

ΛΕΓΕΤΑΙ \mathbb{F} : (0511919099) 2

• $\bigcup_{\alpha} G = \ast_{\alpha} G_{\alpha}$ και $G_{\alpha} = \ast_{\beta} H_{\alpha\beta}$.

τότε G είναι το ελεύθερο γινόμενο
 του $\ast_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ πάνω πω. $H_{\alpha\beta}$ (λεγε-
 και επιπέδων πω αρχικών)
 (από τις καθορισμένες ιδιότητες)

• $\bigcup_{\alpha} G = \ast_{\alpha} G_{\alpha}$ και για κάθε
 παράγοντα, έχουμε υποομάδα.

$\mathbb{I} \leq H_{\alpha} \leq G_{\alpha}$ τότε, π υποομάδα.

H πω G που παράγεται από τις.

H_{α} . να είναι ελεύθερο γινόμενο.

πω H_{α} , δηλ. $\ast_{\alpha} H_{\alpha} = H$.

(από τις βασικές προτάσεις
 πω "ανωτέρω νόμων")

Γράφει το εξής:

(2)

Θεώρημα (υπομνήτου Κρούσων)

Έστω $G = \ast_i G_i$ και $H \leq G$.

Τότε $H = F \ast_j H_j$ όπου F ελεύθερη ομάδα και H_j είναι τόνες της

H με συζυγία των παραχόμενων G_i ,

δηλ. $H_j = H \cap g G_i(j) g^{-1}$

Καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων αβελιανών ομάδων.

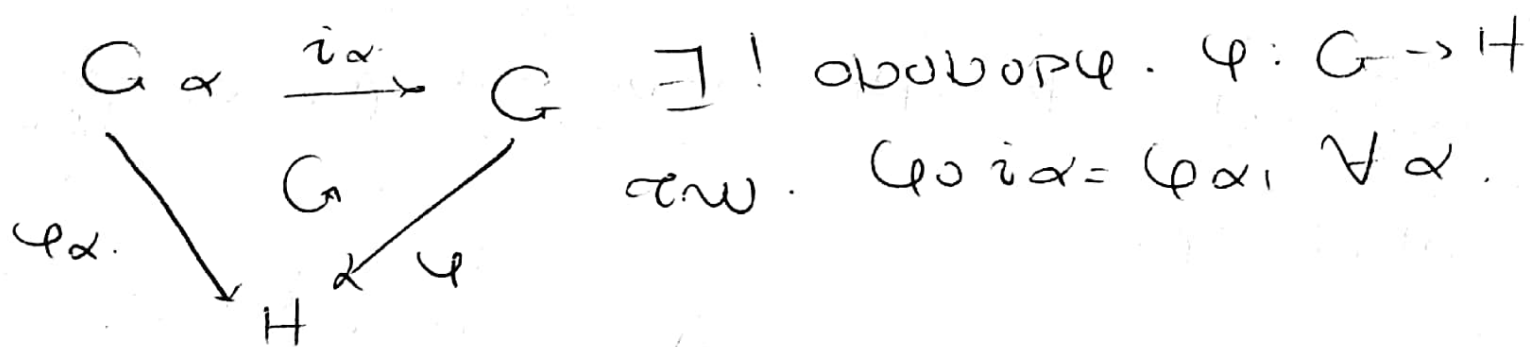
Έστω G αβελιανή ομάδα και μια οικογένεια G_α αβελιανών ομάδων και ομομορφ. $\iota_\alpha: G_\alpha \rightarrow G$

Τότε η G είναι ισομορφική με το ελεύθερο άθροισμα $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ αν η κανονική

πλοείται κανονικότητα η οικογένεια.

(Κ.Σ.) Για κάθε αβελιανή ομάδα H

και κειτε ομομορφια. $\varphi_\alpha: G_\alpha \rightarrow H$ (3)



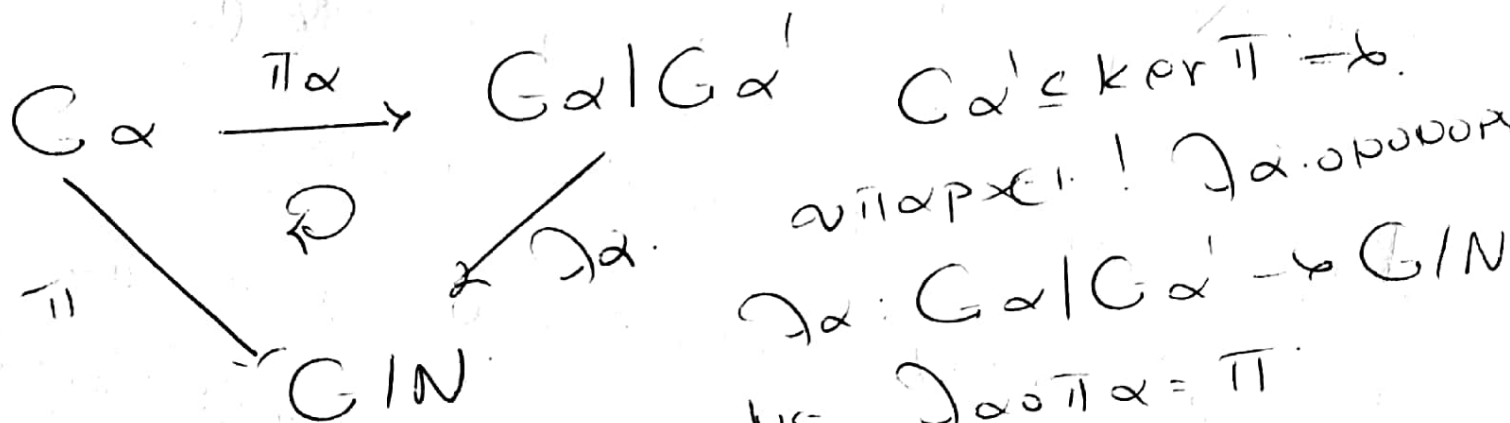
$\exists!$ ομομορφια. $\varphi: G \rightarrow H$
 αυτ. $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha, \forall \alpha$.

• Αν $G = \ast_\alpha G_\alpha$ και G' η π α ρ α .
 γινωσ. $\nu\pi\tau\omega\kappa$. $\mu\sigma$ G $\iota\tau\omega\tau\epsilon$.

$$G/G' \cong \bigoplus_\alpha G_\alpha/G_\alpha'$$

Απόδ: Έστω $G \rightarrow G/N$

και $\pi_\alpha: G_\alpha \rightarrow G_\alpha/G_\alpha'$ φυσικοι ομομορφ.



$G_\alpha' \in \ker \pi = \delta$.
 αυταρχει! J_α ομομορφ.

$J_\alpha: G_\alpha/G_\alpha' \rightarrow G/N$
 $\mu\sigma$ $J_\alpha \circ \pi_\alpha = \pi$

Θα δειξουμε οτι η "τριαδα"

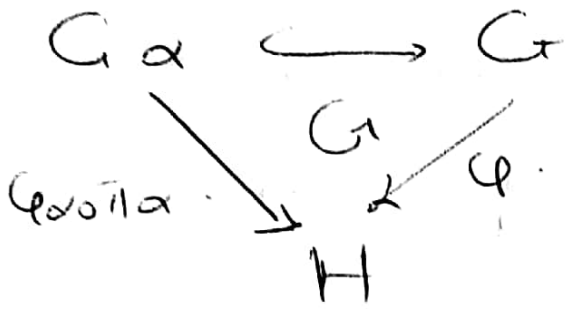
$(G/G', G_\alpha/G_\alpha', J_\alpha)$ ικανοποιει αυτ.

καθολικη συνθηκη του ευθεως

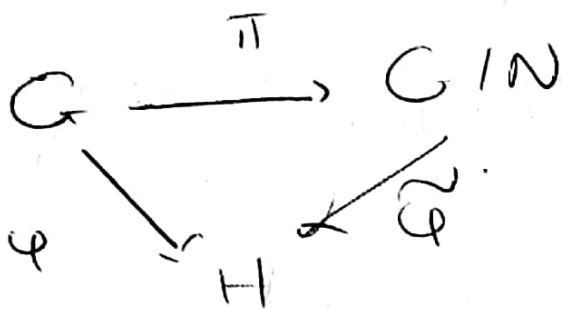
αδρ ομομορφιας. $\bigoplus_\alpha G_\alpha/G_\alpha', \alpha\pi\theta\alpha\pi\theta\alpha$

Είλεται ότι $C/N \cong \bigoplus_{\alpha} G_{\alpha} / G_{\alpha}' \quad (1)$

Έστω H αβελιανή και $\varphi_{\alpha}: G_{\alpha} \rightarrow G_{\alpha}'$
 ομομορφ.



Από (κ.σ.) του
 ελεγχό που γνωρίζω
 $\ast G_{\alpha}$ υπάρχει!
 $\varphi: G \rightarrow H$ ώστε
 το διόγραμμα να
 είναι μεταθ, $\forall \alpha \in A$.



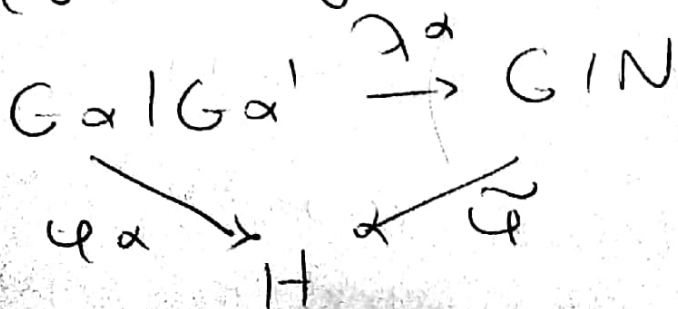
$G / \ker \varphi \cong \varphi(G) \leq H$
 $\alpha \beta \epsilon \omega$.

$\Rightarrow G' \leq \ker \varphi$.

Αρα από κ.τ. ομάδα π.μ.ω.

$\exists! \tilde{\varphi}: G/N \rightarrow H$ τ.ω $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

• Το διόγραμμα είναι μεταθετικό.



$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ \gamma_\alpha (g_\alpha G_{\alpha'}) &= \tilde{\varphi} \circ \gamma_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha) \\ &= \tilde{\varphi} \circ \pi_\alpha (g_\alpha) = \varphi (g_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha) \\ &= \varphi_\alpha (g_\alpha G_{\alpha'}). \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

Μοναδικότητα ως προς π pos. την κενό.
του διαζυγίου

Αν $\psi: G/G' \rightarrow H$ κω. $\gamma_\alpha \circ \alpha = \varphi_\alpha$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_\alpha G') &= \tilde{\varphi} \circ \pi_\alpha (g_\alpha) = \varphi_\alpha (g_\alpha) \\ &= \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha) = \psi \circ \gamma_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha) \\ &= \psi \circ \pi_\alpha (g_\alpha) = \psi (g_\alpha G') \quad \square \end{aligned}$$

Ευθείες ΡΕΣ ΟΚΑΔΕΣ :

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε την άπειρη ακολουθία x, x, x, \dots που παράγεται από x .

Διμή $\alpha \times \gamma$ πω παρ αχεται αλλο

το X $\left(\begin{array}{c} (x, n) \leftarrow m \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)$ $\left\{ \begin{array}{c} x \times \gamma \times \mathbb{Z} \xleftrightarrow{\text{---}} \mathbb{Z} \\ \text{---} \end{array} \right.$

εχει δομη ομάδας

η ελευθερία του X είναι η ορισμα.

$$F(X) = \{ \alpha \times \gamma : \alpha \in X \}$$

Αν η $F(X)$ είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα αντίστοιχα της άπειρης κυκλικής \cong ένα αντίστοιχο για κάθε $x \in X$.

Αν $X = \emptyset$ τότε ορίζουμε $F(X) = \{1\}$.

Το X είναι βαση της $F(X)$ (είναι βάση γεννητόρων της $F(X)$ και το $|X|$ τάξη της $F(X)$).

(* η βάση ελεύθερου γεννητόρων).

Παρατηρήσεις :

- 1) Αν $X \neq \emptyset$, τότε $F(X)$ δεν έχει στοιχεία πέρα της (εκτός από το τετραμυνο).

Εξωω αυτη την ιδιοτητα.

② $\mathcal{Z}(F(x)) = \{1\}$, αν $|x| > 2$

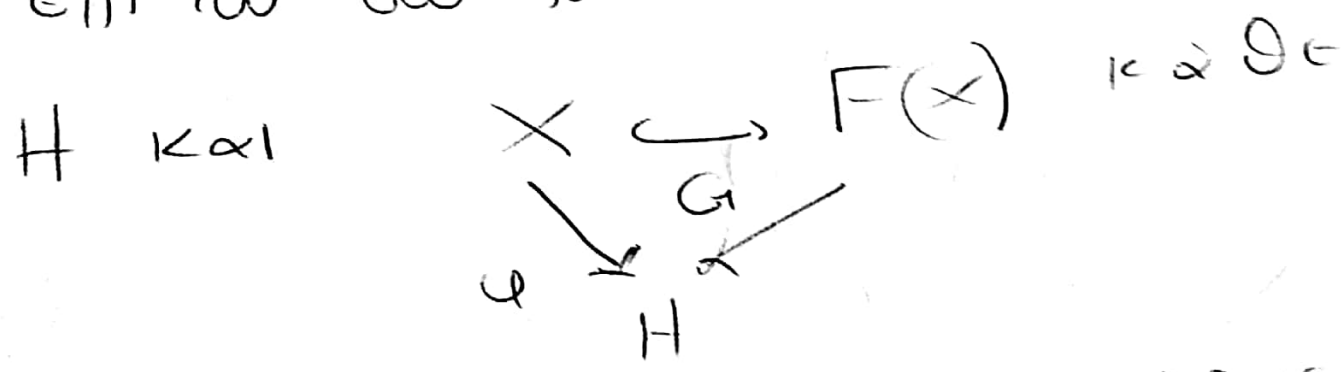
Αν $x = \frac{1}{y}$ (όπου $|x|=1$) \rightarrow

$\mathcal{Z}(F(\frac{1}{y})) = \mathcal{Z}(\frac{1}{y}) = \mathbb{Z}$

Θεωρημα (κ.σ.)

Εστω $F(x)$ ω ε) ευθερω ομοδα.

επι του ομοδα X . Για καθε ομοδα.



απεικονισμ $\varphi: X \rightarrow H$ υπαρχει.

μοναδικος ομοδα $\varphi: F(x) \rightarrow H$.

με $\tilde{\varphi}|_x = \varphi$.

αποδ: καθε απεικονισμ

$\varphi: X \rightarrow H$ επιδει.

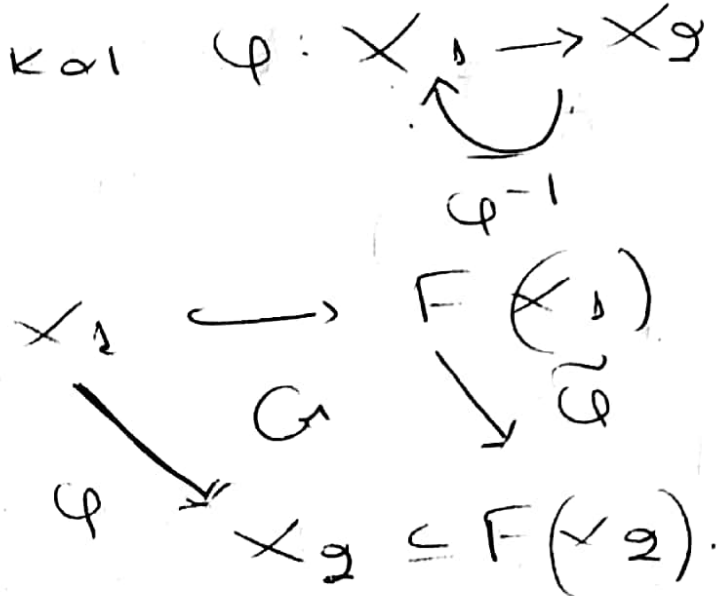
$\varphi_x: x \times y \rightarrow H$ και το ομοδα.

Επιλέγεται από την (κ.σ.) του ελεύθερου
 ομοειδίου γυνομένου. □

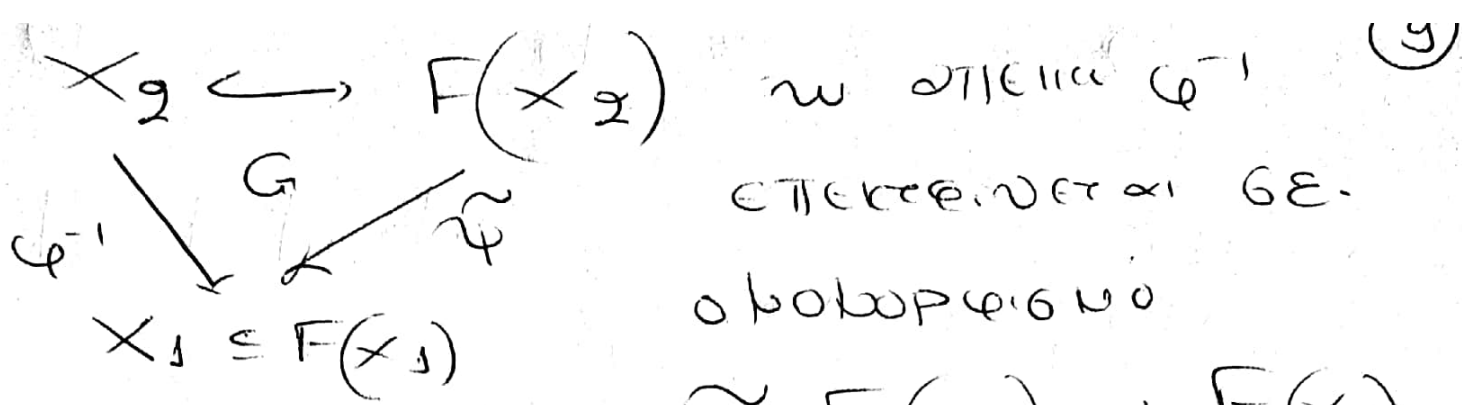
Πρόταση: $F(X_1) \cong F(X_2)$ αν και

$|X_1| = |X_2|$. Ή διατετακώς, αν τα
 σύνολα είναι ελεύθερα ομοειδή δέν
 εξαρτάται από την βάση που θα
 επιλεγεί.

Απόδ. Λοιπόν $|X_1| = |X_2|$
 και $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$



Από την κ.σ. του ελεύθερου
 ομοειδίου υπάρχει φ όπως στο σχήμα.
 και με $\varphi|_{X_1} = \varphi$.
 Ομοίως, από κ.σ. του ελεύθερου
 ομοειδίου ω απεικονισμός φ^{-1} .



στη συνέχεια φ^{-1}
 επιτελείται να βε.
 ομομορφισμο

$$\tilde{\varphi}: F(X_2) \rightarrow F(X_1)$$

Για κάθε δε. $x_2 \in X_2$ έχουμε

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}(x_2) = \tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(x_2)) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x_2) = x_2 \in X_1$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi} = \text{id}_{F(X_2)}$$

Ομοίως, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi} = \text{id}_{F(X_1)}$: δηλ.

$\tilde{\varphi}: F(X_1) \rightarrow F(X_2)$ ομομορφισμός
 με αντίστροφη $\tilde{\varphi}$.

$$F(X_1) \cong F(X_2)$$

Αντίστροφα,

τοτε $F(X_1)_{\alpha\beta} \cong F(X_2)_{\alpha\beta}$ δηλ.

$$F(X_1) / F'(X_1) \cong F(X_2) / F'(X_2)$$

Απο πρώτο αβελωδω.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} * \\ \cong \\ X \in X_1 \end{array} \right)_{\alpha\beta} \cong \left(\begin{array}{c} * \\ \cong \\ X \in X_2 \end{array} \right)$$

$\rightarrow \oplus_{x_1} \cong \oplus_{x_2} \quad (10)$

$\rightarrow \oplus_{x_1} \cong \oplus_{x_2} \Rightarrow |X_1| = |X_2|$
 ελευθερών ελευθερών
 αβελ. επί x_1 αβελ. επί x_2

Πρόταση: Έστω $X \subseteq G$, G ομάδα

ε.α.ε.ι.

① G ελευθερών με βάση X .

② Κάθε στοιχείο w τέτρ. γράσσεται κατά μοναδικό τρόπο ως:

$y = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}, \quad n \geq 0, \quad x_{i_j} \in X$

$\epsilon_j \in \mathbb{Z}, \quad \epsilon_j \neq 0 \text{ και } x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}, \quad \forall j$

③ G παράγεται από το X και το 1 δεν μπορεί να εκφραστεί

όπως $*$.

Απόδ.: Προκύπτει άμεσα από αντίστοιχ

την πρόταση για ελευθερά γινόμενα. □