$RarR \neq 0$ και $RaR \neq 0$ συνεπώς $RarR \cdot RaR \neq 0$ και άρα $arRa \neq 0$

Άρα υπάρχει $x \in R$ με $arxa \neq 0$. Θεωρώ την απεικόνιση $f: Ra \to Ra$ με $f(\xi) = \xi rxa \in Ra$ για κάθε $\xi \in Ra$. Η $f$ είναι $R$-γραμμική και $f \neq 0$ (καθώς $f(a) = arxa \neq 0$). Άρα η $f$ είναι ισομορφισμός.

$$\begin{tikzcd} Ra \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_{Ra}"'] & Ra \arrow[d, "f^{-1}"] \\ & Ra \end{tikzcd}$$

Είναι $(f^{-1} \circ f)a = a \Rightarrow f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{ar}_{R}\underbrace{xa}_{Ra}) = a$

$\Rightarrow ar\underbrace{f^{-1}(xa)}_{Ra \subseteq R} = a$.

Π.χ. $k$ σώμα, $V$ $k$-δ.χ. $R = End_k V$

(ο $R$ αριστερά πρωταρχικός με πιστό απλό $R$-πρότυπο το $V$)

$\boxed{\text{μάθημα } 22^{\circ} \quad 29/5/19}$

Στόχος: αυτός ο δακτύλιος $R$ είναι και δεξιά πρωταρχικός

Γνωρίζουμε τα εξής για ένα δακτύλιο $R$:

• Αν ο $R$ έχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες τότε ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός αν [για $I, J \subseteq R$ ιδεώδη $\neq 0$ είναι $IJ \neq 0$]. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα μοναδικό πιστό απλό $R$-πρότυπο. Επιπλέον στην περίπτωση αυτή, ο $R$ έχει ένα ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες.

Πόρισμα Αν ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός και έχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες, τότε ο $R$ είναι δεξιά πρωταρχικός.

απόδειξη $R$ αριστερά πρωταρχικός $\Rightarrow$ [$I, J \subseteq R \neq 0$ ιδεώδη $\Rightarrow IJ \neq 0$]

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

ο $R$ έχει ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες $\xrightarrow{+}$ $R$ δεξιά πρωταρχικός.

Πρόταση Ο δακτύλιος $R = End_k V$ ($k$ σώμα) έχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες (και άρα είναι και δεξιά πρωταρχικός)

απόδειξη Θεωρώ $v \in V$ με $v \neq 0$ και δ.υπόχωρο $U \subseteq V$ με $V = U \oplus kv$.

Θ.δ.ο. το $I = \{f: V \to V \mid f|_U = 0\}$ είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες του $R$.

• το $I \subseteq R$ είναι αριστερό ιδεώδες: Αν $f \in I$ και $g \in R$ τότε: $(gf)(u) = g(f(u)) = g(0) = 0 \in V$ $\forall u \in U$ και άρα $g \cdot f \in I$

• η απεικόνιση $\theta: I \to V$ με $\theta(f) = f(v) \in V$ $\forall f \in I$ είναι ισομορφισμός αριστερών $R$-προτύπων (και άρα το αριστερό $R$-πρότυπο $I$ είναι απλό, δηλαδή το $I$ είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες).

- αν $f, f' \in I$, τότε $\theta(f+f') = (f+f')(v) = f(v) + f'(v) = \theta(f) + \theta(f')$
- αν $f \in I$ και $g \in R$ τότε $\theta(gf) = (gf)(v) = g(f(v)) = g(\theta(f))$
- αν $f \in I$ και $\theta(f) = 0$ τότε $f(v) = 0$. Καθώς $f \in I$ είναι $f|_u = 0$. Καθώς $V = U \oplus kv$ είναι $f|_V = 0$ δηλαδή $f = 0$.
- αν $w \in V$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει $f \in I$ με $f(v) = w$. (...) (και είναι και μοναδική)

## Υπενθυμίσεις

• Τοπολογία γινόμενο: $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων.
$X := \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_i} X_i$ (η προβολή $p_i$ στον $X_i$)

Η τοπολογία γινόμενο στο $X$ έχει μια βάση περιοχών που παράγεται από τα $p_i^{-1}(U_i) \subseteq X$, $i \in I$, $U_i \subseteq X$ ανοικτό.
Για την τοπολογία γινόμενο ισχύει το εξής: ένα δίκτυο $(x_\lambda)_\lambda$ του $X$ συγκλίνει στο $x \in X$ αν $\forall i \in I$ είναι $\lim_\lambda p_i(x_\lambda) = p_i(x) \in X_i$

• Τοπολογία υποχώρου: $X$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Η τοπολογία υποχώρου του $Y$ έχει ως ανοικτά υποσύνολα τα υποσύνολα της μορφής $U \cap Y$ όπου το $U \subseteq X$ είναι ανοικτό.
$i^{-1}(U)$
$i : Y \hookrightarrow X$

Ένα δίκτυο $(y_\lambda)_\lambda$ του $Y$ συγκλίνει στο $y \in Y$ αν είναι $\lim_\lambda y_\lambda = y \in X$.

## Παραδείγματα

1) Αν $k$ είναι ένα τοπολογικό σώμα και $V$ ένας τ.δ.χ. επί του $k$, τότε ο ασθενής δυικός $V^*$ του $V$ είναι ο τ.δ.χ. $V^* = \{f : V \to k \,/\, f \text{ συνεχής γραμμική}\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία υποχώρου που κληρονομεί από το γινόμενο $k^V = \{f : V \to k\} = \prod_V k$

2) Έστω $k$ δακτύλιος και $M, N$ δύο $k$-πρότυπα εφοδιασμένα με τη διακριτή τοπολογία. Το σύνολο $Hom_k(M,N) = \{f : M \to N \,/\, f\ k\text{-γραμμική}\}$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του τοπολογικού χώρου γινόμενο $N^M = \prod_M N$.
Πράγματι, έστω ότι $(f_\lambda)_\lambda$ είναι ένα δίκτυο με $f_\lambda \in Hom_k(M,N)$ $\forall \lambda$ και

$\lim_\lambda f_\lambda = f \in N^M$. Πρέπει ν.δ.ο. $f \in Hom_k(M,N)$

• Εστω $x, y \in M$. Καθώς $\lim_\lambda f_\lambda = f \in N^M$ είναι $\lim_\lambda f_\lambda(x) \overset{(*)}{=} f(x)$ και
αυθαίρετα στο N

$\lim_\lambda f_\lambda(y) \overset{(**)}{=} f(y)$, και $\lim_\lambda f_\lambda(x+y) = f(x+y)$. Είναι $f_\lambda(x) = f(x)$ για $\lambda >> 0$,
αυθαίρετα στο N

$f_\lambda(y) = f(y)$ $\forall \lambda >> 0$ και $f_\lambda(x+y) = f(x+y)$ για $\lambda >> 0$.
Ετσι για $\lambda >> 0$ είναι: $f(x+y) \overset{(***)}{=} f_\lambda(x+y) = f_\lambda(x) + f_\lambda(y) \overset{(*)(**)}{=} f(x) + f(y)$
• Αν $x \in M$ και $r \in R$ τότε είναι $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x) \in N$ και $\lim_\lambda f_\lambda(rx) = f(rx)$.
Αρα για $\lambda >> 0$ είναι $f_\lambda(x) = f(x)$ και $f_\lambda(rx) = f(rx)$. Συνεπώς για τέτοια $\lambda$ είναι $f(rx) = f_\lambda(rx) = r f_\lambda(x) = r.f(x)$.

3) Αν $k$ δακτύλιος και $M, N$ είναι $k$-πρότυπα (εφοδιασμένα με τη διακριτή τοπολογία) με το $M$ πεπερασμένα παραγόμενο τότε η επαγόμενη τοπολογία του $Hom_k(M,N) \subseteq N^M$ είναι διακριτή.
Πράγματι, αν $M = kx_1 + \dots + kx_n$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in M$ και $(f_\lambda)_\lambda$ είναι ένα δίκτυο του $Hom_k(M,N)$ με $f_\lambda \xrightarrow{\lambda} f \in Hom_k(M,N)$. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\lim_\lambda f_\lambda(x_i) = f(x_i)$ και άρα $\forall i = 1, 2, \dots, n$ είναι $f_\lambda(x_i) = f(x_i)$ $\forall \lambda >> 0$

Αρα $\forall \lambda >> 0$ είναι $f_\lambda(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Καθώς τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ παράγουν το $k$-πρότυπο $M$ και οι απεικονίσεις $f_\lambda, f$ είναι $k$-γραμμικές έπεται ότι $\forall \lambda >> 0$ είναι $f_\lambda = f$

4) Εστω $k$ μεταθετικός δακτύλιος και $A, B$ δύο $k$-άλγεβρες. Τότε το υποσύνολο $Hom_{k\text{-}Alg}(A,B) = \{f : A \to B \,/\, f$ $k$-γραμμική και ομομορφισμός δακτυλίων$\}$

είναι κλειστό στον χώρο γινόμενο $B^A = \prod_A B$. Επιπλέον, αν η $k$-άλγεβρα $A$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε η επαγόμενη τοπολογία στον χώρο $Hom_{k\text{-}Alg}(A,B)$ είναι η διακριτή.

5) Εστω $k \hookrightarrow K$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Τότε είναι:
$Hom_{k\text{-}Alg}(K,K) = \{f : K \to K \,/\, f$ ομομορφισμός $k$-αλγεβρών$\} \overset{!}{=}$

$= \{f : K \to K \,/\, f$ ισομορφισμός $k$-αλγεβρών$\} = Gal(K/k)$