- Μάθημα 9ο: Ανάλυση 2: Δόδος:

▶ <u>Παράδειγμα:</u> Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε: $\overline{S_X}^{w} = \overline{B_X}^{\|\cdot\|}$

- Απόδειξη: Από θεώρημα Mazur έχουμε ότι αφού: $\overline{B_X}^{\|\cdot\|}$ είναι κλειστό και κυρτό γιατί B_X είναι κυρτό και άρα αφού: ~~$S_X \subseteq \overline{B_X}$ έπεται ότι:~~ το $\overline{B_X}^{\|\cdot\|}$ είναι ασθενώς κλειστό και αφού: $S_X \subseteq \overline{B_X}^{\|\cdot\|}$ έπεται ότι: $\overline{S_X}^{w} \subseteq \overline{B_X}^{\|\cdot\|}$. Τώρα για την αντίστροφη κατεύθυνση - εγκλεισμό έχουμε ότι: έστω προς άτοπον ότι: $\overline{S_X}^{w} \subsetneq \overline{B_X}^{\|\cdot\|}$ και άρα τότε υπάρχει $x_0 \in \overline{B_X}^{\|\cdot\|}$ με $x_0 \notin \overline{S_X}^{w}$ και ειδικότερα $\|x_0\| < 1$. Άρα: $\exists x_0$ με $\|x_0\|<1$ και $x_0 \in \mathcal{U} = X \setminus \overline{S_X}^{w}$ με: $\mathcal{U} \cap S_X = \emptyset$.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε το παρακάτω <u>λήμμα</u>:

- Αν $\dim X = \infty$ τότε $\forall x \in X: \|x\|<1$, $\forall \mathcal{U} \in (X, X^*)$ με $x \in \mathcal{U}$: $\mathcal{U} \cap S_X \neq \emptyset$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $\mathcal{U} = W(x, A, \varepsilon)$ όπου: $A \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$. Έστω ότι: $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ και τότε θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

<u>Ισχυρισμός:</u> $Y \neq \{0\}$: Προς άτοπον έστω ότι: $Y = \{0\}$ και τότε αν θεωρήσουμε την: $\Phi: X \to \mathbb{R}^n$ με $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ τότε αυτή είναι αλγεβρικός ισομορφισμός (προφανώς είναι 1-1 γιατί αν: $\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (f_1(y), \dots, f_n(y)) \Rightarrow (f_1(x-y), \dots, f_n(x-y)) = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f_i(x-y) = f_i(x) - f_i(y) = 0, \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x - y \in Y = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\} \Rightarrow x = y$) επί ενός υπόχωρου του $\mathbb{R}^n$ και άρα: $\dim X < +\infty$ που είναι άτοπο.

- Άρα $Y \neq \{0\}$ και άρα έχουμε ότι: $\exists z \in Y$ με $z \neq 0$ και τότε: $\forall t \geq 0$: $x + tz \in W(x, A, \varepsilon)$ γιατί: $\forall i = 1, \dots, n$: $|f_i(x) - f_i(x+tz)| = |f_i(x) - f_i(x) - t f_i(z)| = |t f_i(z)| = 0 < \varepsilon$.

Επιπλέον αν ορίσουμε: $h: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(t) = \|x + tz\|$ τότε: $h(0) = \|x\| < 1$ και $\lim_{t \to \infty} h(t) = +\infty$ γιατί: $h(t) \geq t\|z\| - \|x\|$, $\forall t \geq 0$ και άρα από ΘΜΤ: $\exists t_0 > 0$: $\|x + t_0 z\| = 1$ και $x + t_0 z \in W(x, A, \varepsilon) \cap S_X \Rightarrow W(x, A, \varepsilon) \cap S_X \neq \emptyset$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▷ **Πρόταση:** Έστω X χώρος Banach και B-norm φραγμένο $\subseteq X$. Έστω και $D \subseteq X^*$ με: $\overline{D}^{\|\cdot\|} = X^*$. Τότε οι σχετικές (X,D) και (X,X^*) στο B τοπολογίες ταυτίζονται.

- *Απόδειξη:* Αρκεί να αποδείξουμε 2 πράγματα:

1. Για κάθε $x \in B$:

(α). $\forall W$ ασθενής περιοχή του x: $\exists W'$ [redacted] (X,D)-περιοχή του x τέτοιο ώστε:

$W' \cap B \subseteq W \cap B$

(β). $\forall W$ ο (X,D)-περιοχή του x: $\exists W'$ ασθενώς ανοικτή περιοχή του x τέτοιο ώστε:

$W' \cap B \subseteq W \cap B$

- (β). Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $(X,D) \subseteq (X,X^*)$ και άρα απ' αυτό έπεται άμεσα το (β). παίρνοντας για $W' = W$.

- (α). Έστω τώρα W ασθενής περιοχή του x και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $W = W(x,A,\varepsilon)$ όπου: $A = \{f_1,\dots,f_n\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τυχόν. Τώρα παρατηρούμε ότι αφού το B είναι norm-φραγμένο $\subseteq X$ έπεται ότι: $c = \sup_{y\in B}\|y\| < +\infty$ και άρα τώρα αφού: $\overline{D}^{\|\cdot\|} = X^*$ έπεται ότι: $\forall i = 1,\dots,n$: $\exists g_i \in D \subseteq X^*$ με: $\|f_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Τώρα έστω: [redacted] $W' = W(x,\{g_1,\dots,g_n\},\frac{\varepsilon}{3})$ το οποίο W' είναι (X,D)-περιοχή του x γιατί: W' (X,D)-ανοικτό και $x \in W'$ προφανώς. Τώρα: έστω: $y \in W' \cap B$ και τότε θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $y \in W \cap B$ και αφού $y \in B$ αρκεί να αποδείξουμε ότι: $y \in W$. Τώρα: $\forall i = 1,\dots,n$: $|f_i(x) -$ [redacted] $f_i(y)|$

$$\leq |f_i(x)-g_i(x)| + |g_i(x)-g_i(y)| + |g_i(y)-f_i(y)| \underset{y\in W'}{\leq} \|f_i-g_i\|\,\|x\| + \|g_i-f_i\|\,\|y\| + \frac{\varepsilon}{3} \underset{\substack{x\in B\\ y\in B}}{\leq} \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon$$

και άρα: $y \in W$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Ορισμός: (Ασθενής Σύγκλιση).

Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X και $x \in X$.
Τότε λέμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει ασθενώς στο x και γράφουμε $x_n \xrightarrow{w} x$
ή $x_n \to x$ αν: $\forall \mathcal{U}$ ασθενώς ανοιχτή περιοχή του x: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $x_n \in \mathcal{U}$.

▶ Πρόταση: (Χαρακτηρισμός Ασθενούς Σύγκλισης).

Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X και $x \in X$.
Έστω επίσης και $D \subseteq X^*$ με: $\overline{\langle D \rangle}^{\|\cdot\|} = X^*$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). $x_n \xrightarrow{w} x$

(β). $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$

(γ). $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x^* \in S_{X^*}$

(δ). η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι norm-φραγμένη και $x_n \to x$ $x^*(x_n) \to x^*(x)$, $\forall x^* \in D$.

- Απόδειξη: (β) ⟶ (γ). προφανές

(γ) ⟶ (β). προφανές με κανονικοποίηση

(α) ⟶ (β). Έστω ότι: $x_n \xrightarrow{w} x$ και τότε αν πάρουμε $x^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ και θεωρήσουμε την βασική περιοχή του x: $W = W(x, \{x^*\}, \varepsilon)$ τότε από τον ορισμό αφού: $x_n \xrightarrow{w} x$
έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $x_n \in W \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $|x^*(x_n) - x^*(x)| < \varepsilon$
και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν $\Rightarrow x^*(x_n) \to x^*(x)$.

(α) ⟹ (γ). Με όμοιο τρόπο με παραπάνω

(β) ⟶ (δ). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $\hat{x}_n \in X^{**}$ και αφού: $\forall x^* \in X^*$: $\hat{x}_n(x^*)$
$= x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x) = \hat{x}(x^*)$ έπεται ότι: $\forall x^* \in X^*$: $(\hat{x}_n(x^*))_{n\geq 1}$ αυτή είναι συγκλίνουσα ακολουθία και άρα φραγμένη και επομένως: $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\hat{x}_n(x^*)| < +\infty$ και άρα
από Θεώρημα Ομοιόμορφα Φραγμένου έχουμε ότι: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{x}_n\| < +\infty$ και άρα αφού:
$\|\hat{x}_n\| = \|x_n\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι norm-φραγμένη. Ειδικότερα,
από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι: αφού το $B = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι norm-φραγμένο οι $(X, \langle D \rangle)$ και (X, X^*) ταυτίζονται στο B. Άρα:
$x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x^* \in D$

– (ε) ⇒ (α):
Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $W = W(x, A, \varepsilon)$ όπου: $A = \{f_1, \dots, f_k\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τότε: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \dots, k$ το οποίο είναι προφανές αφού: $f_i(x_n) \to f_i(x), n \to +\infty, \ \forall i = 1, \dots, k$.

– (δ) ⇒ (α): Έχουμε ότι αφού: $\forall x^* \in D: x^*(x_n) \to x^*(x) \Rightarrow \forall x^* \in \langle D \rangle$: $x^*(x_n) \to x^*(x) \overset{(x<D>)}{\Rightarrow} x_n \to x$ και αφού τώρα και η $\{x_n\}_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη έπεται ότι το $B = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι norm-φραγμένο και άρα πο B οι (X, X^*) και $(X, \langle D \rangle)$ ταυτίζονται πο B και άρα: $x_n \xrightarrow{w} x$

– <u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τον ℓ_p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $e_n = (0, \dots, \underset{n\text{-θέση}}{1}, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ και $e_n \in c_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Τώρα: έχουμε ότι για $1 \leq p, q \leq \infty$ έχουμε ότι: [redacted] αν: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ δηλαδή οι p, q είναι συζυγείς εκθέτες και με την σύμβαση ότι οι $1, \infty$ είναι συζυγείς εκθέτες έχουμε ότι: $(\ell_p)^* \cong \ell_q$ κάτω από τον ισομορφισμό:

$$\ell_q \ni (b_n)_{n \geq 1} \longrightarrow (b_n)^*_{n \geq 1} \in (\ell_p)^* \text{ με: } b_n^*(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Έστω τώρα: $1 < p < +\infty$ και τότε το σύνολο: $D = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (\ell_p)^* \cong \ell_q$ έχει την ιδιότητα: $\overline{\langle D \rangle}^{\|\cdot\|} = (\ell_p)^*$ γιατί: $\langle D \rangle = \{$ γραμμικών συνδυασμών του D (πεπερασμένων)$\} = \{(\gamma_n)_{n \geq 1} : \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq k_0: \gamma_n = 0\}$ και άρα: $\overline{\langle D \rangle}^{\|\cdot\|} = \ell_q$ και άρα αν $(x_k)_{k \geq 1}$ είναι μια ακολουθία που ℓ_p norm-φραγμένη και $x \in \ell_p$ τότε: $x_k \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow e_n^*(x_k) \xrightarrow{k \to \infty} e_n^*(x), \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x_k(n) \xrightarrow{k \to \infty} x(n), \ \forall n \in \mathbb{N}$ (κατά συντεταγμένες σύγκλιση)

+ <u>Παράδειγμα:</u> $e_n \xrightarrow{w} 0$ άμεσο από τα παραπάνω

– <u>Στον ℓ_1</u>: θα αποδείξουμε ότι: $\nexists (e_{n_k})_{k \geq 1}$ υπακολουθία της $(e_n)_{n \geq 1}$ με $e_{n_k} \xrightarrow{w} x \in \ell_1$

• <u>Βήμα 1ο:</u> Αν $(e_{n_k})_{k \geq 1}$ υπακολουθία της $(e_n)_{n \geq 1}$ με $e_{n_k} \xrightarrow{w} x \in \ell_1 \Rightarrow x = 0$.

Πράγματι, αν $e_{n_k} \xrightarrow{w} x \in \ell_1$ τότε: $\forall i \in \mathbb{N}: e_i^*(e_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} e_i^*(x)$

$\Rightarrow e_{n_k}(i) \xrightarrow{k \to \infty} x(i), \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x(i) = 0, \ \forall i \in \mathbb{N}$

- Βήμα 2ο: Για κάθε $(e_{n_k})_{k\geq 1}$ υπακολουθία της $(e_n)_{n\geq 1}$: $e_{n_k} \overset{w}{\nrightarrow} 0$

• Ορίζουμε $x=(a_n)_{n\geq 1}$ με: $a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=n_k \text{ για κάποιο } k\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ και τότε:

$x\in \ell_\infty = (\ell_1)^*$ και: $x^*(e_{n_k}) = 1 \longrightarrow 1 \neq 0 = x^*(0)$ και άρα: $e_{n_k} \overset{w}{\nrightarrow} 0$,

από προηγούμενη πρόταση.