Τυχαία γινόμενα τ.χ. ①

Ορσ: $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$

οικογένεια τ.χ.

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{i \in I} A_i \;\middle|\; \begin{array}{l} A_i \in \tau_i \\ A_i = X_i \text{ για όλα} \\ \text{εκτός από πεπερ.} \\ i \in I \end{array} \right\}.$$

Συμβ: $\prod \tau_i$ τη τοπολ. στο $\prod_{i \in I} X_i$ που παραγ. από $\mathcal{R}$.

Παρατ.: ① $\forall\, i_0 \in I$ η

$$\pi_{i_0} : \left(\prod_i X_i, \prod_i \tau_i \right) \to (X_{i_0}, \tau_{i_0})$$

συνεχής.

② **Θεώρημα** (Tychonoff).

Έστω $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$

και $K_i \subseteq X_i$ συμπ. $\forall i$

$\Rightarrow \left(\prod_i \tau_i\right)$ είναι $\left(\prod_i \tau_i\right)$ - συμπ. ②

Πρόταση: Αν (X_i, τ_i) Hausdorff $\forall i \Rightarrow \prod_i \tau_i$ Hausdorff.

Απόδ: Έστω $\bar{x} = (x_i)$, $\bar{y} = (y_i) \in \prod X_i$ με $\bar{x} \neq \bar{y}$. Επομένως $\exists\, i_0 \in I$ τω $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Αφού X_{i_0} Hausdorff $\exists\, U, V \subseteq X_{i_0}$ ανοικτά, $x_{i_0} \in U$, $y_{i_0} \in V$,

$U \cap V = \emptyset$.

Θέτε $\bar{U} = \pi_{i_0}^{-1}(U)$, $\bar{V} = \pi_{i_0}^{-1}(V)$.

$\Rightarrow \bar{U}, \bar{V} \in \prod \tau_i$, $\bar{x} \in \bar{U}$, $\bar{y} \in \bar{V}$

$\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

Ορσ: Δυο τ.χ. (X, τ), (Y, σ) καλούνται **ομοιομορφικοί** αν $\exists\, f : X \to Y$ 1-1, επί αμφισυνεχής

Ελάχιστη τοπολογία που κάνει μια οικογένεια συναρτήσεων συνεχείς:

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ μια οικογένεια πρ. συναρτήσεων στον X.

<u>Πρόταση</u>: Βρες τοπολ. στο X που κάνει όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ συνεχή.

<u>Θεσ</u>: $(X, \mathcal{F}) = \bigcap \{ \tau \mid \tau$ τοπολ. στο X : $\forall f \in \mathcal{F}$ f συνεχής $\}$.

<u>Κατασκευή</u>:

<u>Βήμα 1ο</u>: Ορίζουμε

$\mathcal{B} = \{ f^{-1}(I) \mid f \in \mathcal{F}$ αν. $I \subseteq \mathbb{R}$ διαστ. $\}$.

<u>Βήμα 2ο</u>:

$\mathcal{B}_2 = \{ f_1^{-1}(I_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(I_n)$ (4)

$\mid n \in \mathbb{N},\ f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F},\ I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R} \}$.
αν. διαστ.

Η $\mathcal{B}_2$ είναι βάση για την $\tau_{\mathcal{B}_2}$

Ισχ. $\tau(X, \mathcal{F}) = \tau_{\mathcal{B}_2}$.

Αποδ: $\forall A \in \mathcal{B}_1 \to A \in \tau(X, \mathcal{F})$.

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}_2 \to A \in \tau(X, \mathcal{F})$

$\Rightarrow \tau_{\mathcal{B}_2} \subseteq \tau(X, \mathcal{F})$.

Αντιστρόφως, αν $f \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$f^{-1}(I) \in \tau_{\mathcal{B}_2},\ \forall I \subseteq \mathbb{R}$, α.δ

$\Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_2,\ \forall U \subseteq \mathbb{R}$ αν.

$\Rightarrow f$ είναι $\tau_{\mathcal{B}_2}$-συν. $\forall f \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \tau(X, \mathcal{F}) \subseteq \tau_{\mathcal{B}_2}$.

Περιγραφή της βάσης περιο. 5
της $(X, \mathcal{F})$.

$\forall x \in X$, $\forall \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathcal{F}$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$W(x, \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}, \varepsilon) =$$

$$= \{ y \in X \mid |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \varepsilon \} \quad \forall i = 1 \dots n$$

Λυπή η οικογένεια

$\{ W(x, A, \varepsilon) \mid x \in X,\ A \subseteq \mathcal{F}$ πεπερ. $\varepsilon > 0 \}$

είναι βάση περιοχών της $(X, \mathcal{F})$.

<u>Ερώτημα</u>: Πότε ο $(X, \mathcal{F})$ είναι Hausdorff;

<u>Ορσ</u>: Λέμε ότι η $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ διαχωρίζει σημεία αν $\forall x \neq y$ στον X, $\exists \varphi \in \mathcal{F}$: $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

Hausdorff $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X.

Διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$)

Έστω $X \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με τις $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$

τ.ω. $(X, +)$ αβελιανή ομάδα.

- είναι γνωστός πολ/σμός.

Παραδ: ① $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

② $M(\mathbb{R})^{n \times n}$. ③ $C^1([0,1])$.

④ $C^k([0,1])$ ⑤ $C^\infty([0,1])$

⑥ $L_p([0,1])$ $1 \leq p \leq \infty$

⑦ $\ell_p(\mathbb{N}) = \{(a_n) \mid \sum_n (a_n)^p < \infty\}$.

$1 \leq p \leq \infty$, $c_0(\mathbb{N}) = \{(a_n) \mid a_n \to 0\}$

Ορσ ① Έστω X δ.χ και Υ ⊆ X. Ο Υ καλείται δ-υπόχωρος αν ο Υ με τις επαγόμενες πράξεις είναι δ. υπόχωρος.

Συμβ. $\Upsilon \hookrightarrow X$. ($\Rightarrow \Upsilon \neq \emptyset$).

② Αν $x \in X$, τότε $\langle \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} \rangle \hookrightarrow X$

③ $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, $C^\infty([0,1]) \hookrightarrow C^k([0,1]) \hookrightarrow C([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$.

④ Αν $\langle \Upsilon_i \mid i \in I \rangle$ δ.υ. του $X \Rightarrow \bigcap_i \Upsilon_i \hookrightarrow X$.

Ορσ: Έστω X δ.χ., $A \subseteq X$.

Ορίζουμε $\langle A \rangle = \bigcap \left\{ \Upsilon \;\middle|\; \begin{array}{l} A \subseteq \Upsilon \\ \Upsilon \hookrightarrow X \end{array} \right\}$.

γραμμ. θήκη.

Πρόταση: X δ.χ., $A \subseteq X$.

Θέτουμε

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \;\middle|\; \begin{matrix} y_i \in A, & n \in \mathbb{N} \\ \lambda_i \in \mathbb{R} & \end{matrix} \right\}$$

Τότε ① $B \hookrightarrow X$ ② $B = \langle A \rangle$.

Ορσ: X δ.χ., $\emptyset \neq A \subseteq X$.

① Αν $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ πεπ: το A καλ. γραμμ. ανεξάρτητο

τοι αν $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

~~[illegible]~~, $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow$

$\lambda_i = 0$

② Αν $A \subseteq X$ άπειρο, τότε καλ. γραμμ. ανεξ. αν $\forall B \subseteq A$ πεπ., $B \neq \emptyset$

είναι γραμμ. ανεξ.

Παρατήρηση: Αν $\emptyset \neq A \subseteq X$

γραμμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \langle A \rangle$

$\exists!\, n \in \mathbb{N}$, $\exists!\, x_1, \dots, x_n \in A$, $\exists!\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

π.ω $x = \sum_i \lambda_i x_i$

② Αν A γρ. ανεξ. $\Rightarrow \forall x \in A$

$x \neq 0$.

<u>Ορσ</u>: Έστω X δ.χ. και $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

Το A καλείται (<u>Hammel) βάση</u> αν είναι γρ. ανεξ. και $X = \langle A \rangle$.

<u>Θεώρημα</u>. Κάθε δ.χ. έχει Hammel βάση.

<u>Παρατηρήσεις / Παραδ.</u>

① $C_{00}(\mathbb{N}) = \{(a_n) \mid \exists k_0 : a_n = 0, \forall n \geq k_0\}$

$\Rightarrow A = \langle e_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ είναι Hammel βάση του $C_{00}(\mathbb{N})$

② Αν X, Y δ.χ. $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ Hammel βάσεις των X, Y $\Rightarrow$

X ισομ. $Y \Leftrightarrow |A| = |B|$

Ορσ. (α) Έστω X, Y δ.χ. (10)

και $T: X \to Y$. T καλ. γραμ-

μικός αν $\forall x, x' \in X$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda x + \mu x') = \lambda T(x) + \mu T(x')$$

$$\operatorname{Im} T = \{T(x) \mid x \in X\} \hookrightarrow Y$$

$$\ker T = \{x \in X \mid T(x) = 0\} \hookrightarrow X.$$

(β) Δr X δ.χ.

$$X^{\#} = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμ}\}.$$

αλγεβρικός δυϊκός.

Περιγράψω $X^{\#}$

Έστω A Hamel βάση του

X. Κάθε $\tau: A \to \mathbb{R}$. μας

επάγει μία γραμμική $T_{\tau}: X \to \mathbb{R}$

$$T\left(\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha \alpha\right) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha \tau(\alpha).$$

Παραδ:

1. $\tau_{t_0}: C[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad t_0 \in [0,1]$

$\tau_{t_0}(f) = f(t_0)$

2. $\tau: C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\tau(f) = \int_0^1 f(x)dx$

3. $T: C^2[0,1] \to C[0,1]$, $T(f) = f'$

Ορσ: Έστω X δ.χ και $C \subset X$ το C καλ. κυρτό αν $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ $\forall x, y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$

Παρατήρηση:

Αν C_i, $i \in I$ κυρτά υποσ του $X \to \bigcap_{i \in I} C_i$ κυρτό

Ορσ: Αν X δ.χ και $\emptyset \neq A \subseteq X$

$$\mathrm{conv}(A) = \bigcap \left\{ C \;\middle|\; \begin{array}{c} A \subseteq C \\ C \text{ κυρτό} \end{array} \right\}$$

↳ κυρτή θήκη.

$$= \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{\text{κυρτοί συνδυασμοί}} \;\Big|\; \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \in A \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N} \end{array} \Big\}.$$

κυρτοί συνδυασμοί του A.

12