noether.

$\Leftrightarrow$ τα R-πρ. $R/I, I/I^2, \ldots, I^n/0$ είναι της Noether.

$\Leftrightarrow$ R/I-πρ. $R/I, I/I^2, \ldots, I^n/I^{n+1}$ είναι της Noether.

$\Leftrightarrow$ R/I-πρ. $R/I, I/I^2, \ldots, I^n/I^{n+1}$ είναι του Artin.

$\Leftrightarrow$ το R-πρότυπο ${}_R R$ είναι του Artin.

$\square$

5

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rad}(R) \subseteq R \text{ αμφίπλευρο} \\ R/\mathrm{Rad}(R) \text{ ημιαπλός} \end{array}\right\} \Rightarrow$

[R αρ. Artin $\Leftarrow$ R αρ. Noether].

<u>Παράδειγμα</u>. Ο δακτύλιος $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R}[x] \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix} \subseteq M_2(\mathbb{R}[x])$. έχει αμφίπλευρο ριζικό $R/\mathrm{rad}(R)$ ημιαπλός, αλλά δεν είναι ούτε δεξιά ούτε αριστερά του Noether (ισοδ. του Artin).

Θεωρώ το ιδεώδες $I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R}[x] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

και παρατηρώ ότι $I^2 = 0 \Rightarrow I \subseteq \mathrm{rad}(R)$

Από την άλλη $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι ημιαπλός. $\Rightarrow R/I$ Jacobson ημιαπλός.

<u>Λήμμα</u>: Αν S δακτύλιος, $J \subseteq S$ ιδεώδ.

και $\mathrm{rad}(S/J) = 0 \Rightarrow \mathrm{rad}(S) \subseteq J$.

<u>απόδ</u>: $\mathrm{rad}(S/J) = 0 \Rightarrow$

$\bigcap \{ m/J \mid m \subseteq S$ μεγιστικό αρ. ιδ, $J \subseteq m \} = 0$.

$\bigcap \{ m \mid m \subseteq S$ μεγ. αρ. ιδ. $J \subseteq m \} / J = 0$.

$\Rightarrow J = \bigcap \{ m : m \subseteq S$ μεγισ., $J \subseteq m \}$.

$\to \operatorname{rad}(\underset{S}{\cancel{R}}) \subseteq \mathcal{J}$.

Από το λήμμα προκύπτει ότι

$I = \operatorname{rad}(R)$. Παρατηρώ ότι για κάθε $\mathbb{R}$-διανυσματικό υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}[x]$

το $\begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αμφίπλευρο ιδ. του R.

Άρα ο R <u>δεν</u> είναι ούτε αριστερά ούτε δεξιά της Noether ή του Artin.

<u>Σχήμα</u>:

R ημιαπλός $\Leftarrow$ R αρ. Artin $+$ $\operatorname{rad}(R)=0$ $\Leftarrow$ R αρ Noeth $+$ $\boxed{?}$

<u>Πρόταση</u>: Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για τον δακτύλιο R: (von Neumann κανονικοί)

(α) $\forall \alpha \in R,\ \exists \beta \in R : \alpha = \alpha\beta\alpha$.

(β) $\forall \alpha \in R,\ \exists\ e^2 = e \in R : R\alpha = Re$.

(γ) Για κάθε πεπερ. παραγ. αρ. ιδ. $I \subseteq R$, υπάρχει $e^2 = e \in R : I = Re$.

Στην περίπτωση αυτή ο R καλεί-
ται <u>von-Neumann</u> κανονικός

<u>απόδειξη:</u> (α) → (β).

Θεωρώ $\alpha \in R$, έστω $\beta \in R$: $\alpha = \alpha\beta\alpha$.

$\Rightarrow \beta\alpha = \beta\alpha\beta\alpha \Rightarrow \beta\alpha = e$ ταυτοδύναμο.

Είναι $e = \beta\alpha \in R\alpha \Rightarrow Re \subseteq R\alpha$.

Όμως $\alpha = \alpha e \Rightarrow \alpha \in Re \Rightarrow R\alpha \subseteq Re$. και επί.

(β) → (α) Θεωρώ $\alpha \in R$ και

$e = e^2 \in R$: $R\alpha = Re \Rightarrow \alpha \in R\alpha = Re$

$e \in Re = R\alpha$.

Συνεπώς, $\exists\, x, y \in R$: $\alpha = xe$, $e = y\alpha$.

$\alpha = xe = xe \cdot e = \alpha y \alpha$.

(β) → (γ). Έστω $e = e^2$ και $f = f^2$.

Είναι $Re + Rf$ ταυτοδύναμα.

$= Re(1-f) + Rf$ αφού

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ e(1-f) = e - ef \in Re + Rf \\ \\ \cdot\ f \in Re + Rf \end{array}\right\} Re(1-f) + Rf \subseteq Re + Rf$

$e = e - ef + ef = e(1-f) + ef \in Re(1-f) + Rf$

$\Rightarrow Re + Rf \subseteq Re(1-f) + Rf$.

Γνωρίζω ότι υπάρχει ταυτοδύναμο

$e' \in R$: $Re(1-f) = Re' \Rightarrow e' \cdot f = 0$.

Είναι: $Re + Rf = Re' + Rf =$

$= R(e' + f - fe')$ μιας και

- $R(e' + f - fe') \subseteq Re' + Rf$.
- $e'(e' + f - fe') = e' \in R(e' + f - fe')$.
- $f(e' + f - fe') = f \in$ ''

$\Rightarrow Re' + Rf \subseteq R(e' + f - fe')$.