① Άλγεβρα ΙΙ   Μάθημα 09.

R δακτύλιος, M R-προτ.

• αν $x \in M$, τότε $Rx = \{rx \mid r \in R\}$ είναι το ελάχιστο υποπρότυπο $\leq M$ του M που περιέχει το x.

"Το Rx καλείται το κυκλικό πρότ. που παράγει το $x \in M$".

• αν $X \subseteq M$. το $\sum_{x \in X} Rx$ είναι το ελάχιστο υποπρότυπο του M που περιέχει το X.

Το $\sum_{x \in X} Rx$ καλείται το υποπροτ. του M που παράγεται από το M.

Το M καλείται πεπερ.

Ορσ: Το M καλείται πεπερ. παραγ. αν υπάρχει πεπερ. υποσύνολο $X \subseteq M$: $M = \sum_{x \in X} Rx$.

Αν $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, τότε κάθε ②

$x\in M$ γράφεται στη μορφή

$x = r_1x_1+\dots+r_nx_n$ $\quad (r_1,\dots,r_n\in R)$

Παράδειγμα: $R = C[0,1]$

Θεωρώ $I \subseteq R$ όπου:

$$I = \{ \varphi\in R \mid \text{υπάρχει } \varepsilon>0 \text{ τ.ω. } \varphi(t)=0,\ \forall t\in[0,\varepsilon]\}$$

Το $I \subseteq R$ ιδεώδες, το οποίο

δεν είναι πεπερ. παραγ.

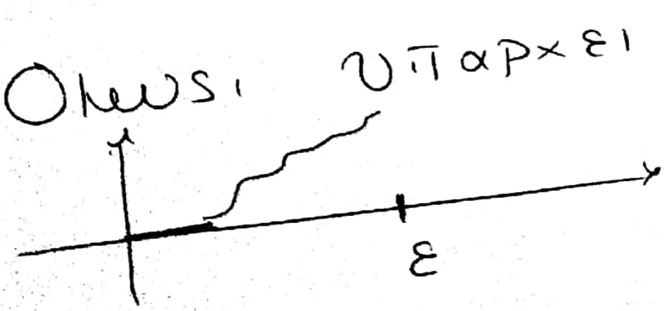
Πράγματι, $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ με $I = \sum_{i=1}^{n} R\varphi_i$

τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. $\varphi_i(t)=0$

$\forall i=1,\dots,n$, $\forall t\in[0,\varepsilon]$.

Ισχύει $\forall g\in \sum_{i=1}^{n} R\varphi_i : g(t)=0$, $t\in[0,\varepsilon]$.

Όμως, υπάρχει $\varphi\in I$ με $\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$



Άρα,

$$\sum_i R\varphi_i \subsetneq I$$

<u>Ορσ</u>: αν M, N R-πρότ. τότε μια απ: $\varphi: M \to N$ καλείται <u>R-γραμμική</u> αν:

1. $\varphi(x+x') = \varphi(x) + \varphi(x')$, $\forall x, x'$
2. $\varphi(rx) = r\varphi(x)$, $\forall r \in R$, $\forall x \in M$.

<u>Παράδειγμα</u>: F σώμα, V ένας F-δχ και $\varphi: V \to V$ γραμμική.

Έστω V_φ το $F[x]$-πρότυπο.

Τότε μια απεικόνιση $f: V \to V$ είναι $F[x]$-γραμμική ανν f είναι F-γραμμική και $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.

$$\{f: V \to V \mid f \ F[x]\text{-γραμμική}\}$$
$$= \{f \in \mathcal{L}(V) \mid f \circ \varphi = \varphi \circ f\}.$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f: M \to N$ μια R γραμμική απεικόνιση.

(i) Αν $M' \le M \Rightarrow f(M') \le N$.

(ii) Αν $N' \le N \Rightarrow f^{-1}(N') \le M$.

*Ειδικότερα $\mathrm{Im} f \le N$, $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \le M$.

($\ker f = 0$ ανν f 1-1)

<u>Αποδ</u>: (α) Γνωρίζω $f(M')$ είναι υποομ. του N. Τώρα

Έστω $y \in f(M')$, $r \in R$. Τότε

μπορώ $y = f(x)$, $x \in M' \Rightarrow$

$r f(x) = f(rx) \in f(M')$, αφού

$rx \in M' \le M$.

(β) Γνωρίζω ότι $f^{-1}(M')$ είναι υποομάδα. Θεωρώ $x \in f^{-1}(N')$

$r \in R \Rightarrow f(rx) = r f(x) \in N' \le N$

$\Rightarrow rx \in f^{-1}(N')$.

(3)

Παρατήρηση: Η γραμμική απ. $f: M \to N$ είναι 1-1, επί αν αν $\exists$ γραμμική $g: N \to M$ με $f \circ g = I_N$, $g \circ f = I_M$.

Πρόταση: (1ο Θεώρημα Ισομορφισμού R-προτύπων)

Κάθε γραμμική απεικόνιση παραγοντοποιείται (κατά μοναδικό τρόπο) ως εξής:

$$M \xrightarrow{\pi} M/\ker f \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Im} f \hookrightarrow N$$

π απεικ. πηλίκο, i ενθετική απ. $\bar f$ ισομορφισμός.

Απόδ: <u>Μοναδικότητα</u>:

αν οι απεικονίσεις $\bar f, \bar{\bar f}: M/\ker f \to \mathrm{Im} f$ είναι τέτοιες ώστε

τ.ω. $i \circ f \circ \pi = i \circ \bar{\bar f} \circ \pi \overset{i\ 1-1}{\Longrightarrow}$

$\bar f \circ \pi = \bar{\bar f} \circ \pi \overset{\pi\ \text{επί}}{\Longrightarrow} \bar f = \bar{\bar f}$

ύπαρξη: $\bar{\varphi}(x+\ker\varphi) = \varphi(x)$. ⑥

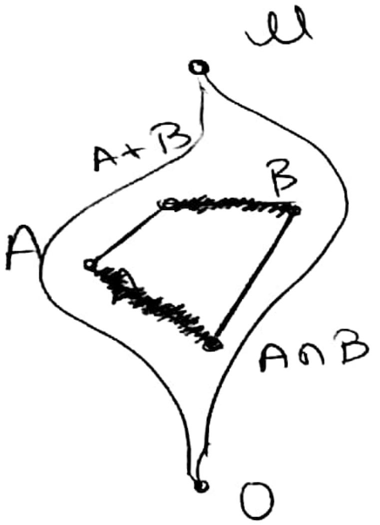
Γνωρίζουμε από τη θ. ομάδων η $\bar{\varphi}$ είναι καλά ορισ., προσθετική, 1-1 και επί.

Προφανώς $i \circ \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi : M \to N$.

Πόρισμα: (2ο θεώρημα ισομορφ. ισομορφ.

Αν $A, B \leq M \Rightarrow \exists$ ισομορφ.

$$A+B/B \cong A/A\cap B.$$



Αποδ: Έστω $\varphi : A \to A+B/B$.

η σύνθεση

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} A+B \xrightarrow[\xi,]{d} \frac{A+B}{B}$$

απ. πηλίκο.

φ:

$x \mapsto x+B$

- φ είναι επί

(3ο Θεώρημα Ισομορφ.) (φ)

Πρόταση: $N \le M$. $\bar{L} \le M/N$

(α) κάθε υποπρότυπο είναι της μορφής $\bar{L} = L/N$ για $L \le M$ $N \subseteq L$. (β) Για κάθε $L \le M$ με $L \supseteq N \Rightarrow L/N \le M/N$ και $M/L \cong \dfrac{M/N}{L/N}$ (3ο θεωρ. ισομορφ.).

~~(β)~~. αποδ: (α)

Έστω $\pi : M \to M/N$ απ. πηλίκο. Γνωρί-

και ορίζω $L = \pi^{-1}(\bar{L})$. $\pi^{-1}(\bar{L}) = L$

ζω ότι $L \le M$ και

$\supseteq \pi^{-1}(0) = N$. Αφού π επί $\Rightarrow$

$\bar{L} = \pi(\pi^{-1}(\bar{L})) = L/N$.

- Έστω $L' \le M$ ένα υποπρ. τ.ω. $\bar{L} = L'/N$. Θ.δ.ο.

Θ.δ.ο. $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (9).

$l \in L \Rightarrow l + N \in L'/N \Rightarrow \exists\, l' \in L'$

: $\exists m \in N$: $l + n = l' + n'$

ώ<

$\Rightarrow l \in \mathcal{L}' + N \subseteq \mathcal{L}'$. Όμοια

$\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$.

(β) Θεωρώ $p : M/N \to M/L$.

με $p(x+N) = x + L$ γραμμ.

επί, $\ker p = \mathcal{L}/N$. από το θεωρ. ισομορφ. ο.

Πρόταση: Τ.α.ε.ι. για ένα

R-πρότυπο M. $N \subseteq M$

(α) Κάθε υποπρότυπο ~~του~~ είναι πεπερ. παραγόμενο.

(β). Για κάθε αύξουσα ακολου-

θία υποπροτύπων. $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_k \subseteq \dots$

υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $N_k = N_{k+1} = \dots$

(γ) Για κάθε μη-κενή συλ-
λογή υποπροτ. $\mathcal{X}$ του M έ-
χει μεγιστικό στοιχείο.
(δηλ. $\exists\, N \in \mathcal{X} : \forall\, N' \in \mathcal{X}$
με $N \subseteq N' \Rightarrow N' = N$).

Το R-προτ. M, στην περίπτωση
αυτή, καλείται Noetherian
(πρότυπο της Noether).