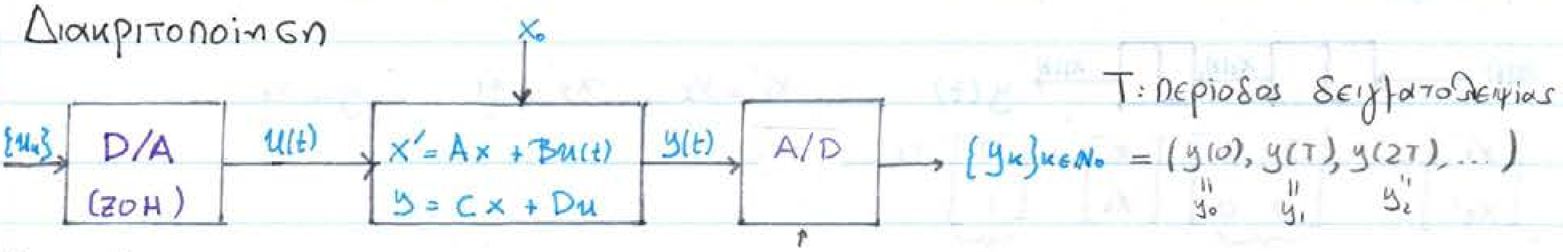
Μάθημα 11ο Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 19/11/2019

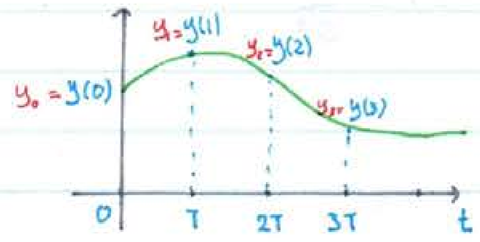
Διακριτοποίηση

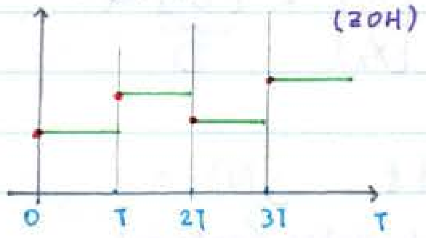


T: περίοδος δειγματοληψίας

Μετατροπέας από ψηφιακό σε αναλογικό σήμα

Μετατροπέας από αναλογικό σε ψηφιακό.





A/D : analogue / digital

$y_k = y(kT) \qquad k \in \mathbb{N}_0$

D/A : digital / analogue

$u(t) = u_k \qquad kT \le t < (k+1)T \qquad k \in \mathbb{N}_0$

Η απόκριση του συστήματος (σ.χ)

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau \qquad t \ge 0$$

$$x_k := x(kT) = e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau \qquad (*)$$

$$x_{k+1} = x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau \qquad (**)$$

πολλαπλασιάζω την $(*)$ με e^{AT}

$$e^{AT}x_k = e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT+T-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau, \quad \text{και αφαιρώ από την } (**)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - e^{AT}x_k = \left(\int_k^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)}B\,d\tau\right)u_k$$

Θέτω

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= kT + T - \tau \Rightarrow d\vartheta = -d\tau \\ \tau &= kT \Rightarrow \vartheta = T \\ \tau &= kT + T \Rightarrow \vartheta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{k+1} = \underbrace{e^{AT}}_{F}x_k + \underbrace{\left(\int_0^T e^{\vartheta A}\,d\vartheta\right)B}_{G}u_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

$\Rightarrow \Sigma_d(F, G, C, D)$

Παράδειγμα: "διπλός ολοκληρωτής"

$x_1' = x_2 \,, \quad x_2' = u \,, \quad y = x_1$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \;\; 0]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u \qquad \hat{G}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = \int_0^t u(t)\, dt \qquad y(0) = 0$$

$\downarrow \mathcal{L}$ (μετασχηματισμός Laplace)

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s} \hat{u}(s)$$

Το ισοδύναμο διακριτό σύστημα (με περίοδο T)

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k \,, \quad y_k = C x_k$$

$$F = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots + \frac{A^k T^k}{k!} + \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = 0 \quad \forall k \geq 2$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} \int_0^T \lambda\, d\lambda \\ \int_0^T d\lambda \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}}^{G}$$

Η (διακριτή) συνάρτηση μεταφοράς

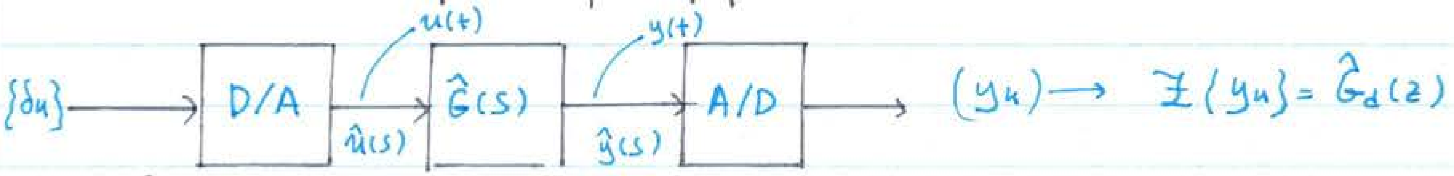
$$\hat{G}_d(z) = C(zI_2 - F)^{-1} G = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} =$$

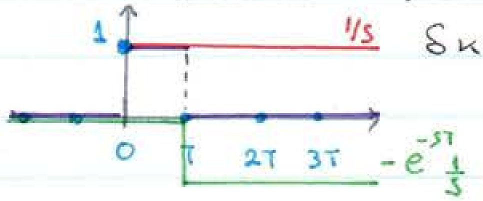
$$= [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \dots = \frac{T^2(z+1)}{(z-1)^2} = \hat{G}_d(z)$$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

19/11/2019

Έστω $\hat{G}(s)$ συνάρτηση μεταφοράς (1ας εισόδου, 1ας εξόδου)





$\delta_k = (1, 0, 0, \dots)$

$\Rightarrow \quad \hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$

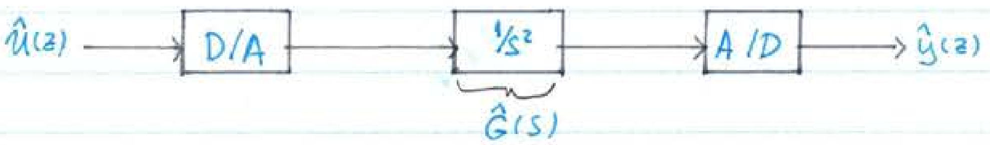
Άρα $\hat{y}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{s} - e^{-sT}\frac{\hat{G}(s)}{s} \Longrightarrow y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)}_{w(t)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-sT}\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)}_{w(t-T)}$

Έστω $S_T\, y(t)$ ο τελεστής δειγματοληψίας (με περίοδο T)

$S_T\, y(t) = S_T\, w(t) - S_T\, w(t-T)$

$y_k = w_k - w_{k-1}$

$\hat{G}_d(z) = \mathcal{Z}(y_k) = \mathcal{Z}(w_k) - \mathcal{Z}(w_{k-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{w_k\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{S_T\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)\right)\right\}$



$\hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{S_T\left(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)}_{\frac{1}{2}t^2}\right)\right\} = \frac{z-1}{2z}\,\mathcal{Z}\{k^2T^2\} = \frac{T^2}{2}\,\frac{z-1}{z}\,\overbrace{\mathcal{Z}(k^2)}^{\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}}$

$\hat{G}(z) = \frac{T^2}{2}\,\frac{z-1}{z}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$