Ανάλυση ΙΙ

Τοπολογικοί διαν. χώροι.

<u>Ορσ</u>: Έστω X δ.χ. και τ τοπολογία στο X τ.ω (X,τ) Hausdorff. Λέμε ότι ο (X,τ) είναι τ.δ.χ. αν οι $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ είναι συνεχείς. [$\forall\, x,y \in X$, $\forall\, U \subseteq X$ ανοικτό. $x+y \in U \Rightarrow \exists\, V, W \in \tau$: $x \in V$, $y \in W$ τ.ω $V+W \subseteq U$.
$= \{ v+w \mid v \in V, w \in W \}$]

<u>Ορσ</u>: Έστω X δ.χ. Για κάθε $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\tau_x : X \to X$, $M_\lambda : X \to X$ με $\tau_x(y) = x+y$, $M_\lambda(y) = \lambda y$.

Πρόταση: αν (X, τ) τ.δ.χ. (2)

$\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ οι τ_x, μ_λ είναι

ομοιομορφισμοί.

απόδ: Οι τ_x, μ_λ 1-1 επί. και

$\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$ ενώ $\mu_\lambda^{-1} = \mu_{\frac{1}{\lambda}}$.

Αρα, αρκεί. τ_x, μ_λ συνεχής.

Εστω $U \subseteq X$ ανοιχτό $z \in X$

με $\tau_x(z) = x + z \in U$. λόγω συνεχείας

"+" $\exists\, W \subseteq X$ ανοιχτό με $x + W \subseteq U$.

$[\, z \in W \subseteq \tau_x^{-1}(U) \,]$. Αρα τ_x

συνεχής και όμοια για το μ_λ.

Πόρισμα: Εστω X τ.δ.χ. και

$U \subseteq X$. Τα ε.ι.

(1) U ανοιχτό

(2) $\forall x \in X$: $x + U$ ανοιχτό

③ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, λU ανοικτό. ③

<u>Πρόταση</u>: Έστω X τδχ και $\tau : X \to \mathbb{R}$ γραμμ. τα.ε.ι

① τ συνεχής ② τ συνεχής στο 0.

③ τ φραγμένος, δηλ. $\exists\, W \subseteq X$, $0 \in W$ και M: $\tau(W) \subseteq (-M, M)$.

<u>αποδ</u>: ① ⇒ ② προφανές.

② ⇒ ① Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό. και $x \in \tau^{-1}(U)$. επιλέγουμε $\varepsilon > 0$:

$(\tau x - \varepsilon, \tau x + \varepsilon) \subseteq U$. Από συνέχεια στο 0 υπάρχει $\underset{\substack{\cup\\ 0}}{W} \in \tau$: $\tau(W) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ και

$\Rightarrow x \in x + W \in \tau$.

$\tau(x+W) = \tau x + \tau(W) \subseteq (\tau x - \varepsilon, \tau x + \varepsilon) \subseteq U$.

$\Rightarrow \tau$ συνεχής.

(2) => (3) Αν $\tau^{-1}(-1,1) = W$ (4)

(3) => (2) Έστω ε>0 τυχαίο και

Το $0 \in W_\varepsilon \in \tau$

$W_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot W$

και $\tau(W_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Π.

Ορσ: Έστω X δχ και $p: X \to \mathbb{R}$

Η p καλείται

(1) ~~υπογραμμική~~ αν

<u>υποπροσθετική</u> αν $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2) <u>θετικά ομογενής</u> αν $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

$\forall \lambda > 0, \forall x$

(3) <u>υπογραμμική</u> αν ικανοποιεί (1), (2)

(4) <u>ημινόρμα</u>: αν ικανοποιεί το (1)

και $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(5) <u>νόρμα</u>: αν είναι ημινόρμα και $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Παρατήρηση:

νόρμα $\Rightarrow$ ημινόρμα $\Rightarrow$ υπογραμμική

(6) κυρτή συνάρτηση αν:

$$p\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \le \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y)$$

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x, y$.

Ορσ: Έστω $(\mathbb{P}, \le)$ ένα με-
ρικά διατεταγμένο ζεύγος
(δηλ. $\mathbb{P}$ σύνολο, και $\le \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$
τ.ω. (α) αυτοπαθής (β) μεταβα-
$x \le x, \forall x$
τική $x \le y, y \le z \Rightarrow x \le z$
(γ) αντισυμμετρική $x \le y \wedge y \le x$
$\Rightarrow x = y$.)

(1) Ένα υποσ. $C \subset \mathbb{P}$ καλεί-
ται αλυσίδα αν $\forall x, y \in C$
$x \le y$ ή $y \le x$.

2 αν $A \subseteq \mathbb{P}$ και $x \in \mathbb{P}$ το x καλείται <u>άνω φράγμα</u> το A αν $\forall y \in A \cdot y \leq x$.

3 Ένα $x \in \mathbb{P}$ καλ. <u>μεγιστικό</u> αν $\nexists z \in \mathbb{P} : z \neq x \wedge x \leq z$.

<u>Λήμμα</u> (Zorn).

Αν $(\mathbb{P}, \leq)$ μ.δ.σ. τ.ω. κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα. τότε υπάρχει $x \in \mathbb{P}$ μεγιστικό.

<u>Λήμμα</u> Έστω X δχ., $Y \hookrightarrow X$ $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική, $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμική. τ.ω. $f(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$.

Αποδ:

Έστω $z_0 \in Y - \sigma$

$\exists\ \tilde{f} : \langle Y \cup \{z_0\} \rangle \to \mathbb{R}$

γραμμ. με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\tilde{f}(w) \leq p(w)$

$\forall\ w \in \langle Y \cup \{z_0\} \rangle$.

αποδ: $\langle Y \cup \{z_0\} \rangle = \{ y + \lambda z_0 \mid y \in Y, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Αν $\tilde{f} : \langle Y \cup \{z_0\} \rangle \to \mathbb{R}$

γραμμ με $\tilde{f}|_Y = f$, τότε:

$$\tilde{f}(y + \lambda z_0) = f(y) + \lambda \underbrace{\tilde{f}(z_0)}_{c_0}$$

$$= f(y) + \lambda c_0 .$$

Άρα αρκεί να επιλέξουμε $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(y) + \lambda c_0 \leq p(y + \lambda z_0)$

$\forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(8)

Έστω $x, y \in \Upsilon$ τυχαία.

Τότε $f(x-y) = f(x-y) \leq p(x-y)$

$\leq p(x - z_0 + z_0 - y) \leq p(x + z_0) + p(-y - z_0)$

$\Rightarrow p(-y - z_0) - f(y) \leq p(x + z_0) - f(x)$

$\forall x, y \in \Upsilon$

$\Rightarrow \exists c_0 \in \mathbb{R}$:

$-p(-y - z_0) - f(y) \leq c_0 \leq p(x + z_0) - f(x)$ (*)

$\forall x, y \in \Upsilon$

Θ.δ.ο. $f(y) + \lambda c_0) \leq p(y + \lambda z_0)$

$\forall y \in \Upsilon$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις.

(1) $\lambda = 0$ ✓

(2) $\lambda > 0$: Εφαρμ. την (*) για

$x = \frac{y}{\lambda}$ τότε

$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + z_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$

$\lambda c_0 \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + z_0\right) - f(y)$

$$\varphi(y) + \lambda c_0 \leq p(y + \lambda z_0) \quad (9)$$

(3) $\lambda < 0$: Εφαρμ. την (*) για

$w = \dfrac{y}{\lambda}$: $-p\left(-\dfrac{y}{\lambda} - z_0\right) - \varphi\left(\dfrac{y}{\lambda}\right) \leq c_0$

$\Rightarrow (-\lambda) \cdot \left[-p\left(-\dfrac{y}{\lambda} - z_0\right) + \varphi(y)\right] \leq -\lambda c_0$

$\Rightarrow \varphi(y) + \lambda c_0 \leq p(y + \lambda z_0)$.

$\square$

__Θεώρημα__ (Hahn-Banach).

Έστω X δ.χ. $Y \hookrightarrow X$, $\varphi: Y \to \mathbb{R}$

$p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμική τ.ω.

$\varphi(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$. $\Rightarrow$

$\exists\, \tilde{\varphi}: X \to \mathbb{R}$ γραμμική, $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$.

τ.ω. $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

__απόδ.__: Ορίζουμε

$$\mathbb{P} = \left\{ (Z, g) : \begin{array}{l} Y \hookrightarrow Z \\ g: Z \to \mathbb{R} \text{ γραμμ.} \\ g|_Y = \varphi,\ g(z) \leq p(z),\ \forall z \in Z \end{array} \right\}.$$

Scanned with CamScanner

$(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2)$ αν

$Z_1 \subset Z_2$, $g_2|_{Z_1} = g_1$.

Το ζεύγος $(\mathbb{P}, \leq)$ είναι μερ. διατ. Έστω

$\mathcal{C} = \{ (Z_i, g_i) \mid i \in I \}$ αλυσίδα.

__Δσκηση / Παρατήρηση.__

$Z = \bigcup_{i \in I} Z_i \subset X$ και $g = \bigcup_{i \in I} g_i$

$\Rightarrow g : Z \to \mathbb{R}$ γραμμ., $g|_Y = f$.

και $g(z) \leq p(z)$, $\forall z \in Z$.

Ειδικότερα $(Z, g) \in \mathbb{P}$. και $\forall i \in I$.

$(Z_i, g_i) \leq (Z, g)$, άρα η $\mathcal{C}$ έχει

άνω φράγμα.

Από το λήμμα του Zorn. $\exists$.

$(W, w) \in \mathbb{P}$ μεγιστικό.

Λύσ. $W = X$. Αν όχι, τότε

επειδ. $z_0 \notin W$ και επεκτείνουμε

ω σε $H : \langle W \cup \{z_0\} \rangle \to \mathbb{R}$

όπως στο προηγ. λήμμα, τότε

$(\langle W \cup \{z_0\} \rangle, H) \in \mathbb{P}$ και

$(W, \omega) \precneqq (\langle W \cup \{z_0\} \rangle, H)$ Άτοπο

αφού (W, ω) μεγιστικό.

Θεώρημα Κάθε δ.χ. έχει Hamel βάση.

Απόδ: Σταθ. X δ.χ. και

$\mathbb{P} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ γραμμ. ανεξ.} \}$

και οριζ. $A \preceq B$ αν $A \subseteq B$.

στο $\mathbb{P}$.

Αν $\mathcal{C} = \{A_i \mid i \in I\}$ αλυσίδα στο

$\mathbb{P}$ το $\bigcup_{i \in I} A_i$ γραμμ. ανεξ.

Από Λήμμα Zorn $\exists\, \Gamma \in \mathbb{I}$

μεγιστικό. Αποδ. $\alpha\Gamma Y = X$

Αν όχι $\exists\, z \in X$ με $z \notin \alpha\Gamma Y$.

$\Leftarrow\!\!\Rightarrow \Gamma \cup \{z_0\}$ γραμμ. ανεξ.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Gamma \cup \{z_0\} \in \mathbb{I} \\ \Gamma \subsetneq \Gamma \cup \{z_0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{ΑΤΟΠΟ}}$$

□