Μάθημα 5º   Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα   23/10/2019

$y_{k+1} = f(y_k)$

$\alpha = f(\alpha)$

$|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ ασ. ευσταθές

$\quad\quad\quad > 1 \Rightarrow \alpha$ ασταθές

$f'(\alpha) = 1 \qquad f'(\alpha) = -1$

Ορισμός. Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση συστολής αν $\exists\, b,\ 0 \le b < 1$:
$|f(x_1) - f(x_2)| \le b \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (b σταθερά συστολής)

Θεώρημα: Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ (αυθαίρετο) και $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ η λύση του ΠΑΤ $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Αν η f είναι συνάρτηση συστολής (με σταθερά b) τότε:

(i) $|y_{k+1} - y_k| \le b^k |y_1 - y_0|$

(ii) $y_k \to \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\alpha = f(\alpha)$ (και μάλιστα μοναδικό σταθερό σημείο της f)

Απόδειξη:

(i) $|y_2 - y_1| = |f(y_1) - f(y_0)| \le b\,|y_1 - y_0|$

$|y_3 - y_2| = |f(y_2) - f(y_1)| \le b\,|y_2 - y_1| \le b^2 |y_1 - y_0|$

Επαγωγικά $|y_{k+1} - y_k| \le b^k |y_1 - y_0|$

(ii) Έστω $m, n \in \mathbb{R}$, $m > n$

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= |y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + \dots + y_{n+1} - y_n| \\ &\le |y_m - y_{m-1}| + |y_{m-1} - y_{m-2}| + \dots + |y_{n+1} - y_n| \\ &\le b^{m-1}|y_1 - y_0| + b^{m-2}|y_1 - y_0| + \dots + b^n |y_1 - y_0| \\ &\le b^n |y_1 - y_0| \cdot (1 + b + \dots + b^{m-n-1}) \le b^n |y_1 - y_0| \sum_{i=0}^{\infty} b^i \le \frac{b^n |y_1 - y_0|}{1-b} \end{aligned}$$

$\xrightarrow[n = \min(m,n) \to \infty]{} 0 \Rightarrow y_n$ είναι Cauchy $\Rightarrow y_n \to \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) Παίρνοντας όρια στην $y_{k+1} = f(y_k)$ έχουμε

$\underbrace{\lim_{k\to\infty} y_{k+1}}_{=\alpha} = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = f(\alpha)$

Έστω ότι $\exists\, \hat\alpha \neq \alpha : f(\hat\alpha) = \hat\alpha$, $0 \le |\alpha - \hat\alpha| = |f(\alpha) - f(\hat\alpha)| \le b|\alpha - \hat\alpha| \Rightarrow \underbrace{(1-b)}_{>0}|\alpha - \hat\alpha| \le 0 \Rightarrow \alpha = \hat\alpha$

Παράδειγμα: Έστω ότι $\alpha > 0$. Έστω $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$

Έστω $y_{k+1} = f(y_k)$, $y_0 > \sqrt{\alpha}$

Τότε τα σταθερά σημεία της f στο διάστημα $[\sqrt{\alpha}, \infty)$

Σ.Σ: $z = f(z) \Rightarrow z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{\alpha}{z}\right) \Leftrightarrow \frac{z}{2} = \frac{\alpha}{2z} \Rightarrow z = \sqrt{\alpha}$

Έστω $x \geq \sqrt{\alpha}$ $\quad f(x) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) - \sqrt{\alpha} = \frac{x^2 + \alpha - 2\sqrt{\alpha}}{2x} = \frac{(x-\sqrt{\alpha})^2}{2x} \geq 0$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\alpha} + \frac{(x - \sqrt{\alpha})^2}{2x} \geq \sqrt{\alpha}$ $\quad$ Άρα $f: [\sqrt{\alpha}, +\infty) \longrightarrow [\sqrt{\alpha}, +\infty)$

Η f είναι συνάρτηση συστολής στο $I: [\sqrt{\alpha}, \infty)$: Αν $x_1, x_2 \geq \sqrt{\alpha}$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{\alpha}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{\alpha}{x_2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|x_1 - x_2 - \alpha\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1 - x_2 - \alpha\,\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\left(1 - \underbrace{\frac{\alpha}{x_1 x_2}}_{0<\gamma<1}\right) \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

Επομένως αν $y_{k+1} = f(y_k)$, $y_0 \geq \sqrt{\alpha}$ $\quad y_k \longrightarrow \sqrt{\alpha}$

Γραμμικές Εξισώσεις n - τάξης

$$L(y_k) = y_{k+n} + \alpha_1(k)\, y_{k+n-1} + \alpha_2(k)\, y_{k+n-2} + \ldots + \underset{\neq 0}{\alpha_n(k)}\, y_k = R_k$$

$R_k \equiv 0 \qquad L(y_k) = 0 \qquad$ (ομογενής)

$\underset{(\text{για κάποιο})}{R_k \neq 0} \qquad L(y_k) = R_k \qquad$ (μη ομογενής)

Πρόταση: Έστω $\mathcal{L}_{o\mu}$ σύνολο λύσεων της $\mathcal{L}(y_k) = 0$. Τότε $\mathcal{L}_{o\mu}$ είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$)

Πρόταση: Έστω $\mathcal{L}_{o\mu}$ και $\mathcal{L}_{\mu o}$ είναι σύνολα λύσεων της $\mathcal{L}(y_k) = 0$ και $\mathcal{L}(y_k) = R_k$ αντίστοιχα. Έστω $\hat{y}_k \in \mathcal{L}_{\mu o}$ τότε $\mathcal{L}_{\mu o} = (\hat{y}_k) + \mathcal{L}_{o\mu}$

Πρόταση: Το Π.Α.Τ $\mathcal{L}(y_k) = R_k$, $(y_0 = A_0, y_1 = A_1, \ldots, y_{n-1} = A_{n-1})$ έχει μοναδική λύση για κάθε $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

Ε14 Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 23/10/2019

Θεώρημα: Έστω η εξίσωση n-τάξης : $y_{k+n} + \alpha_1(k)y_{k+n-1} + \dots + \alpha_n(k)y_k = 0$
Η εξίσωση έχει τουλάχιστον n-γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ($\dim(\mathcal{L}_{o\mu}) \geq n$)

Απόδειξη:

Έστω τα n - ΠΑΤ:

$$(\Pi AT)_i : L(y_k) = 0 \qquad (y_0\ y_1 \dots y_{n-1}) = (0 \dots 0 \overset{i\text{-θέση}}{1} 0 \dots 0) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Έστω $(\hat{y}_k^{(i)})$ η λύση του $(\Pi AT)_i$. Οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Έστω $\sum_{i=1}^{n} c_i \hat{y}_k^{(i)} = 0 \implies \begin{bmatrix} \hat{y}_0^{(1)} & \dots & \hat{y}_0^{(n)} \\ \hat{y}_1^{(1)} & \dots & \hat{y}_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{y}_{n-1}^{(1)} & \dots & \hat{y}_{n-1}^{(n)} \\ \hat{y}_n^{(1)} & \dots & \hat{y}_n^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} I_n \\ * \end{bmatrix} \underline{c} = \underline{0}$

$$\implies \underline{c} = \underline{0}$$

Ορισμός: Έστω $\{y_k^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ Τότε η ορίζουσα Casorati είναι

$$C_k = \begin{vmatrix} y_k^{(1)} & \dots & y_k^{(n)} \\ y_{k+1}^{(1)} & \dots & y_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k+n-1}^{(1)} & \dots & y_{k+n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες:

I_1 Αν $\{y_k^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ γραμμικά εξαρτημένες $\iff C_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

I_2 $C_0 = 0 \iff C_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Θεώρημα: $\dim(\mathcal{L}_{o\mu}) = n$ = τάξη της εξίσωσης

Γενική λύση ομογενών γραμμικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

Έστω η εξίσωση

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \alpha_2 y_{k+n-2} + \dots + \overset{\neq 0}{\alpha_n} y_k = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

(Ορίζω E : $E y_k = y_{k+1}$)

$$(E^n + \alpha_1 E^{n-1} + \dots + \alpha_n I)\, y_k = 0 = y_k (E - r_1)^{m_1} \dots (E - r_\ell)^{m_\ell} (E^2 - 2\rho_1 \cos\theta_1 E + \rho_1^2)^{n_1} \dots (E^2 - 2\rho_s \cos\theta_s E + \rho_s^2)^{n_s}$$

$r_i \in \mathbb{R}$ (πολλαπλότητα m_i) (πραγματικές ρίζες)

$\rho_i e^{\pm i\theta_i}$ (πολλαπλότητα n_i) (μιγαδικές ρίζες)

Επομένως $n = \sum_{i=1}^{\ell} m_i + 2 \sum_{i=1}^{s} n_i$

Οι λύσεις (γραμμικά ανεξάρτητες)

$(E - \rho_1)^{m_1} y_k = 0 \longrightarrow m_1$ λύσεις

$\vdots$

$(E - \rho_\ell)^{m_\ell} y_k = 0 \longrightarrow m_\ell$ λύσεις

$(E^2 - 2\rho_1 \cos\theta_1 - \rho_1^2)^{n_1} y_k = 0 \longrightarrow 2n_1$ λύσεις

$\vdots$

$(E^2 - 2\rho_s \cos\theta_s - \rho_s^2)^{n_s} y_k = 0$ $2n_s$ λύσεις.

Πρόταση: Η γενική λύση της εξίσωσης: $(E - \rho)^m y_k = 0$ είναι $y_k = A_0 \rho^k + A_1 k \rho^k + \dots + A_{m-1} k^{m-1} \rho^k$, $A_i \in \mathbb{R}$

Πρόταση: Η εξίσωση $(E^2 - 2\rho \cos\theta E + \rho^2 I)^n y_k = 0$ έχει γενική λύση

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \rho^k \cos(k\theta) + A_2 k \rho^k \cos(k\theta) + \dots + A_{n-1} k^{n-1} \rho^k \cos(k\theta) + \\ + B_1 \rho^k \sin(k\theta) + B_2 k \rho^k \sin(k\theta) + \dots + B_{n-1} k^{n-1} \rho^k \sin(k\theta) \end{array}\right\} 2n \text{ λύσεις.}$$

Παράδειγμα: $y_{k+3} - 9 y_{k+2} + 27 y_{k+1} - 27 y_k = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(r) = r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = (\rho - 3)^3$

άρα μια ρίζα $\rho = 3$ πολλαπλότητας 3

Άρα $y_k = c_1 \cdot 3^k + c_2 k 3^k + c_3 k^2 3^k$, $c_i \in \mathbb{R}$