Μάθημα 5ο    Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε    9/3/2020

**Θεώρημα: (Lax-Milgram)**

$B(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή, $H$ χώρος Hilbert.

$\exists\, C_1 \geq 0$ (i) $|B(v,w)| \leq C_1 \|v\|\|w\| \quad \forall\, v,w \in H$

$\exists\, C_2 > 0$ (ii) $B(v,v) \geq C_2 \|v\|^2 \quad \forall\, v \in H$.

Έστω $F: H \to \mathbb{R}$ γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό, τότε $\exists!\, u \in H: B(u,v) = F(v)\ \forall v \in H$

Μάλιστα $\|u\| \leq \frac{1}{C_2}\|F\|$

**Συνέχεια Απόδειξης:**

Έχουμε αποδείξει $B(\varphi,v) = (v, A\varphi) \quad \forall v \in H \quad \forall \varphi \in H$ (*)

$A: H \to H$ γραμμικός φραγμένος τελεστής.

και ότι $\mathrm{Ran}\, A = \{w \in H : w = Av$ για κάποιο $v \in H\}$ κλειστός υπόχωρος του $H$.

Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ran}\, A = H$

Έστω $\mathrm{Ran}\, A \subsetneq H$ τότε $\exists\, h \in H: h \notin \mathrm{Ran}\, A$

Γνωρίζω ότι $h = g + z$, $g$ η προβολή του $h$ επί του $\mathrm{Ran}A$ και $z \neq 0$.

$(h-g,\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{Ran}\,A \quad \exists\, z \neq 0 \in H$ τ.ω $(z,\varphi) = 0\ \forall \varphi \in \mathrm{Ran}\,A$

$(\varphi \in \mathrm{Ran}\,A \iff \varphi \in A\psi,\ \psi \in H)$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq z \in H$ τ.ω $(z, A\psi) = 0 \quad \forall \psi \in H$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} B(\psi, z) = 0 \quad \forall \psi \in H$    Παίρνω $\psi = z \Rightarrow B(z,z) = 0 \Rightarrow z = 0$ Άτοπο

Υπαρξη $u \in H$.

$B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H$ δεδομένου $F\ \exists!\, f \in H$

από Riesz $F(v) = (v,f) \underset{\exists u \in H}{=} (v, Au) = B(u,v)$

συμπέρασμα: $\exists\, u \in H$: $B(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H$

**Θεώρημα: (Galerkin)**

Έστω $\exists!\, u \in H$ $B(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H$ πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram. Έστω $S_h$ υπόχωρος του $H$ $\dim S_h < \infty$ τότε το πρόβλημα $B(u_h,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in S_h$ (*) (Εξισώσεις Galerkin) έχει μοναδική λύση $u_h \in S_h$ και $\|u - u_h\| \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{\varphi \in S_h} \|u - \varphi\|$ (σφάλμα)

($u_h$: προσέγγιση Galerkin του $u$ στο $S_h$)

**Απόδειξη:**

Το (*) έχει μοναδική λύση λόγω του ότι το θεώρημα Lax-Milgram ισχύει για $S_h \subseteq \mathcal{H}$ χώρος Hilbert.

$$u \in \mathcal{H} : B(u,v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \longrightarrow B(u,\varphi) = F(\varphi) \ \forall \varphi \in S_h$$
$$u_h \in S_h : B(u_h, \varphi) = F(\varphi) \ \forall \varphi \in S_h$$

αφαιρώ κατά μέλη

$$B(u_h - \varphi) - B(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in S_h \Longrightarrow$$
$$B(u - u_h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in S_h$$

"Ορθογωνιότητα" στον $S_h$ του σφάλματος $u-u_h$ ως προς $B(\cdot,\cdot)$

$$c_2 \|u - u_h\|^2 \leq B(u-u_h, u-u_h) = B(u-u_h, u) - \underbrace{B(u-u_h, u_h)}_{0}$$
$$= B(u-u_h, u) = B(u-u_h, u-\varphi) \quad \forall \varphi \in S_h$$
$$\leq C_1 \|u-u_h\| \cdot \|u-\varphi\| \quad \forall \varphi \in S_h$$
$$\Longrightarrow C_2 \|u-u_h\| \leq C_1 \|u-\varphi\| \quad \forall \varphi \in S_h \Longrightarrow \|u-u_h\| \leq \frac{C_1}{C_2} \|u-\varphi\| \quad \forall \varphi \in S_h$$
$$\Longrightarrow \|u-u_h\| \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{\varphi \in S_h} \|u-\varphi\| \quad \blacksquare$$

$B(u_h, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in S_h$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ βάση του $S_h$, $\dim S_h = N$

ψάχνω $C_i$, $1 \leq i \leq n$ $\quad u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$

$$B(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq N$$
$$B\left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \varphi_i\right) = F(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

$$A \in \mathbb{R}^{N \times N} \qquad A_{ij} := B(\varphi_j, \varphi_i) \qquad 1 \leq i,j \leq N$$

$$\underset{N\times N}{A} \ \underset{N\times 1}{c} = \underset{N \times 1}{f} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) \\ \vdots \\ F(\varphi_N) \end{bmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^N$

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^N x_i A_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^N x_i B(\varphi_j, \varphi_i) x_j = \sum_{i,j=1}^N x_j B(\varphi_j, \varphi_i) x_i$$
$$= B\left(\sum_{j=1}^N x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i\right) = B(\chi, \chi) \quad \text{όπου } \chi = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i \in S_h$$
$$\geq C_2 \|\chi\|^2$$

# Ε4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ

9/3/2020

A είναι πραγματικός, θετικά ορισμένος, όχι αναγκαστικά συμμετρικός.

$B(f,g) = B(g,f)$ πληροί τις υποθέσεις του Lax-Milgram
τότε ορίζω $J: H \to \mathbb{R}$ $\quad J(v) := \frac{1}{2} B(v,v) - F(v) \quad v \in H$.

**Θεώρημα: (Rayleigh-Ritz)**
Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης: "Να βρεθεί $u \in H$: $J(u) = \min_{v \in H} J(v)$"
έχει μοναδική λύση, που είναι η λύση $u$ που εξασφαλίζει το θεώρημα Lax-Milgram: $B(u,v) = F(v)$ $\forall v \in H$.

**Απόδειξη:**

Έστω το $u \in H$: $B(u,v) = F(v)$ $\forall v \in H$

$w \in H$: $$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2} B(u+w, u+w) - F(u+w) \\ &= \frac{1}{2}\left( B(u,u) + B(u,w) + B(w,u) + B(w,w) \right) - F(u) - F(w) \\ &= \frac{1}{2} B(u,u) - F(u) + B(u,w) - F(w) + \frac{1}{2} B(w,w) \\ &= J(u) + \frac{1}{2} B(w,w) \end{aligned}$$

$\forall w \in H \quad J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2} B(w,w) \geq 0$

$J(u+w) \geq J(u)$ $\qquad u \in H$, για $w = v-u \Rightarrow J(v) \geq J(u)$ $\forall v \in H$
άρα $u$ είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης.
$J(u+w) = J(u) \Leftrightarrow w = 0$
αν $w \neq 0$ $J(u+w) > J(u)$ άρα το $u$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

**Πόρισμα: (Rayleigh-Ritz-Galerkin)**
Η λύση του $S_h$ των εξισώσεων Galerkin για συμμετρικό $B(\cdot,\cdot)$:
$B(u_h, \varphi) = F(\varphi)$ $\forall \varphi \in S_h$, είναι μοναδική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης:

$$J(u_h) = \min_{\varphi \in S_h} J(\varphi)$$