Μάθημα 2ο Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα 15/10/2019

Τελεστές Διαφορών

Ορισμός: $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ (Τελεστής 1ης διαφοράς)

$\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) =$

$= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$

$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k)$

Ιδιότητα 1: Ο Δ είναι γραμμικός : $\Delta(x_k + y_k) = \Delta x_k + \Delta y_k$

$\Delta(\lambda x_k) = \lambda \Delta x_k$

Ιδιότητα 2: $\Delta^n \Delta^m = \Delta^m \Delta^n = \Delta^{m+n}$

Ορισμός: $E y_k = y_{k+1}$

Ιδιότητα 1: E είναι γραμμικός τελεστής

Ιδιότητα 2: $E^n y_k = y_{k+n}$, $E^n E^m = E^m E^n = E^{m+n}$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = E y_k - y_k \Rightarrow \Delta = E - I$ (I: Ταυτοτικός τελεστής)

Ιδιότητα 3: $\Delta(x_k y_k) = x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k = x_{k+1} y_{k+1} - x_{k+1} y_k + x_{k+1} y_k - x_k y_k =$

$= x_{k+1}(\Delta y_k) + (\Delta x_k) y_k$ (Συγκρίνετε $(fg)' = fg' + gf'$)

Ιδιότητα 4: $\Delta\left(\frac{x_k}{y_k}\right) = \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = \frac{x_{k+1} y_k - x_k y_{k+1}}{y_k y_{k+1}} =$

$= \frac{x_{k+1} y_k - x_k y_k + x_k y_k - x_k y_{k+1}}{y_k y_{k+1}} = \frac{(\Delta x_k) y_k - x_k \Delta y_k}{y_k y_{k+1}}$ $\left(\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \right)$

Ιδιότητα 5: $\Delta^n y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \, {}^nC_i \, y_{k+n-i}$, ${}^nC_i = \binom{n}{i} = n!/(i!(n-i)!)$

Ιδιότητα 6: $\underbrace{y_{k+n}}_{E^n(y_k) = (\Delta+I)^n(y_k)} = \sum_{i=0}^{n} {}^nC_i \, \Delta^i y_k$

Ιδιότητα 7: $\Delta^n(x_k y_k) = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \, (\Delta^r x_k)(\Delta^{n-r} y_{k+r})$

Ορισμός: Ο Δ^{-1} ορίζεται από τη σχέση $\Delta\,\underbrace{\Delta^{-1}y_k}_{z_k} = y_k$

Έχουμε $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = y_k \Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} z_k - z_{k-1} &= y_{k-1} \\ z_{k-1} - z_{k-2} &= y_{k-2} \\ &\vdots \\ z_1 - z_0 &= y_0 \end{aligned}\right\}\ \text{αθροίζω}$$

$$\Rightarrow z_k = z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} y_i \quad \Rightarrow \quad z_k = c + \sum_{i=0}^{k-1} y_i \qquad c \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: $I = \Delta\Delta^{-1} \neq \Delta^{-1}\Delta$

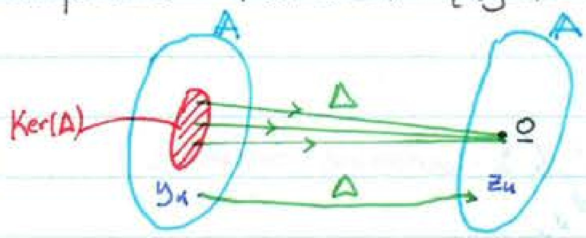
$$\Delta^{-1}\Delta y_k = \Delta^{-1}(y_{k+1} - y_k) = c_1 + \sum_{i=0}^{k-1}(y_{i+1} - y_i) = c_1 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_k - y_{k-1})$$
$$= c_1 + y_k - y_0 = c + y_k = c + \Delta\Delta^{-1}y_k$$

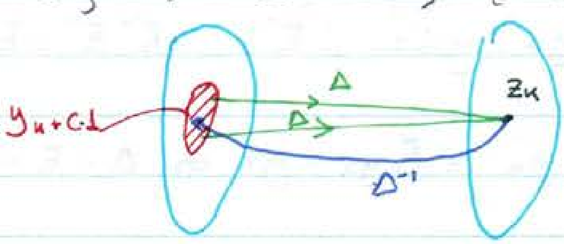
Παρατήρηση: Έστω $\mathbb{A} = \{(y_k) : k \in \mathbb{N}_0\}$

$\Delta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = (y_1, y_2, y_3, \dots) - (y_0, y_1, y_2, \dots) = \underline{0} \Rightarrow y_0 = y_1 = y_2 = \dots$

επομένως $Ker(\Delta) = \{(y_k) : \Delta y_k = \underline{0}\} = \{c\,\underline{1} : c \in \mathbb{R}\} = \{c(1,1,\dots) : c \in \mathbb{R}\}$





$\Delta^{-1}z_k = \{y_k + c\cdot\underline{1}\}$

Γραμμικές Εξισώσεις 1ης Τάξης

$\mathcal{L}(y_k) = y_{k+1} - p_k y_k = q_k \quad , k \in \mathbb{N}_0$

- Αν $q_k \equiv 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, ομογενής
- Αν $q_k \neq 0$ για κάποιο k, μη ομογενής

Πρόταση: Η γενική λύση της $\mathcal{L}(y_k) = 0$ είναι $y_k = c\,p_{k-1}p_{k-2}\cdots p_0 = c\prod_{i=0}^{k-1} p_i,\ c \in \mathbb{R}$

Απόδειξη.

$y_k = p_{k-1}\,\underbrace{y_{k-1}}_{p_{k-2}\cdot y_{k-2}} \Rightarrow y_k = p_{k-1}\,p_{k-2}\dots p_0 \cdot \underbrace{y_0}_{c}$

Ε14. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

15/10/2019

Πρόταση: Έστω $\hat{y}_k : L(\hat{y}_k) = q_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0$

Έστω $L_{o\mu} = \{ (y_k) : L(y_k) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \}$

Έστω $L_{\mu o} = \{ (y_k) : L(y_k) = q_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \}$

Τότε $L_{\mu o} = (\hat{y}_k) + L_{o\mu}$

Απόδειξη:

- Αν $y_k \in L_{o\mu} \Rightarrow \hat{y}_k + y_k \in L_{\mu o} \Rightarrow L_{o\mu} + \{\hat{y}_k\} \subseteq L_{\mu o}$
- Αν $y_k \in L_{\mu o} \Rightarrow y_k - \hat{y}_k \in L_{o\mu} \Rightarrow L_{\mu o} \subseteq L_{o\mu} + \{\hat{y}_k\}$

$\Rightarrow L_{o\mu} + \{\hat{y}_k\} = L_{\mu o}$

Πρόταση: Μια "ειδική" λύση της $L(y_k) = q_k$ είναι

$$y_k = \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}$$

Απόδειξη:

$$y_{k+1} - p_k y_k = q_k \Rightarrow \frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} p_i} - \frac{p_k y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i} = \frac{q_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i}\right) = \frac{q_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$$

$$\frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i} = c + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i} \xrightarrow{c=0} \overbrace{y_k = \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}}^{\text{μια ειδική λύση}} = \sum_{r=0}^{k-1}\left(q_r \prod_{i=r+1}^{k-1} p_i\right)$$

Παράδειγμα: Έστω $y_{k+1} - b y_k = \alpha$

Η γενική λύση $\quad y_k = c \prod_{i=0}^{k-1} p_i + \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}$

στην περίπτωσή μας $p_i = b \ \forall i$, $q_i = \alpha \ \forall i$ επομένως

$$y_k = c \cdot b^k + b^k \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha}{b^{r+1}} \Rightarrow$$

$$y_k = c b^k + \alpha \sum_{r=0}^{k-1} b^{k-r-1} = c b^k + \alpha(1 + b + \dots + b^{k-1})$$

Αν $b \neq 1 \Rightarrow \quad y_k = c b^k + \frac{\alpha(1-b^k)}{1-b} = \left(c - \frac{\alpha}{1-b}\right) b^k + \frac{\alpha}{1-b}$

Αν $b = 1 \Rightarrow \quad y_k = c \ \alpha \cdot k$

Παράδειγμα: Έστω $y_{k+1} - b y_k = \alpha$.
Ψάχνω λύσεις της μορφής $y_k = y_{k+1} = y$
$\Rightarrow (1-b)y = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha}{1-b}$ (σημείο ισορροπίας)

1) Αν $|b| < 1 \Longrightarrow y_k \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\alpha}{1-b}$, αν $C = \frac{\alpha}{1-b}$ $y_k = \frac{\alpha}{1-b}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

2) Αν $|b| > 1 \Longrightarrow$
• $C \neq \alpha/(1-b) \longrightarrow |y_k| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$
• $C = \alpha/(1-b) \longrightarrow y_k = \frac{\alpha}{1-b}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

3) Αν $b = 1$ $y_k = C + \alpha k$, αν $\alpha \neq 0$ $y_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{sign}(\alpha)\,\infty$

4) Αν $b = -1$ $y_k = \left(C - \frac{\alpha}{2}\right)(-1)^k + \frac{\alpha}{2}$
• Αν $k = 2n+1 \Longrightarrow y_k = \alpha - C$
• Αν $k = 2n \Longrightarrow y_k = C$

→ αν $C = \alpha/2 \Rightarrow y_k = \alpha/2$ $\forall k$
→ αν $C \neq \alpha/2 \Rightarrow y_k = \begin{cases} \alpha - C & k = 2n+1 \\ C & , k = 2n \end{cases}$

Παράδειγμα: Έστω ότι αρχικό δάνειο $= A$ και θέλουμε να το ξεπληρώσουμε σε N ισόποσες δόσεις (επιτόκιο ανά περίοδο $= r$).

Έστω y_k είναι το ποσό που χρωστάμε μετά την k περίοδο.

$$y_{k+1} = y_k + r y_k - p \Rightarrow y_{k+1} = \underbrace{(1+r)}_{\alpha} y_k - \underbrace{p}_{b}$$

$y_0 = A$, $y_N = 0$

$$y_k = (1+r)^k A - p\,\frac{1-(1+r)^k}{1-(1+r)} \qquad k \in \{0, \dots, N\}$$

$$y_k = (1+r)^k A + \frac{p}{r}\left(1 - (1+r)^k\right)$$

$$y_N = 0 \Longrightarrow (1+r)^N A = -\frac{p}{r}\left(1 - (1+r)^N\right) \Rightarrow p = \frac{r(1+r)^N A}{1+(1+r)^N} = \frac{rA}{1+(1+r)^{-N}}$$