

Άλγεβρα II
Εξετάσεις Ιουνίου 2023

1. Αν ένας δακτύλιος R είναι ημιαπλός, δείξτε ότι ο δακτύλιος $M_2(R)$ των 2×2 πινάκων με εγγραφές από το R είναι επίσης ημιαπλός.
2. Έστω R ημιαπλός δακτύλιος και $x, y \in R$ ώστε $xy = 1$. Δείξτε ότι $yx = 1$.
3. Αν R, S δακτύλιοι, δείξτε ότι $\text{rad}(R \times S) = \text{rad}(R) \times \text{rad}(S)$.
4. Υπολογίστε το ριζικό του Jacobson του δακτυλίου $T_2(\mathbb{Z})$ με στοιχεία τους άνω τριγωνικούς πίνακες 2×2 με στοιχεία από το \mathbb{Z} .
5. Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n , για τους οποίους ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ είναι von - Neumann κανονικός.
6. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και V ένα $\mathbb{C}G$ - πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$. Δείξτε ότι το άθροισμα $\sum_{g \in G} \chi_V(g)$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.
7. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και θεωρούμε το κανονικό $\mathbb{C}G$ - πρότυπο $\mathbb{C}G$ (δηλαδή το πρότυπο που προκύπτει από την κανονική αριστερή αναπαράσταση). Επίσης, θεωρούμε το \mathbb{C}^2 ως $\mathbb{C}G$ - πρότυπο με την G να δρα τετριμμένα στο \mathbb{C}^2 . Δείξτε ότι δεν υπάρχει 1-1 $\mathbb{C}G$ - γραμμική απεικόνιση $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}G$.
8. Έστω R ένας αριστερά primitive δακτύλιος και $x, y \in R$ με $xy = 0$, όπου ένα εκ των δύο ανήκει στο κέντρο του R . Δείξτε ότι $x = 0$ ή $y = 0$.

Κάθε ερώτημα ισοδυναμεί με 1,5 μονάδες. Καλή Επιτυχία !