Ανάλυση Ι
4 Φεβρουαρίου 2022

1. Έστω $(X,\mathcal{F},\mu)$ χώρος μέτρου.

   (α′) Έστω $f\in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda>0$ έχουμε ότι $\mu\left([|f|\geq\lambda]\right)\leq\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$.

   (β′) Έστω $f_n\to f$ στον $L^1(\mu)$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_n$ της $(f_n)_n$ τέτοια ώστε $f_{k_n}\to f$ μ - σ.π.

   (γ′) Υποθέστε ότι $\mu(X)<\infty$. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση και $(f_n)_n$ ακολουθία από μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n\to f$ μ - σ.π. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $E\in\mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\mu(E)<\varepsilon$ και $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο E^c.

   (δ′) Έστω $f\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ Lebesgue μετρήσιμη και $\varepsilon>0$. Να δείξετε ότι υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο A του $[0,1]$ τέτοιο ώστε $\mu\left(A^c\right)<\varepsilon$ και $f|_A$ συνεχής.

2. Έστω $(X,\mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και ν,μ πεπερασμένα θετικά μέτρα με $\nu<<\mu$.

   (α′) Υποθέστε ότι $\nu(X)>0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\varepsilon>0$ και $E\in\mathcal{F}$ με $\mu(E)>0$ τέτοια ώστε $\nu(A)\geq\varepsilon\mu(A)$, για κάθε $A\in\mathcal{F}_E$.

   (β′) Υποθέστε ότι $\nu(X)>0$. Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $h\geq 0$ τέτοια ώστε $\int_B h\mathrm{d}\mu\leq\nu(B)$, για κάθε $B\in\mathcal{F}$ και $\int h\mathrm{d}\mu>0$.

   (γ′) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $h\geq 0$ τέτοια ώστε $\int_B h\mathrm{d}\mu=\nu(B)$, για κάθε $B\in\mathcal{F}$.

   (δ′) Έστω σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ και $f\in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $\int_A g\mathrm{d}\mu=\int_A f\mathrm{d}\mu$, για κάθε $A\in\mathcal{A}$.

3. Έστω $(X,\mathcal{F},\mu)$ χώρος μέτρου.

   (α′) Έστω $f_n\geq 0$ μετρήσιμη για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\int\liminf f_n\mathrm{d}\mu\leq\liminf\int f_n\mathrm{d}\mu$.

   (β′) Έστω $(f_n)_n,(g_n)_n$ ακολουθίες στον $L^1_{\mathbb{R}}(\mu), g\in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και f μετρήσιμη τέτοιες ώστε $|f_n|\leq g_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $f_n\to f$ μ-σ.π., $g_n\to g$ μ-σ.π. και $\int g_n\mathrm{d}\mu\to\int g\mathrm{d}\mu$. Δείξτε ότι $f\in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $\int f_n\mathrm{d}\mu\to\int f\mathrm{d}\mu$.

   (γ′) Έστω $(f_n)_n$ ακολουθία στον $L^1(\mu), f\in L^1(\mu)$ τέτοιες ώστε $f_n\to f$ μ-σ.π. Δείξτε ότι $\int|f_n-f|\mathrm{d}\mu\to 0$ αν και μόνο αν $\int|f_n|\mathrm{d}\mu\to\int|f|\mathrm{d}\mu$