- <u>Ανάλυση 2: Μάθημα 13ο: Δοξός:</u>

- <u>Θεώρημα Bishop-Phelps:</u> Παρουσίαση:

- <u>Ορισμός:</u> Έστω X χώρος Banach και $\emptyset \neq K \subseteq X$. Το K καλείται <u>κώνος</u>

<u>αν:</u> K: κυρτό

$\forall x \in X, \forall \lambda > 0: \lambda x \in K$

$\forall x \in K, -x \in K$

- <u>Ορισμός:</u> Έστω X χώρος Banach, $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, $0 < \delta < 1$.

Ορίζουμε: $K(\delta, f) = \{x \in X : f(x) \geq \delta \|x\|\} \subseteq X$.

▷ <u>Παρατήρηση:</u> 1. $K(\delta, f)$ είναι κώνος

2. $K(\delta, f)$ είναι κλειστό

3. $0 \in K(\delta, f)$

4. $0 \notin Int(K(\delta, f))$

- <u>Ορισμός:</u> Έστω $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ και $0 < \delta < 1$. Ορίζουμε: $y \preceq x \iff y \in x + K(\delta, f)$ $\iff y - x \in K(\delta, f) \iff f(y-x) \geq \delta \|y - x\|$

▷ <u>Λήμμα 2ο:</u> Η $\preceq$ είναι μερική διάταξη:

- <u>Απόδειξη:</u> Είναι προφανώς <u>ανακλαστική</u>: $x \preceq x$ προφανώς

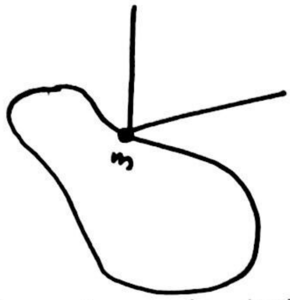
Είναι επίσης <u>μεταβατική</u>: $x \preceq y$ και $y \preceq z \implies$

$$f(x-y) \geq \delta \|x-y\|$$
$$f(y-z) \geq \delta \|y-z\|$$
$$\oplus \quad f(x-z) \geq \delta(\|x-y\| + \|y-z\|)$$
$$\geq \delta \|x - z\| \implies x \preceq z$$

▷ <u>Λήμμα 3ο</u>: Έστω X χώρος Banach, $D \subseteq X$ φραγμένο και κλειστό.

Έστω και $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ και $0 < \delta < 1$. Τότε: $\exists\, m \in D : D \cap (m + K(f,\delta)) = \{m\}$

– <u>Απόδειξη</u>:



- Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $0 < \delta < 1$.
- Εφοδιάζουμε το D με την μερική διάταξη $\preceq$.
- Θα αποδείξουμε ότι αν C είναι αλυσίδα του D τότε η C έχει άνω φράγμα.

– <u>Ισχυρισμός</u>: Για κάθε $x \neq y$ του C έχουμε ότι: $x \preceq y \iff f(x) \geq f(y)$:

. Απόδειξη: Αν $x \neq y$ του C και $x \preceq y$ τότε: $f(x-y) \geq \delta\|x-y\| \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
Αντίστροφα τώρα επειδή το C είναι αλυσίδα έπεται ότι αν: [redacted]
$f(x) \ngeq f(y) \Rightarrow x \not\preceq y$ και άρα έχουμε τον ζητούμενο ισχυρισμό.

– Τώρα η οικογένεια $(f(y), y \in C)$ είναι φραγμένη γιατί το D είναι φραγμένο και $\|f\| = 1$. Επιλέγουμε τώρα $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία του C: $f(x_n) \uparrow \sup f(C)$ και παρατηρούμε ότι: η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι ομοτελικό σημείο της αλυσίδας C δηλαδή:
$\forall y \in C : \exists\, n \in \mathbb{N}$: [redacted] $x_n \preceq y$. ①

– Τώρα γνωρίζουμε ότι $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m$: $f(x_n) \geq f(x_m) \iff \cancel{f(x_n - x_m) \geq 0}$ $x_n \preceq x_m \iff x_n - x_m \in K(f,\delta) \iff f(x_n - x_m) \geq \delta\|x_n - x_m\|$. Επομένως έχουμε ότι η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι Cauchy αφού η $(f(x_n))_{n\geq1}$ είναι Cauchy ως συγκλίνουσα. Αφού όμως ο X είναι χώρος Banach έπεται ότι αυτή τελικά είναι συγκλίνουσα και άρα υπάρχει $x \in D$: $x_n \to x \in D$, γιατί το D είναι κλειστό, και $D \subseteq X$: Banach. Επιπλέον από την παραπάνω σχέση για m: σταθερό και $n \to \infty$: $f(x - x_m) \geq \delta\|x - x_m\|$ από την συνέχεια της f και της νόρμας. Άρα $\forall m$: σταθερό: $x - x_m \in K(f,\delta) \Rightarrow x \preceq x_m$. Τότε όμως $x \preceq y$, $\forall y \in C$ λόγω της ①. Άρα κάθε αλυσίδα του $(D, \preceq)$ έχει κάτω φράγμα. Από λήμμα του Zorn: $\exists\, m \in D$ ελαχιστικό. Τότε: $D \cap (m + K(f,\delta)) \supseteq \{m\}$ γιατί $m \in D$ και $0 \in K(f,\delta)$ από παρατήρηση

Έστω τώρα προς άτοπον ότι υπάρχει $y \in D \cap (m + K(f,\delta))$ με: $y \neq m$. Τότε όμως: $y \in K(f,\delta)$ και $y - m \in K(f,\delta)$ και αφού και $y \in D \Rightarrow y \not\leq m$, άτοπο λόγω ελαχιστικότητας του m.

- **Λήμμα 1ο:** Έστω X χώρος Banach και $g, f \in S_{X^*}$ και $0 < \delta < \frac{1}{2}$ τ.ω: $\forall x \in K(f, \frac{\delta}{2+\delta}): g(x) \geq 0$. Τότε: $\|f - g\| < 2\delta$.

- **Απόδειξη:** Αφού: $\|f\| = 1$ έπεται ότι: $\exists x_0$[redacted]$: f(x_0) > \frac{1+\delta}{2+\delta}$. Έστω τώρα: $y \in \ker f$ με: $\|y\| \leq \frac{1}{\delta}$. Τότε: $\|x_0 \pm y\| \leq \|x_0\| + \|y\| < 1 + \frac{1}{\delta} = \frac{\delta+1}{\delta} = \frac{1+\delta}{2+\delta} \cdot \frac{2+\delta}{\delta} < f(x_0) \cdot \frac{2+\delta}{\delta} \underset{x_0 \pm y \in \ker f}{=} f(x_0 \pm y) \cdot \frac{2+\delta}{\delta} \Rightarrow f(x_0 \pm y) \geq \frac{\delta}{2+\delta} \|x_0 \pm y\| \Rightarrow x_0 \pm y \in K(f, \frac{\delta}{2+\delta})$ $\Rightarrow g(x_0 \pm y) \geq 0$ από υπόθεση $\Rightarrow g(x_0) \geq g(y)$, $g(x_0) \geq -g(y)$ $\Rightarrow |g(y)| \leq |g(x_0)| \leq 1$. Δηλαδή: $\forall y \in \ker f$: $|g(y)| \leq 1$. Τώρα θα εκτιμήσουμε την νόρμα: $\|g|_{\ker f}\|$: Έστω $z \in \ker f$ με $\|z\| \leq 1$ και θέτουμε: $y = \frac{z}{\delta}$ και τότε: $y \in \ker f$ και $\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |g(y)| \leq 1 \Rightarrow |g(x)| \leq 1 \Rightarrow |g(z)| \leq \delta$ και άρα: $\|g|_{\ker f}\| \leq \delta$. Τότε από λήμμα 1ο: $\|f - g\| < 2\delta$ ή $\|f + g\| < 2\delta$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\|f + g\| > 2\delta$. Αφού τώρα: $\|f\| = 1$ και $\delta < 1/2$ $\Rightarrow \exists x_1 \in X$ με: $\|x_1\| = 1$: $f(x_1) > 2\delta$. Επίσης: $\|x_1\| = 1 = \frac{2+\delta}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2+\delta} < \frac{2+\delta}{\delta} \cdot 2\delta < \frac{2+\delta}{\delta} f(x_1) \Rightarrow f(x_1) > \frac{\delta}{2+\delta} \|x_1\| \Rightarrow x_1 \in K(f, \frac{\delta}{2+\delta}) \Rightarrow g(x_1) \geq 0$ και άρα: $\|f + g\| \geq |(f+g)(x_1)| = |f(x_1) + g(x_1)| > 2\delta$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- **Ορισμός:** Έστω X χώρος Banach και $C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Ορίζουμε: $Supp(C) = \{g \in S_{X^*} : \exists c_0 \in C : g(c_0) = \sup\{g(x) : x \in C\}\}$.

- **Παρατήρηση:**

- <u>Θεώρημα Bischop - Phelps:</u>

Έστω X είναι χώρος Banach. Τότε: $\forall\ \emptyset \neq C \subseteq X$ κλειστό, κυρτό, φραγμένο το $supp(C)$ είναι νορμ-πυκνό στην S_{X^*}.

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω $f \in S_{X^*}$ και $\varepsilon > 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\exists g \in supp(C)$ τ.ω: $\|f-g\| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $2\delta < \varepsilon$ και $2\delta < 1/2$. Θεωρούμε τον κώνο: $K(f, \frac{\delta}{2+\delta})$ και από το λήμμα 3ο έπεται ότι υπάρχει $m \in C$: $C \cap (m+K) = \{m\}$. Τότε όμως αφού: $Int(K) \neq \emptyset$ από παρατήρηση έπεται ότι: $C \cap (m + Int(K)) = \emptyset$. Τώρα αφού το C είναι κλειστό και κυρτό και [redacted] $m + Int(K)$ είναι ανοιχτό και κυρτό έπεται από το 1 Διαχωριστικό: $\exists\ g \in X^*$: $\|g\| = 1$ (a)

[Έπρεπε να μπει στην αρχή:

- <u>Λήμμα 1ο:</u> Έστω $f, g \in S_{X^*}$ και $\varepsilon \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $\| g|_{\ker f} \| < \varepsilon$.

Τότε: είτε: $\|f-g\| < 2\varepsilon$ είτε $\|f+g\| < 2\varepsilon$.

▷ <u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varphi: \ker f \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = g(x)$. Από Θεώρημα Hahn-Banach $\exists h: X \to \mathbb{R}$ με: $h|_{\ker f} = \varphi$ [redacted] και $\|h\| \leq \varepsilon$. Ειδικότερα: $\forall x \in \ker f$: $h(x) = g(x)$ $\Leftrightarrow x \in \ker(h-g) \Rightarrow \ker f \subseteq \ker(h-g) \xrightarrow{\text{λήμμα}} g - h = af$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε $|a| = \|af\| = \|g-h\| \leq \|g\| + \|h\| < 1 + \varepsilon$ και $1 - \varepsilon \leq \|g\| - \|h\| \leq \|g-h\| = \|af\|$ $= |a|\,\|f\| = |a|$ και άρα: $\big|1 - |a|\big| < \varepsilon$

<u>Περίπτωση 1η:</u> $a > 0$: $\|g-f\| = \|h + af - f\| = \|h + f(a-1)\| \leq \|h\| + |a-1|\,\|f\|$ $\leq \varepsilon + |a-1| < \varepsilon + \big|1-|a|\big| < 2\varepsilon$.

<u>Περίπτωση 2η:</u> $a < 0$: $\|g+f\| = \|h + af + f\| = \|h + (a+1)f\| \leq \|h\| + |a+1|\,\|f\| = \|h\| + |a+1|$ $= \|h\| + \big|1-|a|\big| \leq \varepsilon + \big|1-|a|\big| < 2\varepsilon$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.]

(a) $g(c) \leq g(m+k)$, $\forall c \in C$, $\forall k \in K = K(f, \frac{\delta}{2+\delta})$. Αλλά: $0 \in K$ από παρατήρηση και άρα: $\forall c \in C$: $g(c) \leq g(m)$ και $m \in C$ απ' όπου έπεται ότι: $g(m) = \sup\{g(c) : c \in C\} \Rightarrow g \in supp(C)$. Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $k \in K = K(f, \frac{\delta}{\delta+2})$ τότε έχουμε ότι: $g(m) \leq g(m+k)$ $\Rightarrow g(k) \geq 0$, $\forall k \in K(f, \frac{\delta}{\delta+2})$ και άρα από το λήμμα 1ο έπεται ότι: $\|f-g\| \leq 2\delta < \varepsilon$.