Μάθημα 6ο Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 10/3/2020

H. Brezis: Συναρτησιακή Ανάλυση, ΕΜΠ εκδόσεις

$u = u(x)$ $-(pu')' - qu = f \quad , \alpha < x < \beta$
$p \in C^1_0 , p > 0$ $u(\alpha) = 0 \quad , u(\beta) = 0$ $\Big\} (*)$
$q \in C \quad q \geq 0$ πρόβλημα συνοριακών συνθηκών 2 σημείων
$f \in C$

Ορισμός: Κλασσική "λύση" $u \in C^2[\alpha, \beta]$ η οποία πληροί την ΔΕ στο $[\alpha, \beta]$ και να ικανοποιεί τις συνθήκες.

Έστω $\varphi \in C'(\alpha, \beta)$ (συναρτήσεις δοκιμής)
$\varphi(\alpha) = 0, \varphi(\beta)$

$$-\int_\alpha^\beta (pu')'\varphi + \int_\alpha^\beta q\varphi u = \int_\alpha^\beta f\varphi$$ ολοκληρώνω κατά παράγοντες

$$\Rightarrow -\underbrace{\left[pu'\varphi\right]_{x=\alpha}^{x=\beta}}_{\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0} + \int_\alpha^\beta pu'\varphi' + \int_\alpha^\beta q\varphi u = \int_\alpha^\beta f\varphi$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta pu'\varphi' + \int_\alpha^\beta qu\varphi = \int_\alpha^\beta f\varphi \quad \forall \text{ τέτοιο } \varphi$$

$$\int_\alpha^\beta (pu'\varphi' + qu\varphi) = \int_\alpha^\beta f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1, \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

"ασθενής" ή "γενικευμένη" μορφή του (*)

όμως σε αυτή τη μορφή μπορούμε να την δούμε ως εξής
$B(u, \varphi) = (f, \varphi)$ όπου B διγραμμική μορφή

Αν πω ότι $u \in V = \{u \in C'(\alpha,\beta) : u(\alpha) = u(\beta) = 0\}$ όμως $V, (f,g) = \int_\alpha^\beta fg$ δεν είναι πλήρης

άρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το θεώρημα Lax-Milgram για να δείξω ύπαρξη και μοναδικότητα της u.

Η αριθμητική λύση θα ήταν να βρω $u_h \in S_h$:

$B(u_h,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in S_h \subset H$

Το καλό είναι ότι ο χώρος μας θα μας δώσει βάσεις με φορέα σε όλο το διάστημα

• Μέτρο Lebesgue : Σημειώσεις Γιαννόπουλου
• Real Analysis : Royden

$(\alpha,\beta) = I$

$L^2(I) = \{ f : \int_I f^2 < \infty \quad f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R} \}$ (ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue)

$\|f\| = (\int_I f^2 dx)^{1/2} \qquad (f,g) = \int_I fg$

Τα στοιχεία του L^2 είναι κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων

$f \sim g \iff f(x) = g(x)$ για x σχεδόν παντού στο I

$f=0$ στον $L^2 \iff f(x) = 0 \ \forall x$ έξω από ένα υποσύνολο του I με μέτρο $=0$

Δεν έχει νόημα αν $f\in L^2$ να πω τι τιμή έχει σε ένα σημείο

$I = (\alpha,\beta)$

$C(I)$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο I

$C(\bar{I})$ συνεχείς στο $\bar{I} = [\alpha,\beta]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x} \in C(0,1)$, $\notin C([0,1])$

πλήρης χώρος ως προς την $\sup_{x\in\bar{I}}|f(x)|$

$C^k(I) = \{ f, f', \dots, f^{(k)} \in C(I) \ 0\le i\le k \}$

$C^k(\bar{I}) = \{ f, f', \dots, f^{(k)} \in C(\bar{I}) \}$

$C_c(I) = \{ f\in C(I)$, φορέας της f είναι συμπαγές υποσύνολο του $I \}$

compact συμπαγές

φορέας f = $\operatorname{supp} f = \overline{\{ x\in(\alpha,\beta) : f(x)\neq 0 \}}$

$C_c^k(I) = \{ f\in C^k(I)$, έχουν συμπαγή φορέα στο $I\}$

$C_c^\infty(I) = C_0^\infty(I) = \bigcap_{k=0} C_c^k(I)$

Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ

10/3/2020

$f \in L^2(I)$: $\int_I f^2 < \infty$

$f \in L^p(I)$: $\int_I |f|^p < \infty$ $\quad 1 \le p < \infty$ (Όχι χώροι Hilbert για $p \ne 2$)

Θεωρήματα πυκνότητας και προσέγγισης

$L^2(I)$, $\|f\| = \left(\int_I f^2\right)^{1/2}$, $(f,g) = \int_I fg$

Θεώρημα 1: $C(\bar{I})$ είναι πυκνό στον $L^2(I)$. $\forall f \in L^2(I)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in C(\bar{I})$: $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$

Θεώρημα 2: $C_c(I)$ είναι πυκνό στον $L^2(I)$, δηλαδή $\forall f \in L^2$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi\ C_c(I)$ $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$

Θεώρημα 3: $\int_I f \varphi = 0$ $\quad f$ τοπικά ολοκληρώσιμη στο I, $f \in L^1_{loc}(I)$, $\int_K |f| < \infty$ $\forall K \subset I$ συμπαγή