

# ΥΠΟΘΕΣΗ. I :

Πόρισμα: Κάθε πεπεραμένη παραχόμενη αβελιανή ομάδα είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης αβελιανής πεπεραμένης διάστασης.

απόδ: Έστω  $\{g_1, \dots, g_k\}$  σύνολο

γεννητόρων της  $G$ .

$\forall i=1, \dots, k$  θεωρούμε άπειρη κυκλική και  $\mathbb{Z} = \langle x_i \rangle$  και την ελεύθερη αβελιανή  $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^k$

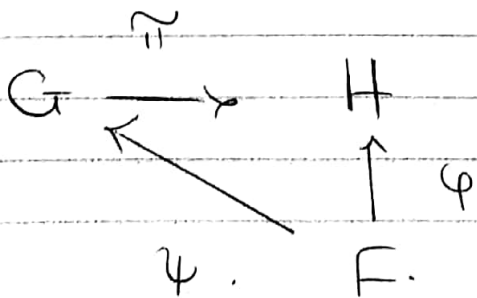
Από την καθολική ιδιότητα ελεύθερης αβελιανής  $\omega: x_i \mapsto g_i$  επέκτείνεται σε  $\varphi: \mathbb{F} \rightarrow G$  επιμορφ.

□

Θεώρημα: Έστω  $\pi: G \rightarrow H$  επιμορφ. αβελιανών ομάδων.

Αν  $\varphi: F \rightarrow H$  ομομορφ.,  $F$  ελεύθερη αβελιανή

$\Rightarrow \exists \psi: F \rightarrow G$  τέω.  $\varphi = \pi \circ \psi$ .

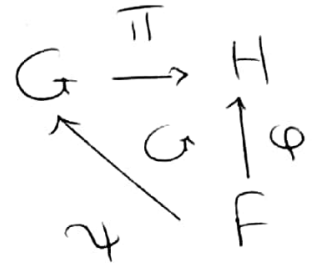


απόδ.  $\{x_i\}_{i \in I}$  βάζω  $\pi \in \pi_i$   
 $\Rightarrow \exists \varphi(x_i) \in H \Rightarrow \forall i \in I: \exists g_i$

$\varphi(x_i) = \pi(g_i)$ . Ορίζουμε.

$\psi: \{x_i\}_i \rightarrow G, x_i \mapsto g_i$

καθαίμεν  $\Rightarrow \exists \psi: F \rightarrow G$  τ.ω.



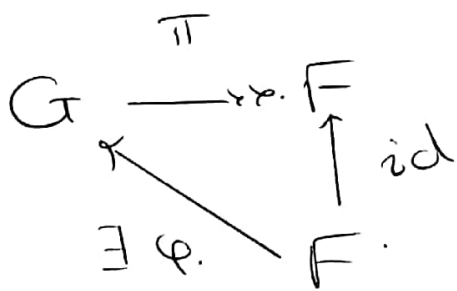
ιδιότητα ελεύθερων αβελιανών

Λήμμα: Έστω  $\bullet$   $F$  ελεύθερη αβελιανή  $\square$

$\bullet$   $G$  αβελιανή  $\bullet$   $\pi: G \rightarrow F$  επιμορφή.

$\Rightarrow G = \ker \pi \oplus H, H \cong F$ .

απόδ.



από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει

ομομορφία  $\varphi: F \rightarrow G$

τ.ω.  $\pi \circ \varphi = id$ .

$\Rightarrow \varphi$  1-1  $\Rightarrow F \hookrightarrow G$  και  $H = \text{im } \varphi \cong F$ .

∴  $G = \ker \pi \oplus H$ .

(i)  $\ker \pi \cap H = \{0\}$ . (ii)  $G = \ker \pi + H$ . (3)

$\hookrightarrow \alpha \in \ker \pi$ .

• Έστω  $g \in G = \alpha \pi(\varphi(\pi(y))) = \pi(y)$   
 $\Rightarrow \pi(\varphi(\pi(y)) - y) = 0 \Rightarrow \alpha$   
 $g - \varphi(\pi(y)) \in \ker \pi \Rightarrow g \in \ker \pi + H$ .

□

Θεώρημα: Έστω  $F$  ελεύθερη  
αβελ. διάσταση  $n$ .

• Αν  $0 \neq H \leq F = \alpha H$  ελεύθερη  
αβελ. με  $\text{rank}(H) \leq n$ .

Αποδ. με επαγωγή επί το  $n$ .

Βάση:  $n=1 = \alpha F \cong \mathbb{Z}$ . άπειρη  
κυκλική

$= \alpha$  κάθε υπομ.  $\neq \{0\}$  είναι

άπειρη κυκλική  $= \alpha H \cong \mathbb{Z}$ .

Επαγωγικό βήμα.

Έστω  $n \geq 1 = \alpha F = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-1} \oplus \mathbb{Z}$

$n-1$

"

$K$  ελεύθερη  
αβελιανή

$\Rightarrow H$  ελευθερώ αβελιανή  
 $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(K) = n-1 \leq n$   
 $\parallel$   
 $\text{rank}(F)$

• Αν  $H \neq K$ .

Θα δώσουμε τον φυσικό επιμορφισμό

$\pi: F \rightarrow \mathbb{Z}, \ker \pi = K$ .

Αφού  $H \neq K \Rightarrow \pi(H) \neq \{0\}$  και

$\pi(H) \leq \mathbb{Z} \Rightarrow \pi(H) = \mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow \pi|_H: H \rightarrow \mathbb{Z}$  επιμορφισμός

Απόδειξη  
 $\Rightarrow H = \ker(\pi|_H) \oplus \mathbb{Z}$

•  $\ker(\pi|_H) = H \cap K \leq K$ . από ε.ν.

$\hookrightarrow$  ελευθερώ αβελιανή.

$\text{rank}[\ker(\pi|_H)] = m \leq n-1$ .

$\Rightarrow H = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m \oplus \mathbb{Z}$

•  $H$  ελευθερώ αβελιανή με

$\text{rank}(H) = m+1 \leq n$ .

⑤

Πόρισμα :

Αν μια  $G$  παράχεται από  $w$  το  $\#$  στοιχεία  $\Rightarrow$  κάθε υποομάδα  $S$  της, μπορεί να παράχεται από το πολύ  $w$ -το πλήθος στοιχεία. απός.  $G = \langle \alpha, g_1, \dots, g_w \rangle$ .

$\Rightarrow \exists F$  ελεύθερη αβελ  $\tau. \omega$ .

$F \twoheadrightarrow G$  επιμορφή.  $\Rightarrow G \cong F/K$ .

αν  $H \cong G \Rightarrow$  (θεωρ. αυτ.)  $\exists \mathcal{U} \cong F, \mathcal{U} \supseteq K: H \cong \mathcal{U}/K$ .

$\mathcal{U} \cong F, F$  ελεύθερη αβελ  $\Rightarrow$

$\mathcal{U}$  ελεύθερη αβελ,  $\text{rank } \mathcal{U} \leq w$

$\Rightarrow \mathcal{U}/K$ . πεπερ. παράσ.  $= \{n_1, \dots, n_r\}$ .

$n \neq r \Rightarrow$  Η πεπερ. παράσ. από  $r \leq w$  στοιχεία.

Α6κ  $G = \mathbb{Z}^n$ . Δείξτε ότι  $\omega$   $\textcircled{5}$ .  
 $G$  δεν μπορεί να παρὰχθεί από  
 λιγότερα από  $n$  στοιχεία.

απόδ:  $\lambda$ s υποθέσουμε ότι  $G$   
 παρὰχεται από  $m$  στοιχεία.

$\Rightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\pi} G = \mathbb{Z}^n$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^m = \ker \pi \oplus \mathbb{Z}^n$

όπου  $\ker \pi = \begin{cases} \{0\} \\ \omega \\ \text{ελεύθερη αβελιανή} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_n$

$\Rightarrow m \geq n$ .

□

Α6κ: Έστω  $F$  ελεύθερη αβελιανή  
 πεπερ. τάξης και  $H \leq F$ . Τότε

$F/H$  πεπερ.  $\iff \text{rank}(H) = \text{rank}(F)$ .

απόδ:  $|F/H| = k \Rightarrow k g \in H, \forall g \in G$ .

Ορίζουμε:  $F \rightarrow H, g \mapsto kg$ .

$\Rightarrow F \rightarrow H$  ( $H$  torsion free).

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\textcircled{6} \quad \text{rank}(H) \leq \text{rank}(F)$$

( $\Leftarrow$ ) Έστω  $\{x_1, \dots, x_n\}$  βάζω. αυτ.

$$F = \alpha x_1 \gamma \oplus \dots \oplus \alpha x_n \gamma.$$

• Αν  $H \cap \alpha x_i \gamma = \{0\}$ , για κάποιους

$$\text{rank} \quad \pi: F \rightarrow F/\alpha x_i \gamma \quad \text{πρόβουλι}$$

$$\text{rank} \quad \pi|_H: H \rightarrow F/\alpha x_i \gamma \quad 1-1.$$

$$\text{rank} \quad H \hookrightarrow F/\alpha x_i \gamma \quad \text{ελευθερο διαστ.}$$

$$\text{rank} \quad \text{rank}(H) \leq n-1 \quad \text{ΑΤΟΤΟ}$$

$$\text{rank} \quad H \cap \alpha x_i \gamma \neq \{0\}, \quad \forall i=1, \dots, n.$$

$$\text{rank} \quad H \cap \alpha x_i \gamma = \alpha k_i x_i \gamma, \quad k_i \neq 0.$$

$$F \ni g = \sum w_i x_i, \quad k = k_1, \dots, k_n.$$

$$\text{rank} \quad kg = \sum n_i k_i x_i = \sum n_i (\dots) k_i x_i \in H$$

Άρα  $\forall g \in F$  έχει πεπερα.

$\varphi_w$  στο  $F/H$ .

=  $\varphi$ .  $F/H$  πεπερα. παραδοξου αβελ.

όπου κάθε στοιχείο έχει πεπερα.

τα  $\varphi_w$ .

=  $\varphi F/H$  πεπερα.