Ανάλυση ΙΙ

Μάθημα 07.
(14/03/2023)

**Ορσ:** Έστω $X$ τ.χ., $A \subseteq X$.

① $A$ λέγεται πυκνό αν $X = \overline{A}$

② $X$ διαχωρίσιμος αν υπάρχει $A \subseteq X$ αριθμ. πυκνό

③ $X$ λέγεται 1ος αριθμήσιμος αν:
κάθε $x \in X$ έχει αριθμ. βάση περιοχών.
δηλ. $\exists (U_n)_n$ τω $\forall n$: $x \in U_n \in \mathcal{T}$.
και $\forall V \in \mathcal{T}$ με $x \in V \Rightarrow \exists\, n_0$: $x \in U_{n_0} \subseteq V$

④ $X$ λέγεται 2ος αριθμ. αν έχει αριθμ. βάση.

**Πρόταση:** $X^*$ διαχωρ. $\Rightarrow X$ διαχωρ.

απόδ.

Έστω $(x_n^*)_n$ norm πυκνή στην $S_{X^*}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: επιλέγουμε $x_n \in B_X$:

$$x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $Y = \overline{\text{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$.
είναι διαχωρίσιμος, άρα αρκεί δ.ο. $X = Y$.

Αν όχι υπάρχει $z \in X | Y \not< 6$

$d(z, Y) = d > 0$.

Από πρόηγ. πρόταση υπάρχει $f \in X^*$

με $\|f\| = 1$ και $f(z) = d > 0$, $f|_Y = 0$.

$\to \forall n \in \mathbb{N}: \|f - x_n^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{ |x_n^*(x) - f(x)| \}$

$\geq x_n^*(x_n) - f(x) \geq \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. άτοπο.

<u>Θεώρημα</u> (Cantor).

$(X, \rho)$ μ.χ. πλήρης $\Leftrightarrow$ $\forall (F_n)_n$ ακολ. κλειστών, $F_{n+1} \subseteq F_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$\operatorname{diam} F_n \to 0 \Rightarrow \bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

<u>Λήμμα</u> (Baire)

Αν $(X, \rho)$ πλήρης μ.χ., $(U_n)_n$ ακολ. ανοικτών και πυκνών $\Rightarrow \bigcap_n U_n$ είναι πυκνό.

<u>απόδ</u>: Έστω $\emptyset \neq V \subseteq X$ ανοικτό

– Δ/δο: $V \cap \left( \bigcap_n U_n \right) \neq \emptyset$.

- $\underline{V \cap U_1 \neq \emptyset}$ ανοικτό $\Rightarrow \exists x_1 \in X$, $0 < r_1 < \frac{1}{2}$

$B(x_1, r_1) \subseteq V \cap U_1$.

- $B(x_1, r_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ ανοικτό $\Rightarrow$

$\exists x_2 \in X, \exists\, 0 < r_2 < \frac{1}{2^2}$ :

$$\overline{B(x_2, r_2)} \subseteq B(x_1, r_1) \cap U_2 \subseteq U \cap (U_1 \cap U_2)$$

Αναδρομικά επιλέγουμε $(x_n) \subseteq X$ και $(r_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ τ.ω. $0 < r_n < \frac{1}{2^n}$ με

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n),$$

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq \overline{B(x_n, r_n)}$$

Cantor $\Rightarrow$ $\bigcap_n \overline{B(x_n, r_n)} = \{z\}$. Από κατασκ. $z \in U \cap \left(\bigcap_n U_n\right)$. $\square$

κοινό

**Θεώρημα** (ομοιόμορφου φράγματος Banach–Steinhauss.)

Έστω $X, Y$ χώροι Banach.

- $\{T_i \mid i \in I\}$ οικογένεια στον $\mathcal{B}(X, Y)$ τ.ω. $\forall x \in X$ : $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$.

$\Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

**Πόρισμα** (Baire) $(F_n)_n$ ακολ. κλειστών σε ένα πλήρη μ.χ. $(X, \rho)$ : $X = \bigcup_n F_n$.

$\Rightarrow$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$ ]

<u>αποδ.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n \right\}.$$

<u>Ισχ.</u> $F_n$ κλειστό. Έστω $(x_k) \subseteq F_n$ τ.ω $x_k \to x_0$. Τότε $\forall i \in I$ : $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\|T_i x_k\| \leq n \xrightarrow{k \to \infty} \|T_i x_0\| \leq n.$$

$$\Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i x_0\| \leq n \Rightarrow x_0 \in F_n$$

Από υπόθ. $X = \bigcup_n F_n \xRightarrow{\text{πόρισμα}}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists\, z \in X,\ r > 0$: $B(z, r) \subseteq F_{n_0} \Rightarrow \forall x \in B(0,1)$, $\forall i \in I$

$$\|T_i(z + rx)\| \leq n_0.$$

$\Rightarrow \forall x \in B(0,1)$; $\forall i \in I$ :

$$r\|T_i(x)\| - \|T z\| \leq \|T_i(rx + z)\| \leq n_0$$

$$\Rightarrow \|T_i x\| \leq \frac{n_0 + \|T_z z\|}{r} \leq \frac{2n_0}{r}.$$

$$\Rightarrow \forall i \in I: \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} \Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

∎

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $X, Y$ χώροι Banach και $(T_n) \subseteq B(X, Y)$: $(T_n(x))$ συγκλίνει $\forall x \in X$. Τότε $T: X \to Y \in B(X, Y)$

και $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$. 

<u>αποδ</u>: από υποθ. $\left(\sup_n \|T_n x\| < \infty\right.$

$\forall x \in X \xrightarrow{\Theta.B.S.} \sup_n \|T_n\| < \infty$.

Ο $T$ είναι <u>γραμμικός</u> (από γρ. ορίου)

Επιπλέον, $\forall x \in \overline{B(0,1)}$)

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\|$

$\leq C\|x\| \leq C \xrightarrow{n\to\infty} \|T x\| \leq C, \ \forall x \in \overline{B(0,1)}$)

$\Rightarrow T \in B(X, Y)$ και $\|T\| \leq C$.

Επίσης,

$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq \|T_n\|, \ \forall x \in \overline{B(0,1)}$)

$\Rightarrow \|T x\| \leq \liminf \|T_n\|$, "

$\Rightarrow \|T\| \leq \liminf \|T_n\|$. $\square$

<u>Θεώρημα</u> (ανοικτής απεικόνισης)

Έστω $X, Y$ χώροι Banach και

$T: X \to Y$, γραμμ. φραγμ. επί

$\Rightarrow T$ είναι <u>ανοικτή</u>, δηλ. $\forall U \subseteq X$ αν

$\Rightarrow T(U) \subseteq Y$ <u>ανοικτό</u>

<u>αποδ</u>:

<u>1ο σκέλος</u> Υποθέτουμε ότι $\exists\, c>0$:

$$T\left(B_X(0,1)\right) \supseteq B_Y(0,c)$$

$\Rightarrow$ $T$ ανοικτή

<u>αποδ</u>: Έστω $\emptyset \neq U \subseteq X$ ανοικτό

Έστω $x \in U$, $\Rightarrow \exists\, r_x > 0$: $B(x,r_x) \subseteq U$.

$$\Rightarrow T(U) \supseteq T\left(B(x,r_x)\right) = Tx + r_x T B(0,1)$$

$$\supseteq Tx + r_x B(0,c) = B(Tx, r_x c)$$

$\Rightarrow T(U)$ <u>ανοικτό</u> $\left(T(U) = \bigcup_{x \in U} B(Tx, r_x c)\right)$

<u>2ο σκέλος</u> Υποθέτουμε ότι

$$\overline{T B_X(0,1)} \supseteq B(0,2c), \text{ τότε}$$

$$T\left(B_X(0,1)\right) \supseteq B(0,c).$$

<u>αποδ</u> Από υποθ. και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2^n}$.

$$\overline{T B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)} \supseteq B\left(0, \frac{c}{2^{n-1}}\right)$$

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in Y$ τ.ω. $\|y\| < \frac{c}{2^{n-1}}$

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $z \in X$: $\|z\| \leq \frac{1}{2^n}$ με

$\|Tz - y\| < \varepsilon$. (*)

Σταθεροποιούμε $y \in B(0,c)$ δηλ. $\|y\| < c$. Πρέπει ν.δ.ο. υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < 1$ : $y = Tx$.

Από (*) για $n=1$, $\epsilon = \frac{c}{2}$ μπορούμε να επιλ. $z_1 \in X$ : $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ :

$$\|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

Από (*) για $n = 2$, $\epsilon = \frac{c}{2^2}$, υπάρχει $z_2$ : $\|z_2\| \leq \frac{1}{2^2}$, $\|y - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{c}{2^2}$

Αναδρομικά επιλέγουμε $(z_n) \subset X$ τ.ω. • $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• $\|y - \sum_{i=1}^{n} Tz_i\| < \frac{c}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν $x_n = z_1 + \dots + z_n$, τότε $(x_n)$ είναι Cauchy, $X$ χώρος Banach $\Rightarrow x_n \to x$

$\Rightarrow \|x\| \leq \lim_{n \to \infty} \sum^{n} \|z_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

$\Rightarrow x \in B(0,1)$. Επιπλέον,

$\|y - Tx_n\| \leq \frac{c}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} y = Tx$.

Τ φρ.

3ο βήμα Αν $T$ γραμμ., φρ. και ⑧
επί τότε $\exists c>0$: $\overline{T\,B(0,1)} \supseteq B(0,2c)$.

απόδ: $\forall n\in\mathbb{N}$ αν $F_n = \overline{T(B(0,n))}$
$\Rightarrow Y = \bigcup_n F_n$, αφού $T$ επί
Baire
$\Rightarrow$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\mathrm{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists y\in Y,\ r>0$: $B(y,r) \subseteq \overline{T(B(0,n_0))}$

$B(0,n_0)$ συμμετρ.
$\Rightarrow -B(y,r) \subseteq \overline{T\,B(0,n_0)}$
$T$ γραμμ.
$\Rightarrow B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B(0,n_0))} + \overline{T(B(0,n_0))}$

Ισχ: $\overline{T\,B(0,n_0)} + \overline{T\,B(0,n_0)} = \overline{T(B(0,2n_0))}$

απόδ: Έστω $w\in \overline{T}+\overline{T}$ και επιλέγουμε $(x_n),(y_n)$ στη $B(0,n_0)$: $T(x_n+y_n)\to w$.
Αλλά, τότε $\|x_n+y_n\| < 2n_0 \Rightarrow$
$w\in \overline{T(B(0,2n_0))}$

Αντίστροφα, αν $z\in \overline{T\,B(0,2n_0)}$
επιλέγουμε $p_n$ : $\|p_n\| < 2n_0$: $p_n \to z$
$\Rightarrow$ θέτουμε $x_n = \dfrac{p_n}{2} = y_n$
$\Rightarrow z\in \overline{T}+\overline{T}$

Από ισχ. και προηγούμενο εχημεισης (9)

$$B(0,r) \subseteq \overline{T\, \overline{B(0, 2n_0)}} \Rightarrow$$

$$B\left(0, \frac{r}{2n_0}\right) \subseteq \overline{T(B(0,1))}$$

για $c = \frac{r}{4n_0}$, έχουμε το ζητούμενο

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $X, Y$ χώροι Banach, $T: X \to Y$ γραμμ. 1-1, επί, συνεχής $\Rightarrow$ ισομορφισμός

<u>αποδ</u>: Από θεωρ. ανοικτής απ. $\Rightarrow T$ ανοικτή $\Rightarrow \forall U \subseteq X$ ανοικτό

$\therefore \left[T^{-1}(U)\right]^{-1} = T(U)$ ανοικτό

<u>$\Rightarrow T^{-1}$ συνεχής</u>

ΕΙ

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $X$ δ.χ., $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ νόρμες στον $X$ τω $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ να είναι Banach.

Αν υπάρχει $C' > 0 : \|x\|_2 \leq C' \|x\|_1$

$\Rightarrow \exists c > 0 : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C' \|x\|_1, \forall x \in X$

<u>αποδ</u>: $Id: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$

είναι ισομορφισμός, από προηγ. πό-
ρισμα, υπάρχει $c>0$: $c\|x\|_1 \le \|x\|_2$.

<u>Παρατήρηση</u>: Το προηγούμενο πόρισμα <u>δεν</u> ισχύει αν ο $(X, \|\cdot\|_2)$ <u>δεν</u> είναι Banach.

<u>Π.χ.</u>: $X = C[0,1]$, $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$.

$$\|f\|_2 = \|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

Προφανώς, $\|f\|_{L^1} \le \|f\|_\infty$, αλλά $\|\cdot\|_{L^1}, \|\cdot\|_\infty$ <u>δεν</u> είναι ισοδύναμες:

<u>Π.χ.</u>: $f_n(t) = t^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_{L^1} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Άρα $\nexists\, c>0$: $c\|f_n\|_\infty \le \|f_n\|_{L^1}$.