$$= A\begin{pmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d \\ a_2 d \\ \vdots \\ a_n d \end{pmatrix} = \tau(d)(v) \quad \text{Άρα } f = \tau(d)$$

D διαιρετικός δακτύλιος

$R = M_n(D)$ ημιαπλός

Υπάρχει ένα μοναδικό απλό R-πρότυπο V με $R \simeq \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$ ως R-πρότυ

$D^{op} = End_R V$

Παρατήρηση Αν $R_1, R_2, \ldots, R_n$ είναι αριστερά ημιαπλοί δακτύλιοι τότε ο $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ είναι επίσης αριστερά ημιαπλός δακτύλιος.

Πρόταση Αν $r \in \mathbb{N}$, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ είναι διαιρετικοί δακτύλιοι και $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ τότε ο δακτύλιος $\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) = R$ είναι ημιαπλός

(i) Υπάρχουν ακριβώς r μη-ισόμορφα απλά R-πρότυπα, έστω $V_1, V_2, \ldots, V_r$

(ii) $R \simeq V_1^{n_1} \oplus V_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$ ως R-πρότυπα.

(iii) $D_i^{op} = End_R V_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$

Γενικά: Αν $R_1, \ldots, R_n$ είναι δακτύλιοι και $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ τότε μπορώ να περιγράψω όλα τα

μάθημα 7°
13/3/19

R-πρότυπα ως εξής:

- Αν για $i = 1, 2, \ldots, n$ έχω ένα R_i-πρότυπο M_i τότε η αβελιανή ομάδα $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ λαμβάνει τη δομή ενός R-προτύπου ως εξής:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (r_1 x_1, r_2 x_2, \ldots, r_n x_n) \in M$$
$$\forall (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R \text{ και } \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$$

- Αντίστροφα, αν M είναι ένα R-πρότυπο και $e_1, e_2, \ldots, e_n \in R$ με $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, θεωρ τις υποομάδες $M_1, M_2, \ldots, M_n \in M$ που ορίζονται ως εξής:

$M_1 := e_1 M = \{e_1 x \mid x \in M\}$, $M_2 = e_2 M, \ldots, M_n = e_n M$

και έχω ότι:

- Κάθε M_i είναι ένα R_i-πρότυπο (με $r_1 \cdot e_1 x := (0,\dots,r_i,0,\dots 0)x =$
$= e_i(0,\dots,r_i,0,\dots 0)x \in M_i$
- $M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ Πράγματι αν $x \in M$ γράφω $x = 1 \cdot x = (e_1+e_2+\dots+e_n)x =$
$= \sum_{i=1}^{n} e_i x \in \sum_{i=1}^{n} M_i$

Αν $x \in M_1 \cap (M_2 + \dots + M_n)$ τότε $x = e_2 x_2 + \dots + e_n x_n$ για κατάλληλα $x_2,\dots,x_n \in M$ και $x \in M_1 \to x = e_1 y \Rightarrow e_1 x = e_1^2 y = e_1 y = x$
Οπότε $x = e_1 x = e_1(e_2 x_2 + \dots + e_n x_n) = 0$.
Άρα το άθροισμα είναι ευθύ άθροισμα.

Πόρισμα Αν $r, n_1,\dots,n_r \in \mathbb{N}$ και $D_1,\dots,D_r$ είναι διαιρετικοί δακτύλιοι με $R = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D)$ τότε:

(i) Ο R είναι ημιαπλός
(ii) Υπάρχουν ακριβώς r το πλήθος κλάσεις ισομορφίας απλών προτύπων. Έστω $V_1,\dots,V_r$ αντιπρόσωποι αυτών.
(iii) $D_i := End_R V_i$
(iv) Υπάρχει ισομορφισμός R-προτύπων $R \simeq V_1^{n_1} \oplus \dots \oplus V_r^{n_r}$

Πρόβλημα
R δακτύλιος, V απλό R-πρότυπο. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $V^n \simeq V^m$ ως R-πρότυπα τότε $n = m$.

Βασική ιδέα:
Άλλο πρόβλημα: Μπορώ να βρω $A \in \mathbb{C}^{4\times 7}$, $B \in \mathbb{C}^{7\times 4}$ τ.ω.: $AB = I_4$ και $BA = I_7$? (όχι, π.χ. με rank)
Άλλος τρόπος ότι δεν γίνεται:
$A \in \mathbb{C}^{4\times 7} \rightsquigarrow \mathbb{C}^7 \xrightarrow{f} \mathbb{C}^4$
$B \in \mathbb{C}^{7\times 4} \rightsquigarrow \mathbb{C}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^7$
$I_4 = AB \quad \mathbb{C}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^7 \xrightarrow{f} \mathbb{C}^4 \qquad fg = I_{\mathbb{C}^4}$
$I_7 = BA \quad \mathbb{C}^7 \xrightarrow{f} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^7 \qquad gf = I_{\mathbb{C}^7}$

απόδειξη προβλήματος

Γνωρίζουμε ότι αν $n \neq m$ τότε $\nexists\, A \in D^{n\times m}$ και $B \in D^{m\times n}$ με $AB = I_n$ και $BA = I_m$ όπου $D = \mathrm{End}_R V$

Έστω ότι υπάρχει $f : V^n \to V^m$ ομομορφισμός R-προτύπων και $f^{-1} : V^m \to V^n$. Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{Hom}_R(V^n, V^m) \cong \left(\begin{smallmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \mathrm{End}_R V & \\ & \vdots & \end{smallmatrix}\right)\updownarrow n$
$\xleftrightarrow{\ m\ }$

και $\mathrm{Hom}_R(V^n, V^m) \cong D^{n\times m}$

Άρα η f αντιστοιχεί σε κάποιον πίνακα $A \in D^{m\times n}$ και η f^{-1} σε κάποιο πίνακα $B \in D^{n\times m}$. Οι σχέσεις $ff^{-1} = I_{V^m}$ και $f^{-1}f = I_{V^n}$ δίνουν $AB = I_m$ και $BA = I_n$. Άρα $n = m$ (αφού αν $n \neq m$ έχω άτοπο

Παράδειγμα ότι η υπόθεση ότι είναι απλό είναι απαραίτητη:

Υπάρχουν δακτύλιοι R με $R^n \cong R^m$ (ως R-πρότυπα) $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

απόδειξη Έστω F σώμα και V είναι απειροδιάστατος F δ.χ.

Υπάρχει ισομορφισμός F δ.χ. $f : V \to V \oplus V$

Έστω $f^{-1} : V \oplus V \to V$ ο αντίστροφος. Έστω $\mathrm{Hom}_V(V\oplus V, V) \cong R^{1\times 2} = (R, R$

Άρα η f αντιστοιχεί σε έναν πίνακα $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ και η f^{-1} σε ένα πίνακα (s_1, s_2) με $(s_1\ s_2)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = I_1$ και $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(s_1\ s_2) = I_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow s_1 f_1 + s_2 f_2 = 1$, $f_1 s_1 = f_2 s_2 = 1$ και $f_1 s_2 = f_2 s_1 = 0$

Οι πίνακες $(s_1\ s_2)$ και $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ορίζουν γραμμικές απεικονίσεις

$F : R^2 \to R$ και $G : R \to R^2$ με $F \circ G = I_R$ και $G \circ F = I_{R^2}$.

Άρα $R \cong R^2$ ως R-πρότυπα.

απόδειξη πορίσματος

(i) ✓

(ii) Έστω $R_i = M_{n_i}(D_i)$ $i = 1, \dots, r$. Γνωρίζουμε ότι το $V_i = D_i^{n_i}$ είναι το μοναδικό απλό R_i πρότυπο. Συνεπώς το $V_i \cong 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \underbrace{V_i}_{i\text{-θέση}} \oplus 0 \oplus \cdots$ είναι ένα απλό R-πρότυπο για $i = 1, 2, \dots, r$.

Έστω V ένα απλό R-πρότυπο με $V \not\cong V_i$ $i = 1, 2, \dots, r$

Γνωρίζουμε ότι $V \cong R/I$ για κάποιο μεγιστικό αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ και άρα υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : R \to R/I \cong V$ με

$Im f = V$ ($\Rightarrow f \neq 0$) Όμως $R = V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$ και

$Hom_R(R,V) = Hom_R(V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}, V) \simeq$

$\simeq Hom_R(V_1,V)^{n_1} \oplus \cdots \oplus Hom_R(V_r,V)^{n_r} = 0$

iii) $End_R V_i = End_{R_i} V_i \simeq D_i$

$\hookrightarrow \lambda v_i = \lambda_i v_i$ όπου $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

iv) ✓ βλ. απόδειξη ii)

Ο.Δ. την μοναδικότητα των $n_1, \dots, n_r$.

Έστω ότι $R \simeq V_1^{n_1'} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r'}$ για $n_1', \dots, n_r' \in \mathbb{N}$

Αν $e_1, \dots, e_r \in R$ είναι όπως πριν, τότε

$V_i^{n_i} = e_i R \simeq e_i (V_1^{n_1'} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r'}) = e_i V_i^{n_i'} = V_i^{n_i'} \overset{\text{προφ}}{\Longrightarrow} n_i = n_i'$

Θεώρημα Wedderburn-Artin

Αν ο R είναι ημιαπλός, τότε υπάρχουν μοναδικά $r, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ και διαιρετικά δακτύλιοι $D_1, D_2, \dots, D_r$ ώστε $R \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

απόδειξη μοναδικότητα ✓

Ύπαρξη: Γνωρίζουμε ότι ως R-πρότυπα $R \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ όπου τα $V_1, V_2, \dots, V_k$ είναι απλά (όχι απαραίτητα μη ισόμορφα)

Μπορώ να γράψω $R \simeq U_1^{n_1} \oplus U_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus U_r^{n_r}$ όπου $n_i > 0$ και τα $U_1, U_2, \dots, U_r$ είναι ανά 2 μη ισόμορφα απλά R-πρότυπα.

Λήμμα Υπάρχει ισομορφισμός $End_R R \simeq R^{op}$

απόδειξη $\forall r \in R$ η απεικόνιση $f_r : R \to R$, $x \mapsto xr$ είναι r-γραμμική

(αφού $f_r(x+y) = (x+y)r = xr + yr = f_r(x) + f_r(y)$, και $f_r(\lambda x) = (\lambda x) r = \lambda (xr) = \lambda f_r(x)$)

Ορίζεται η απεικόνιση $T : R \to End_R R$, $r \mapsto f_r$ η οποία είναι προσθετική

και ισχύει $T1 = I_R$ και $T(rr') = T(r')T(r)$

Η T είναι 1-1 και επί:

1-1: Αν $T(r) = 0 \Rightarrow f_r = 0 \Rightarrow f_r(1) = 0 \Rightarrow r = 0$

επί: Αν $f \in End_R R$ και $r = f(1)$ τότε $\forall x \in R$ ισχύει:

$f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = xr = f_r(x)$. Άρα $f = f_r = T(r) \in Im T$

Καθώς $R \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{n_i}$ ως R-πρότυπα λόγω του Λήμματος είναι:

$\mathrm{End}_R R \simeq \mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{n_i}\right) \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_R(U_i^{n_i}) \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathrm{End}_R U_i)^{n_i} \simeq$

$\simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i^{op}) \simeq \left(\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)\right)^{op}$ (op: αντεστραμμένο γινόμενο)

Άρα $R^{op} \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

Ξαναντιστρέφω γινόμενα

$R \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

Πόρισμα {αριστερά ημιαπλοί δακτύλιοι} = {δεξιά ημιαπλοί δακτύλιοι}

Πόρισμα Οι μεταθετικοί ημιαπλοί δακτύλιοι είναι ακριβώς οι δακτύλιοι της μορφής $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_r$ όπου $r \in \mathbb{N}$ και $F_1, \dots, F_r$ είναι σώματα.

απόδειξη Ο $\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ είναι μεταθετικός $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ο $M_{n_i}(D_i)$ είναι μεταθετικός $\forall i = 1, 2, \dots, r$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$ και οι $D_1, \dots, D_r$ είναι μεταθετικοί δηλ. σώματα

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για έναν απλό δακτύλιο R:

μάθημα 8°
18/3/19

(i) ο R είναι αριστερά του Artin
(ii) ο R είναι (αριστερά) ημιαπλός
(iii) $R \simeq M_n(D)$ για κάποιον διαιρετικό δακτύλιο D και κάποιο $n \in \mathbb{N}$

απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $I_0 \subseteq R$ ένα ελαχιστικό $\neq 0$ αριστερό ιδεώδες.
Έστω $J = \sum \{ I \,/\, I \subseteq R$ αριστερό ιδεώδες και $I \simeq I_0$ ως αριστερό R-πρότυπο$\}$
Θ.δ.ο. $J = R$ (γιατί τότε ο R θα είναι άθροισμα αριστερών R-προτύπων άρα ημιαπλός)
Καθώς $J \neq 0$ ($J \supseteq I_0 \neq 0$) αρκεί ν.δ.ο. το J είναι αμφίπλευρο ιδεώδες.
Προφανώς το J είναι ένα αριστερό ιδεώδες. Αρκεί ν.δ.ο. $Jr \subseteq J$ για κάθε $r \in R$.
Αν $x \in J$, τότε $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ για κάποια

αριστερά ιδεώδη $I_1, I_2, \dots, I_n$ ισόμορφα με το I_0 ώστε $x_k \in I_k$
$k = 1, 2, \dots, n$.
Είναι $xr = x_1 r + x_2 r + \dots + x_n r$ και άρα αρκεί νδο $Ir \subseteq J$ για κάθε αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ με $I \simeq I_0$. Έστω $I \subseteq R$ είναι τέτοιο ιδεώδες. Η απεικόνιση $f : I \to R$ με $f(t) = tr \ \forall t \in I$ είναι R-γραμμική και άρα $I \cdot r = \mathrm{Im} f \simeq I / \ker f$. Καθώς το I είναι απλό έπεται ότι $\ker f = 0$ ή $\ker f = I$. Άρα $Ir \simeq I \simeq I_0$ ή $Ir = 0$.
Σε κάθε περίπτωση είναι $I \cdot r \subseteq J$

(ii) ⇒ (i) ✓ $R \simeq M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots$

(iii) ⇒ (i) ο $D \simeq \{ d I_n / d \in D \}$ είναι υποδακτύλιος του $M_n(D)$ και άρα κάθε αριστερό ιδεώδες είναι ένας D-δ.χ.
Καθώς $\dim_D M_n(D) = n^2 < \infty$ δεν υπάρχουν γνήσια φθίνουσες ακολουθίες D δ. υποχώρων (και άρα αριστερών ιδεωδών) του $M_n(D)$.

[Αν $M_n(D) \simeq M_n(D')$ έχουν ένα απλό πρότυπο: $V (= D^n)$, $V' (= D'^{n'})$
$\mathrm{End}_R V = D \quad \mathrm{End}_R V' = D' \quad D \simeq D'$]

Παράδειγμα F σώμα, V είναι F-δ.χ. με βάση $e_1, e_2, \dots$ ($\dim_F V = \infty$) και $R = \mathrm{End}_F V$. Έστω $\mathcal{F} \subseteq R$ με $\mathcal{F} = \{ f : V \to V \,/\, f$ γραμμική και $\dim \mathrm{im} f < \infty \}$
Το $\mathcal{F}$ είναι ιδεώδες του R:
- Αν $f, g : V \to V$ γραμμικές, τότε $\mathrm{im}(f+g) \subseteq \mathrm{im} f + \mathrm{im} g$ και άρα $\dim \mathrm{im}(f+g) \le \dim \{ \mathrm{im} f + \mathrm{im} g \} \le \dim \mathrm{im} f + \dim \mathrm{im} g$
(άρα αν $f, g \in \mathcal{F}$ τότε $f + g \in \mathcal{F}$)
- Αν $f, g : V \to V$ είναι γραμμικές, τότε $\mathrm{im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{im} f$ και άρα $\dim \mathrm{im}(f \circ g) \le \dim \mathrm{im} f$ άρα αν $f \in \mathcal{F}$ τότε $f \cdot g \in \mathcal{F}$.

Επίσης ο υπόχωρος $\mathrm{im}(f \circ g) = (f \circ g)(V) = f(g(V))$ είναι ισόμορφος με το πηλίκο $g(V) / \ker f|_{g(V)}$

$$\begin{tikzcd} g(V) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f|_{g(V)}"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & V \end{tikzcd}$$

$\mathrm{im}\, f|_{g(V)} = f(g(V))$
$\ker f|_{g(V)} = g(V) \cap \ker f$

Άρα $\dim \mathrm{im}(f \circ g) = \dim \dfrac{g(V)}{\ker f|_{g(V)}} \le \dim g(V) = \dim \mathrm{im}\, g$

Άρα αν $g \in F$ τότε $fg \in F$.
Έστω $S = R/F$. Ισχυρισμός: ο S είναι απλός, όχι αριστερά του Artin, όχι αριστερά της Noether, όχι δεξιά του Artin, όχι δεξιά της Noether.

• ο S είναι απλός. Αρκεί ν.δ.ο. $\forall f \in R \setminus F$ υπάρχουν $g, h \in R$ με $gfh : V \to V$ ισομορφισμός (άρα θα είναι αντιστρέψιμο, άρα $1 \in S$)
Είναι $\dim \operatorname{im} f = \infty = \dim V$ και άρα (!) υπάρχει ισομορφισμός: $\alpha : V \to \operatorname{im} f$. Γράφω $V = \ker f \oplus U$ και $V = \operatorname{im} f \oplus W$, οπότε είναι $f = \begin{pmatrix} 0 & f|_U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Γνωρίζουμε ότι η $f|_U : U \to \operatorname{im} f$ είναι ισομορφισμός και άρα $U \cong V$.
Έστω $\beta : V \to U$ ισομορφισμός. Θέτω $h : V \to V = \ker f \oplus V$ με $h = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$
και $g : V = \operatorname{im} f \oplus W \to V$ με $g = \left((f|_U)^{-1}, 0 \right)$.
Τότε $gfh = \left((f|_U)^{-1} \; 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & f|_U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = (0 \;\; 1_V) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta$

μάθημα 9°
27/03/19

V F-δ.χ. $\dim_F V = \infty$ (βάση $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$)
$R = \operatorname{End}_F V$
$F = \{ f : V \to V \,/\, f$ γραμμική και $\dim \operatorname{im} f < \infty \}$
R/F απλός όχι αριστερά (ούτε δεξιά) του Artin και της Noether.

Για κάθε υπόχωρο $U \leq V$ θεωρώ το αριστερό ιδεώδες $I_U \leq R$ με $I_U = \{ f : V \to V \,/\, f$ γραμμική και $f|_U = 0 \}$ και το επαγόμενο αριστερό ιδεώδες $I_U + F/F \leq R/F$

Λήμμα Έστω $U_1 \leq U_2 \leq V$ υπόχωροι με $\dim_F U_2/U_1 = \infty$
Τότε είναι $I_{U_2} + F \subset I_{U_1} + F$ (και άρα $\frac{I_{U_2}+F}{F} \subset \frac{I_{U_1}+F}{F} \leq R/F$)

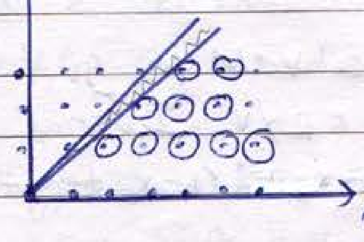
απόδειξη Επιλέγω μια βάση B του δ.χ. U_1 και την επεκτείνω σε μια βάση $B \cup \{ v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \}$ του U_2. Θεωρώ μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ με $f(v) = 0$ $\forall v \in B$ και $f(v_i) = v_i$ για $i = 1, 2, \dots, n, \dots$
Καθώς $U_1 = \langle B \rangle$, προκύπτει ότι $f|_{U_1} = 0$ και άρα $f \in I_{U_1} \leq I_{U_1} + F$
Ισχυρισμός: $f \notin I_{U_2} + F$

Έστω ότι υπάρχει $g \in I_{U_2}$ + $h \in F$ με $f = g + h : V \to V$
Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ είναι:

$$v_i = f(v_i) = (g+h)(v_i) = \underbrace{g(v_i)}_{0} + h(v_i) = h(v_i) \in \operatorname{im} h$$
γιατί $g \in I_{U_2}$ και $v_i \in U_2$

άτοπο γιατί $\dim \operatorname{im} h < \infty$

Κατασκευή Μπορώ να βρω μια βάση του V της μορφής $(e_{ij})_{0 \le i,j < \infty}$



Για κάθε $\theta \in (0, \pi/2)$ θεωρώ το σύνολο:
$B_\theta = \{ e_{ij} \,/\, 0 \le i,j$ και $j < i \,\varepsilon\varphi\, \theta \}$
και τον δ. υπόχωρο $U_\theta = \langle B_\theta \rangle \subseteq V$

Αν $\theta_1 < \theta_2$ στο $(0, \pi/2)$ είναι $B_{\theta_1} \subseteq B_{\theta_2}$ και το $B_{\theta_2} \setminus B_{\theta_1}$ είναι άπειρο.
Άρα είναι $U_{\theta_1} \subseteq U_{\theta_2}$ και $\dim U_{\theta_2}/U_{\theta_1} = \infty$.
Συνεπώς $\dfrac{I_{U_{\theta_2}} + F}{F} \subset \dfrac{I_{U_{\theta_1}} + F}{F}$

Άρα έφτιαξα μια αλυσίδα αριστερών ιδεωδών $\left(\dfrac{I_{U_\theta} + F}{F} \right)_{\theta \in (0, \pi/2)}$

με $\dfrac{I_{U_\theta} + F}{F} \neq \dfrac{I_{U_{\theta'}} + F}{F}$ για $\theta \neq \theta'$ στο $(0, \pi/2)$

Κεφάλαιο 2° - Ριζικό του Jacobson

Ορισμός $\operatorname{rad} R = \cap \{ m \,/\, m \subseteq R$ μεγιστικό (γνήσιο) αρ. ιδεώδες$\}$

π.χ $\operatorname{rad} \mathbb{Z} = \bigcap_{p \text{ πρώτος}} p\mathbb{Z} = 0$

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα $y \in R$:
(i) $y \in \operatorname{rad} R$
(ii) $1 - xy \in U(R)$ $\forall x \in R$
(iii) $yM = 0$ για κάθε απλό R-πρότυπο M.

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Έστω $x \in R$. Αν $R(1-xy) \neq R$ τότε υπάρχει μεγιστικό αρ. ιδεώδες $m \subseteq R$ με $R(1-xy) \subseteq m$ (λήμμα Zorn για τη συλλογή $\mathcal{H} = \{ I \subseteq R \,/\, I \neq R$ αριστερό ιδεώδες με $I \supseteq R(1-xy) \}$
Άρα $y \in \text{rad} R \subseteq m$ και έτσι $1 = \underbrace{(1-xy)}_{\in m} + \underbrace{xy}_{\in m} \in m \Rightarrow m = R$ άτοπο.

άρα $R(1-xy) = R$ δηλαδή υπάρχει $z \in R$ με $z(1-xy) = 1$
Για ν.δ.ο. $1-xy \in \mathcal{U}(R)$ αρκεί ν.δ.ο. το z είναι αριστερά αντιστρέψιμο.
Όμως είναι $z - zxy = 1 \Rightarrow z = 1 + zxy = 1 - (-zx)y$
(ii) ⇒ (iii) Έστω M ένα απλό πρότυπο. Έστω ότι υπάρχει $v \in M$ με $yv \neq 0$.
Καθώς το M είναι απλό, είναι $M = R \cdot yv$ και άρα $v \in Ryv$. Συνεπώς υπάρχει $x \in R$ με $v = xyv \Rightarrow (1-xy)v = 0 \Rightarrow (1-xy)^{-1}(1-xy)v =$
$= (1-xy)^{-1} 0 = 0 \Rightarrow v = 0$ άτοπο
(iii) ⇒ (i) Έστω $m \subseteq R$ ένα μεγιστικό αριστερό ιδεώδες. Το R-πρότυπο R/m είναι απλό και άρα $y \cdot R/m = 0$. Ειδικότερα, είναι:
$y(1+m) = 0 + m \in R/m \Rightarrow y + m = 0 + m \in R/m \Rightarrow y \in m$.

Πόρισμα Το $\text{rad} R$ είναι ιδεώδες του R.
απόδειξη Για κάθε R-πρότυπο M με δομικό ομομορφισμό $\rho : R \to \text{End}(M,+)$ ο ορίζω τον μηδενιστή $\text{ann}_R M = \ker \rho = \{ r \in R \,/\, rM = 0 \}$ ένα ιδεώδες του R.
Είναι $\text{rad} R = \bigcap_{M \text{ απλό}} \text{ann}_R M$

Πόρισμα $\text{rad} R = \{ y \in R \,/\, 1 - xyz \in \mathcal{U}(R) \ \forall x, z \in R \}$
απόδειξη "$\supseteq$" ✓ $(z=1)$
"$\subseteq$" Αν $y \in \text{rad} R$ και $z \in R$ τότε $yz \in \text{rad} R$. Άρα $\forall x \in R$ είναι $1 - x(yz) \in \mathcal{U}(R)$

Πόρισμα $\text{rad} R = \bigcap \{ n \,/\, n \subseteq R$ μεγιστικό δεξιό ιδεώδες$\}$.

Πόρισμα Το $\text{rad} R$ είναι το μέγιστο ιδεώδες $I \subseteq R$ με $1 + I \subseteq \mathcal{U}(R)$
απόδειξη • Το $\text{rad} R$ είναι ιδεώδες ✓
• $1 + \text{rad} R \subseteq \mathcal{U}(R)$ ✓
• Αν $I \subseteq R$ είναι ιδεώδες και $1 + I \subseteq \mathcal{U}(R)$ τότε $I \subseteq \text{rad} R$. Πράγματι, αν $y \in I$ και $x, z \in R$ τότε $(-x)yz \in I$ και άρα $1 - xyz = \underbrace{1 + (-x)yz}_{\in \mathcal{U}(R)}$

Συνεπώς $y \notin radR$

Ορισμός: Ο R καλείται Jacobson ημιαπλός αν $radR = 0$

Παρατήρηση: Έστω $I \subseteq R$ ένα ιδεώδες με $I \subseteq radR$. Τότε:
$rad(R/I) = radR/I$

[Γενικά δεν ισχύει ότι για $J \subseteq R$ ιδεώδες είναι $rad(R/J) = \frac{radR + J}{J}$
π.χ. $R = \mathbb{Z}$ και $J = 4\mathbb{Z}$
$radR = 0$, $radR/J = rad\mathbb{Z}_4 = \{0,2\}$]

Πράγματι, καθώς $I \subseteq radR$ είναι $IM = 0$ για κάθε απλό R-πρότυπο M.
Συνεπώς κάθε απλό R-πρότυπο M είναι ένα (απλό) R/I-πρότυπο.
Αντίστροφα, κάθε απλό R/I-πρότυπο είναι ένα (απλό) R-πρότυπο.
Συνεπώς ένα $j \in R/I$ δρα τετριμμένα σε κάθε απλό R/I-πρότυπο ανν $j = r + I$ όπου το $r \in R$ δρα τετριμμένα σε κάθε απλό R-πρότυπο.

Πόρισμα: Ο δακτύλιος $R/radR$ είναι Jacobson ημιαπλός.
+) απόδειξη: $rad(R/radR) = \frac{radR}{radR} = 0 \subseteq R/radR$

Παρατήρηση: Αν $x \in R$ τότε $x \in U(R) \Leftrightarrow x + radR \in U\left(\frac{R}{radR}\right)$
απόδειξη: "$\Rightarrow$" ✓
"$\Leftarrow$" Υπάρχει $y \in R$ με $(x + radR)(y + radR) = 1 + radR = (y + radR)(x + radR)$
και άρα $xy + radR = 1 + radR = yx + radR$, δηλαδή $1 - xy, 1 - yx \in radR$.
Άρα: $1 - (1 - xy), 1 - (1 - yx) \in U(R) \Rightarrow xy, yx \in U(R) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Το x έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο $\Rightarrow x \in U(R)$.

μάθημα 10ο
29/3/19

Ορισμός: Το στοιχείο $r \in R$ καλείται μηδενοδύναμο αν $r^n = 0 \in R$ για $n \geq 0$.
Το αριστερό, δεξιό ή δίπλευρο ιδεώδες $I \subseteq R$ καλείται μηδενοδύναμο αν $I^n = 0$ για $n \geq 0$. (Με άλλα λόγια, πρέπει να υπάρχει $n \geq 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ είναι $x_1 x_2 \cdots x_n = 0 \in R$)
Το αριστερό ή δεξιό ή δίπλευρο) ιδεώδες $I \subseteq R$ καλείται nil αν κάθε $r \in I$ είναι μηδενοδύναμο.

Παραδείγματα

1) Κάθε μηδενοδύναμο ιδεώδες είναι nil

2) Αν τα (αριστερά, ...) ιδεώδη $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq R$ είναι μηδενοδύναμα, τότε το $\sum_{k=1}^{n} I_k$ είναι επίσης μηδενοδύναμο.

$\underline{n=2}$ Αν $I, J \subseteq R$ μηδενοδύναμα, τότε το $I+J \subseteq R$ είναι μηδενοδύναμο: Έστω ότι $I^n = 0 = J^m$. Θ.δ.ο. $(I+J)^{n+m-1} = 0$ δηλαδή ότι για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_{n+m-1} \in I$ και $y_1, y_2, \dots, y_{n+m-1} \in J$ είναι $\prod_{i=1}^{n+m-1} (x_i + y_i) = 0$. Όμως $\prod_{i=1}^{n+m-1} (x_i+y_i) = \sum \left(\begin{array}{l} \text{λέξεις στα } x_i, y_i \\ \text{μήκους } n+m-1 \end{array} \right)$

Σε κάθε λέξη μήκους $n+m-1$ υπάρχουν είτε $\geq n$ το πλήθος x_i είτε $\geq m$ το πλήθος y_i. Άρα κάθε τέτοια λέξη μηδενίζεται καθώς $I^n = 0 = J^m$

3) Αν ο R είναι μεταθετικός της Noether, τότε κάθε nil ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι μηδενοδύναμο.

Πράγματι, αν το $I \subseteq R$ είναι nil, μπορώ να βρω $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_n \in R$ ώστε $I \overset{R \text{ Noether}}{=} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)$. Είναι $x_k \in I \overset{I \text{ nil}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \exists n_k \in \mathbb{N}$ με $x_k^{n_k} = 0 \overset{R \text{ μεταθ}}{\Longrightarrow} (x_k)^{n_k} = 0 \Rightarrow (x_k)$ μηδενοδύναμο

Άρα το I είναι μηδενοδύναμο (από το (ii))

4) Γενικά υπάρχουν nil ιδεώδη που δεν είναι μηδενοδύναμα.

$\underline{π.χ.}$ $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] / (x_1, x_2^2, \dots, x_n^n, \dots) = \mathbb{Z}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots]$

Αν $I = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ τότε το I δεν είναι μηδενοδύναμο (μιας και $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι $I^n \neq 0$ καθώς $\xi_{n+1}^n \neq 0$) αλλά είναι nil.

Αν $\xi \in I$ τότε $\xi \in (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \subseteq I$ για κάποιο k και άρα $\xi \in (\xi_1) + (\xi_2) + \dots + (\xi_k) + \dots$

5) Αν το (αριστερό, ...) ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι nil τότε $I \subseteq \operatorname{rad} R$

Πράγματι, έστω ότι $x \in I$ και $y \in R$. Τότε $yx \in I$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $(yx)^n = 0$. Άρα το $1 - yx \in \mathcal{U}(R)$ και $(1-yx)^{-1} = 1 + yx + (yx)^2 + \dots + (yx)^{n-1}$. Καθώς $1 - yx \in \mathcal{U}(R)$ $\forall y \in R$ είναι $x \in \operatorname{rad} R$

6) Αν $x \in R$ είναι μηδενοδύναμο, ενδέχεται να είναι $x \notin \operatorname{rad} R$.

$\underline{π.χ.}$ $R = M_2(\mathbb{Q})$

$\operatorname{rad} R = 0$, καθώς ο R είναι απλός

Πρόταση Αν ο R είναι αριστερά του Artin, τότε το ιδεώδες $\operatorname{rad}R \subseteq R$ είναι μηδενοδύναμο.

απόδειξη Έστω $J = \operatorname{rad}R$. Η ακολουθία των (αριστερών) ιδεωδών
$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq J^4 \supseteq \cdots$ (δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα και άρα) είναι τελικά σταθερή. Συνεπώς υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με $J^N = J^{N+1} = \cdots$

Ισχυρισμός $J^N = 0$. Απόδειξη: Έστω ότι $J^N \neq 0$. Θεωρώ τώρα την κλάση $\mathcal{X} = \{ I \subseteq R \,/\, I \text{ αριστερό ιδεώδες και } J^N I \neq 0 \}$. Καθώς $J^N \neq 0$ είναι $R \in \mathcal{X}$ και άρα $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Έστω $\sigma \in \mathcal{X}$ ένα ελαχιστικό στοιχείο.
Είναι $J^N \sigma \neq 0$ και άρα υπάρχει $x \in \sigma$ με $J^N x \neq 0$.
Καθώς $J^N(J^N x) = J^{2N} x \overset{J^N = J^{2N}}{=} J^N x \neq 0$ είναι $J^N x \in \mathcal{X}$
Όμως $J^N x \subseteq \sigma$ και άρα (από τον ελαχιστικό χαρακτήρα του $\sigma \in \mathcal{X}$) είναι $J^N x = \sigma$. Συνεπώς $x \in J^N x$ και άρα υπάρχει $y \in J^N$ με $x = yx$ δηλαδή $(1-y)x = 0$ $(*)$. Όμως $y \in J^N \subseteq J = \operatorname{rad}R$ και άρα $1-y \in U(R)$.
Άρα η σχέση $(*)$ δίνει $x = 0$ άτοπο.

Πόρισμα Έστω R είναι αριστερά του Artin δακτύλιος.
(i) το $\operatorname{rad}R$ είναι το μέγιστο μηδενοδύναμο ή nil αριστερό ιδεώδες
(ii) $\{$nil αριστερά ιδεώδη του $R\}$ = $\{$μηδενοδύναμα αριστερά ιδεώδη του $R\}$

απόδειξη: (i) γνωρίζουμε ότι για ένα αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι
(I μηδενοδύναμο) $\Rightarrow$ (I nil) $\Rightarrow$ ($I \subseteq \operatorname{rad}R$). Επίσης το ριζικό $\operatorname{rad}R$ είναι μηδενοδύναμο.
(ii) Αν το αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι nil, τότε $I \subseteq \operatorname{rad}R$. Αν $N \in \mathbb{N}$ με $(\operatorname{rad}R)^N = 0$, τότε $I^N = 0$ και άρα το I είναι μηδενοδύναμο.

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R:
(i) ο R είναι ημιαπλός
(ii) ο R είναι αριστερά του Artin και Jacobson ημιαπλός.

απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) Γνωρίζουμε ήδη ότι κάθε ημιαπλός δακτύλιος R είναι αριστερά του Artin. Υπάρχει αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ με $R = I \oplus \operatorname{rad}R$.
Γράφω $1 = x + y$, όπου $x \in I$ και $y \in \operatorname{rad}R$. Είναι $yx \in I \cap \operatorname{rad}R = 0$ και άρα $y = yx + y^2 = 0 + y^2 \Rightarrow y = y^2$ και $x = x^2 + yx = x^2 + 0 \Rightarrow x = x^2$.
Είναι $y \in \operatorname{rad}R \Rightarrow x = 1 - y \in U(R)$. Συνεπώς η ισότητα $x = x^2$ δίνει $1 = x \Rightarrow I = R \Rightarrow \operatorname{rad}R = 0$.

(ii) ⇒ (i) Έστω ότι ο R είναι αριστερά του Artin με $\mathrm{rad}\, R = 0$ αλλά όχι ημιαπλός. Επιλέγω $I_1 \subseteq R$ ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Είναι $I_1 \neq 0 = \mathrm{rad}\, R = \cap \{ m / m \subseteq R$ μεγιστικό αριστερό ιδεώδες$\}$ και άρα υπάρχει μεγιστικό αριστερό ιδεώδες $m_1 \subseteq R$ με $I_1 \not\subseteq m_1$.

Συνεπώς $I_1 \cap m_1 \subset I_1 \xRightarrow{I_1 \text{ ελαχιστικό}} I_1 \cap m_1 = 0$ και $I_1 + m_1 \supsetneq m_1 \Rightarrow$

$\xRightarrow{m_1 \text{ μεγιστικό}} I_1 + m_1 = R$. Τελικά είναι $R = I_1 \oplus m_1$. Καθώς $m_1 \neq 0$ υπάρχει ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες $I_2 \subseteq m_1$. Όπως πριν, βρίσκω ένα μεγιστικό αριστερό ιδεώδες $n_2 \subseteq R$ με $R = I_2 \oplus n_2$. Καθώς $I_2 \subseteq m_1$ και $\boxed{R = I_2 \oplus n_2}$ είναι $m_1 = I_2 \oplus (n_2 \cap m_1)$ (modularity του συνόλου των αριστερών ιδεωδών).

- $I_2 \cap (n_2 \cap m_1) \subseteq I_2 \cap n_2 = 0$
- $I_2 + (n_2 \cap m_1) \overset{I_2 \subseteq m_1}{=\!=} (I_2 + n_2) \cap m_1 = R \cap m_1 = m_1$

Γράφω λοιπόν $m_2 = n_2 \cap m_1$ και έχω $\boxed{m_1 = I_2 \oplus m_2}$

Καθώς $R = I_1 \oplus I_2 \oplus m_2$ είναι $m_2 \neq 0$. Συνεχίζω βρίσκοντας ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες $I_3 \subseteq m_2$ και ένα αριστερό ιδεώδες $m_3 \subseteq m_2$ ώστε $m_2 = I_3 \oplus m_3$. Καθώς $R = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus m_3$ είναι $m_3 \neq 0 \ldots$

Η ακολουθία των αριστερών ιδεωδών $R \supsetneq m_1 \supsetneq m_2 \supsetneq m_3 \supsetneq \cdots$

$\qquad\qquad I_1 \neq 0 \quad I_2 \neq 0 \quad I_3 \neq 0$

είναι γνήσια φθίνουσα. άτοπο.

Θεώρημα Έστω R είναι δακτύλιος τέτοιος ώστε το $\mathrm{rad}\, R$ είναι μηδενοδύναμο και ο $R/\mathrm{rad}\, R$ είναι ημιαπλός. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα R-πρότυπο M:

(i) το M είναι της Noether.

(ii) το M είναι του Artin

απόδειξη Γράφω $J = \mathrm{rad}\, R$ και υποθέτω ότι $J^n = 0$. Παρατηρώ αρχικά ότι το ζητούμενο είναι προφανές αν το M είναι ημιαπλό:

Αν $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ με το M_λ απλό $\forall \lambda \in \Lambda$ τότε M του Artin $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\Lambda| < \infty \Leftrightarrow M$ της Noether.

Θεωρώ την πεπερασμένη ακολουθία υποπροτύπων $M \supseteq JM \supseteq J^2 M \supseteq \cdots \supseteq$

$\supseteq J^{n-1} M \supseteq J^n M = 0$

Λήμμα (i) Αν το $J^kM/J^{k+1}M$ είναι πρότυπο του Artin για $k=0,1,\dots$ τότε το M είναι του Artin.
(ii) Αν το $J^kM/J^{k+1}M$ είναι πρότυπο της Noether για $k=0,1,\dots,n-1$ τότε το M είναι της Noether.
απόδειξη (i) Είναι το $J^{n-1}M = \dfrac{J^{n-1}M}{J^nM}$ του Artin και το $J^{n-2}M/J^{n-1}M$ του Artin. Άρα (...) το $J^{n-2}M$ είναι του Artin. Καθώς τα $J^{n-2}M$ και το $J^{n-3}M/J^{n-2}M$ είναι του Artin, γνωρίζουμε ότι (...) το $J^{n-3}M$ είναι του Artin... Τελικά το $J^0M = M$ είναι του Artin.
(ii) το ίδιο.

Αν το M είναι του Artin, τότε τα R-πρότυπα $J^kM/J^{k+1}M$ είναι του Artin για κάθε $k=0,1,\dots$ Όμως $J\cdot J^kM/J^{k+1}M = 0$ και άρα το $J^kM/J^{k+1}M$ είναι R/J-πρότυπο. Άρα το R-πρότυπο $J^kM/J^{k+1}M$ είναι ημιαπλό. Άρα το R-πρότυπο $J^kM/J^{k+1}M$ είναι της Noether $\forall k=0,1,\dots$ Συνεπώς, το M είναι της Noether.
Ακριβώς ίδια: Αν M της Noether τότε M του Artin.

Πόρισμα Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για έναν δακτύλιο R:
(i) ο R είναι αριστερά του Artin
(ii) ο R είναι αριστερά της Noether, το $\operatorname{Rad} R$ είναι μηδενοδύναμο και ο $R/\operatorname{rad} R$ είναι ημιαπλός
απόδειξη (ii) ⇒ (i) το προηγούμενο για το R-πρότυπο $M=R$.
(i) ⇒ (ii) Αν ο R είναι του Artin, τότε το ριζικό $\operatorname{rad} R$ είναι μηδενοδύναμο. Επίσης ο δακτύλιος $R/\operatorname{rad} R$ είναι αριστερά του Artin και $\operatorname{rad}(R/\operatorname{rad} R) = 0$. Κατά συνέπεια, ο $R/\operatorname{rad} R$ είναι ημιαπλός. Άρα ο R είναι αριστερά της Noether (από το προηγούμενο αποτέλεσμα για το R-πρότυπο $M=R$)

Στόχος R ημιαπλός ⇔ R αριστερά της Noether + $\boxed{?}$

μάθημα 11°
1/4/19

Πρόταση Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν δακτύλιο R
(i) $\forall a \in R \ \exists x \in R$ με $a = axa$
(ii) $\forall a \in R \ \exists e = e^2 \in R$ με $Ra = Re$
(iii) $\forall$ π.π. αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R \ \exists e = e^2 \in R$ με $I = Re$
Στην περίπτωση που αυτές οι ιδιότητες ισχύουν θα λέμε ότι ο R είναι
von Neumann κανονικός

<u>απόδειξη</u> (i)⇒(ii) Έστω $a \in R$ και $x \in R$ με $a = axa$. Για $e = xa$ είναι $e^2 = x\underbrace{axa}_{a} = xa = e$. Είναι $e = xa \in Ra$ και άρα $Re \subseteq Ra$. Επίσης

$a = axa = ae \in Re$ και άρα είναι $Ra \subseteq Re$
(ii)⇒(iii) Έστω $I = Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$ για κάποια $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$
Θ.δ.ο. υπάρχει $e = e^2 \in R$ με $I = Re$ χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n.
$n = 1$ ✓
Υποθέτω ότι $n > 1$ και γράφω $Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_{n-1} = Re$ και
$Ra_n = Rf$ για κάποια $e = e^2, f = f^2 \in R$
Συνεπώς είναι $I = Re + Rf$
<u>Ισχυρισμός</u> $I = Re(1-f) + Rf$
<u>απόδειξη</u> $\left.\begin{array}{l} e(1-f) = e - ef \in Re + Rf = I \\ f \in Re + Rf = I \end{array}\right\} \Rightarrow Re(1-f) + Rf \subseteq I$
Όμοιως $e = e - ef + ef = e(1-f) + ef \in Re(1-f) + Rf$ και
$f \in Re(1-f) + Rf$. Συνεπώς $I = Re + Rf \subseteq Re(1-f) + Rf$
Γράφω τώρα $Re(1-f) = Re'$ για κάποιο $e' = e'^2 \in R$.
Είναι $\boxed{I = Re' + Rf}$ και $e'f = 0$ (Πράγματι, είναι $e' \in Re' = Re(1-f)$
και άρα $\exists r \in R$ με $e' = re(1-f) \Rightarrow e'f = re(1-f)f = re0 = 0$)
<u>Ισχυρισμός</u> $I = R(e' + f - fe')$
<u>απόδειξη</u> $e' + f - fe' = (1-f)e' + 1 \cdot f \in Re' + Rf \Rightarrow$
$\Rightarrow R(e' + f - fe') \subseteq Re' + Rf$
αντίστροφα είναι: $e'(e' + f - fe') = \underbrace{e'^2}_{e'} + \underbrace{e'f}_{0} - \underbrace{e'fe'}_{0} = e' + 0 - 0e' = e'$

και άρα $e' \in R(e' + f - fe')$. Επίσης $f(e' + f - fe') = fe' + f^2 - f^2e' =$
$= fe' + f - fe' = f$ και άρα $f \in R(e' + f - fe')$.
Συνεπώς $Re' + Rf \subseteq R(e' + f - fe')$
(iii)⇒(i) Έστω $a \in R$ και $e = e^2 \in R$ με $Ra = Re$. Είναι $a \in Re$

και άρα υπάρχει $r \in R$ με $a = re$. Επίσης είναι $e \in Ra$ και άρα υπάρχει $s \in R$ με $e = sa$. Είναι $a = re \Rightarrow a \cdot sa = resa = re \cdot e = re = a$.

Παραδείγματα

1) Αν $(R_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια vN κανονικών δακτυλίων, τότε το $R = \prod_{i \in I} R_i$ είναι επίσης vN κανονικός. Πράγματι, αν $a = (a_i)_i \in R$ και $x_i \in R_i$ με $a_i x_i a_i = a_i$ τότε για το $x = (x_i)_i \in R$ είναι: $axa = (a_i)_i (x_i)_i (a_i)_i = (a_i x_i a_i)_i = (a_i)_i = a$.

2) Αν ο R είναι vN κανονικός και $I \subseteq R$ είναι ένα ιδεώδες τότε ο $\bar{R} = R/I$ είναι επίσης vN κανονικός.
Πράγματι, αν $\xi \in \bar{R}$ τότε $\xi = a + I \in R/I$ για κάποιο $a \in R$. Υπάρχει $x \in R$ με $a = axa$ και άρα για $\eta = x + I \in R/I$ είναι $\xi \eta \xi = (a+I)(x+I)(a+I) = axa + I = a + I = \xi \in \bar{R}$

3) Μια άλγεβρα Boole (μεταθετικός δακτύλιος R με $r^2 = r$ $\forall r \in R$) είναι vN κανονικός δακτύλιος. (Αν $a \in R$ τότε $a \cdot a \cdot a = a$)

4) Αν M είναι ένα ημιαπλό R-πρότυπο, τότε ο δακτύλιος $S = End_R M$ είναι vN κανονικός.
Έστω $f: M \to M$ μια R-γραμμική απεικόνιση. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν R-υποπρότυπα $N, L \subseteq M$ με $M = \ker f \oplus N$ και $M = im f \oplus L$.
Η γραμμική απεικόνιση $\varphi: N \to im f$ με $\varphi(x) = f(x) \in im f$ $\forall x \in N$ είναι ισομορφισμός. (Πράγματι, είναι $\ker \varphi = N \cap \ker f = 0$ και άρα η φ είναι 1-1. Αν $y \in im f$ και $x \in M$ με $y = f(x)$ τότε γράφω $x = x_1 + x_2$ όπου $x_1 \in \ker f$ και $x_2 \in N$ και έχω $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_2) = \varphi(x_2) \in im \varphi$. Άρα η φ είναι επί. Θεωρώ την $\varphi^{-1}: im f \to N$ και ορίζω μια γραμμική απεικόνιση $g: M \to M$ με $g(x) = \varphi^{-1}(x) \in N \subseteq M$ $\forall x \in im f$. Ισχυρισμός: $f = fgf: M \to M$
Πράγματι, αρκεί νδο $f(x) = (fgf)(x)$ αν $x \in \ker f$ και αν $x \in N$.
Αν $x \in \ker f$ τότε $f(x) = 0$ και $f[g[f(x)]] = f[g(0)] = f(0) = 0$.
Αν $x \in N$, τότε $f[g[f(x)]] = f[g[\varphi(x)]] = f[\varphi^{-1}[\varphi(x)]] = f(x)$.

Πρόταση Αν ο R είναι vN κανονικός τότε $\operatorname{rad} R = 0$.

απόδειξη Έστω $a \in \operatorname{rad} R$. $\exists x \in R$ με $a = axa$ και άρα $a(1-xa) = a - axa = 0$.
Όμως είναι $a \in \operatorname{rad} R$ και άρα $1 - xa \in U(R)$. Συνεπώς:
$a = \underbrace{a(1-xa)}_{0}(1-xa)^{-1} = 0(1-xa)^{-1} = 0$.

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα δακτύλιο R.
(i) ο R είναι ημιαπλός
(ii) ο R είναι αριστερά της Noether και vN κανονικός.

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Γνωρίζουμε ότι ένας ημιαπλός δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether. Αν ο R είναι ημιαπλός, τότε $R = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ όπου $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ και $D_1, D_2, \ldots, D_r$ είναι διαιρετικοί δακτύλιοι.
$\forall i = 1, \ldots, r$ το D_i-πρότυπο $D_i^{n_i}$ είναι ημιαπλό και άρα ο δακτύλιος $\operatorname{End}_{D_i}(D_i^{n_i}) = M_{n_i}(D_i)$ είναι vN κανονικός. Άρα το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)}_{R}$ είναι vN κανονικός.

(ii) ⇒ (i) Έστω $I \subseteq R$ ένα αριστερό ιδεώδες. Καθώς ο R είναι αριστερά της Noether, το I είναι π.π. (ως αριστερό R-πρότυπο). Καθώς ο R είναι vN κανονικός, υπάρχει $e = e^2 \in R$ με $I = Re$.
Ισχυρισμός: $R = I \oplus R(1-e)$ Απόδειξη: Αν $r \in R$ τότε:
$r = r \cdot 1 = r(e + (1-e)) = re + r(1-e) \in Re + R(1-e) = I + R(1-e)$
Αν $s \in I \cap R(1-e) = Re \cap R(1-e)$ τότε μπορώ να γράψω $s = xe$ και $s = y(1-e)$ για κατάλληλα $x, y \in R$. Συνεπώς, $s = xe = xe^2 = xee =$
$= se = y(1-e)e = y(e - e^2) = y \cdot 0 = 0$

Αναπαραστάσεις Πεπερασμένων Ομάδων

Αν G ομάδα και k ένας μεταθετικός δακτύλιος, ορίζω την άλγεβρα kG της ομάδας G επί του k ως εξής:
$kG = \{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n \,/\, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in k, g_1, g_2, \ldots, g_n \in G\}$
Ορίζω τη δομή ενός k-προτύπου ως εξής:
- πρόσθεση (με παράθεση των προσθετέων)

$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n) + (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_k h_k) =$
$= \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n + \mu_1 h_1 + \cdots + \mu_k h_k$

• δράση του k

$\lambda(\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n) = (\lambda\lambda_1)g_1 + \dots + (\lambda\lambda_n)g_n$

Συμβατικά, γράφω τα στοιχεία του kG ως αθροίσματα $\sum_{g\in G} \lambda_g g$ όπου $\lambda_g = 0$ για κάθε $g \in G$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος.

Έτσι, η k-γραμμική δομή γράφεται ως εξής:

$$\sum_{g\in G} \lambda_g g + \sum_{g\in G} \mu_g g = \sum_{g\in G} (\lambda_g + \mu_g) g \quad \text{και} \quad \lambda\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g\in G} (\lambda\lambda_g) g$$

k μεταθετικός δακτύλιος, G ομάδα

$kG = \{ \sum_{g\in G} \lambda_g g \;/\; \lambda_g \in k \;\; \forall g\in G$ και $\lambda_g = 0$ σχεδόν $\forall g \in G \}$

$\boxed{\text{μάθημα } 19^{\circ} \quad 3/4/19}$

Πολλαπλασιαστική δομή: $\Big(\sum_g \lambda_g g\Big)\Big(\sum_h \mu_h h\Big) = \sum_g \sum_{xy=g} (\lambda_x \mu_y) g$

<u>Παραδείγματα</u>

1) $G = \mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$kG = k[t, t^{-1}] = \{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda_n t^n \;/\; \lambda_n = 0 \;\; \forall |n| \gg 0 \}$ πολυώνυμα Laurent

2) $G = \mathbb{Z}^2$

$kG = k[t, t^{-1}, u, u^{-1}] \qquad (-17, 26) \in \mathbb{Z}^2 \longleftrightarrow t^{-17} u^{26}$

3) $G = \mathbb{Z}^2 / \langle (2,-5) \rangle \qquad (2,-5) \equiv (0,0)$

$kG = k[t, t^{-1}, u, u^{-1}] / (t^2 u^{-5} - 1) = k[t, t^{-1}, u, u^{-1}] / (t^2 - u^5)$

4) $G = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\langle n \rangle$

$kG = k[t, t^{-1}] / (t^n - 1) = k[t]/(t^n - 1) \quad (t^{-1} = t^{n-1} \in k[t]/(t^n - 1))$

5) $G = (\mathbb{Q}, +)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \frac{1}{3!} & & \frac{1}{3!} = 4 \cdot \frac{1}{4!} & & & & & & \\ \mathbb{Z} \subseteq & \frac{1}{2!}\mathbb{Z} & \subseteq & \frac{1}{3!}\mathbb{Z} & \subseteq & \frac{1}{4!}\mathbb{Z} & \subseteq & \frac{1}{5!}\mathbb{Z} & \subseteq & \dots & \subseteq \mathbb{Q} \\ & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & & & \\ & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & & & \\ & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & & & \\ & & & k[t, t^{-1}] & \dashrightarrow & k[t, t^{-1}] & & & & & \\ & & & t^1 & & t^4 & & & & & \end{array}$$

$k\mathbb{Q} = k[t^p \;/\; p \in \mathbb{Q}] \qquad \frac{a}{6} \leftrightarrow t^{a/6} = \sqrt[6]{t^a}$

6) $G = F_2 = \langle x, y\rangle$ (ελεύθερη ομάδα σε 2 γεννήτορες)

$kG = k\langle X, Y, X^{-1}, Y^{-1}\rangle$ (ελεύθερη) μη-μεταθετική που παράγεται (ως k-πρότυπο) από μονώνυμα της μορφής $X^{n_1}Y^{n_2}X^{n_3}\cdots Y^{n_{2k}}$, $k\in\mathbb{N}$, $n_i\in\mathbb{Z}$

7) $G = S_3$, $kG = \{\lambda_1 1 + \lambda_{12}(12) + \lambda_{13}(13) + \lambda_{23}(23) + \lambda_{123}(123) + \lambda_{132}(132) \,/\, \lambda_1, \lambda_{(12)}, \cdots \in k\}$

Παρατήρηση Έστω k μεταθετικός δακτύλιος, G ομάδα και E ένας άλλος δακτύλιος. Έστω $f : kG \to E$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε:

(i) Η σύνθεση $k \to kG \xrightarrow{f} E$ ($e\in G$ η μονάδα)

$\lambda \mapsto \lambda e$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων

(ii) Η σύνθεση $G \hookrightarrow U(kG) \hookrightarrow kG \xrightarrow{f} E$ ορίζει έναν ομομορφισμό ομάδων $G \to U(E)$, που κάνει το διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} G \subseteq U(G) & \hookrightarrow & kG \\ \downarrow & & \downarrow f \quad \text{μεταθετικό.} \\ U(E) & \hookrightarrow & E \end{array}$$

Αντίστροφα, αν $f_0 : k \to E$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων και $\varphi : G \to G(E)$ είναι ομομορφισμός ομάδων, τότε ορίζεται ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f : kG \to E$ με $f\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g\in G} f_0(\lambda_g)\varphi(g) \in E$

Συμπέρασμα

$\{$ομομορφισμοί δακτυλίων $kG \to \boxed{?}\} \equiv \{$ομομορφισμοί δακτυλίων $k \to \boxed{?}\} \times$
$\times \{$ομομορφισμοί ομάδων $G \to U\boxed{?}\}$

Ειδική περίπτωση $E = End(M, +)$

Ορισμοί Έστω $(M,+)$ μια αβελιανή ομάδα και G μια ομάδα.

Μια δράση της G στην M είναι ένας ομομορφισμός ομάδων:

$\rho : G \to \{f : M \to M \,/\, f \text{ ισομορφισμός}\} = U(End(M,+))$

Ισοδύναμα, μια δράση της G στην M είναι μια απεικόνιση:

$G\times M \to M \quad (g, x) \mapsto gx$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες: $g(x+y) = gx + gy \ \forall g\in G \ \forall x,y\in M$, $e\cdot x = x$, $(gh)x = g(h\cdot x)$

Κατά συνέπεια, η αβελιανή ομάδα $(M,+)$ είναι ένα kG-πρότυπο ανν η M είναι ένα k-πρότυπο και η ομάδα G δρα στο M με ισομορφισμούς (k-προτύπου)

ακόμα πιο ειδική περίπτωση: Έστω F ένα σώμα και V ένας F-δ.χ. Το V λαμβάνει τη δομή ενός FG-προτύπου ανν έχω επιπλέον έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho: G \to GL(V)$

όπου $GL(V) = \{f: V \to V \mid f$ F-γραμμικός ισομορφισμός$\}$

Πχ Αν $V = F^n$ (με την κανονική βάση), τότε $E = End_F V \cong M_n(F)$ και άρα ο V λαμβάνει τη δομή ενός FG-προτύπου αν έχω έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho: G \to GL_n(F)$

Θέλω να μελετήσω kG-πρότυπα

1) Πότε είναι ο kG ημιαπλός?

Πρόταση Αν ο kG είναι ημιαπλός, τότε $|G| < \infty$

απόδειξη Ο τετριμμένος ομομορφισμός $g: G \to U(k)$, $g \mapsto 1$ επάγει έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\varepsilon: kG \to k$, ο οποίος καλείται

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g\right)$$

ομομορφισμός επαύξησης (augmentation map). Έστω $I = \ker\varepsilon \subseteq kG$ (το ιδεώδες επαύξησης) Αν ο kG είναι ημιαπλός, τότε υπάρχει αριστερό ιδεώδες $J \subseteq kG$ με $kG = I \oplus J$. Είναι αναγκαστικά $J \neq 0$ και άρα υπάρχει $a \in J\setminus\{0\}$ Γράφω $a = \sum_{g\in G} a_g g \in J \subseteq kG$ και επιλέγω

$g_0 \in G$ με $a_{g_0} \neq 0$. Ισχυρισμός: $a_{xg_0} \neq 0$ $\forall x \in G$ ($\rightsquigarrow |G| < \infty$)

απόδειξη Αν $x \in G$ τότε $1-x \in \ker\varepsilon$ καθώς

$\varepsilon(1-x) = \varepsilon(1_k e + (-1_k)\cdot x + 0\cdot x' + 0\cdot x'' + \cdots) = 1_k - 1_k = 0 \in k$.

Άρα $1-x \in I$ και συνεπώς $(1-x)a \in I \cap J = 0$. Έτσι είναι:

$(1-x)a = 0 \Rightarrow a = xa \Rightarrow \underbrace{\cdots + a_{g_0} g_0 + \cdots}_{\left(a = \sum_g a_g g\right)} = x\left(\sum_g a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g xg =$

$= \sum_{h\in G} a_{x^{-1}h} h \qquad xg = h \Leftrightarrow g = x^{-1}h$. Άρα $a_{g_0} = a_{x^{-1}g_0}$

Θεωρώ πεπερασμένη ομάδα G.
Ερώτημα: Πότε είναι ο δακτύλιος kG ημιαπλός?
απάντηση: Ο kG είναι ημιαπλός $\Leftrightarrow$ ο k είναι ημιαπλός + $|G|\cdot 1 \in U(k)$
(Maschke)

K μεταθετικός δακτύλιος, G ομάδα.
kG ημιαπλός $\Rightarrow |G| < \infty$

μάθημα 13^{o}
8/4/19

Θεώρημα Αν $|G|<\infty$, τότε $(kG$ ημιαπλός$) \Leftrightarrow (K$ ημιαπλός και $|G|\cdot 1 \in U(K))$

Λήμμα Αν R είναι δακτύλιος και $N \subseteq M$ ένα R-υποπρότυπο τότε υπάρχει υποπρότυπο $L \subseteq M$ με $M = N \oplus L$ ανν υπάρχει R-γραμμική απεικόνιση $f: M \to N$ με $f|_N = I_N: N \to N$
απόδειξη "$\Rightarrow$" Θεωρώ την απεικόνιση $f: \underbrace{N\oplus L}_{M} \to N$ με $f(n+l)=n$

$\forall\, n+l \in N\oplus L = M$. Αν $n \in N$ τότε $f(n+0)=n$
"$\Leftarrow$" Θδο $M = N \oplus \ker f$. Έστω $x \in N \cap \ker f$, τότε $f(x)=x$ (αφού $x\in N$) και $f(x)=0$ (αφού $x \in \ker f$). Άρα $x=0$.
Αν $y \in M$ τότε $y = f(y) + (y - f(y))$ με $f(y) \in N$ και $y - f(y) \in \ker f$.
(καθώς $f(y-f(y)) = f(y) - f(\underbrace{f(y)}_{\in N}) = f(y) - f(y) = 0$)

Λήμμα Αν K είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, G είναι ομάδα και $g \in G$ με $o(g) = n < \infty$ τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα $f \in kG$:
(i) $(1-g)f = 0 \in kG$
(ii) $f = (1+g+g^2+\cdots+g^{n-1})\cdot \eta$, για κάποιο $\eta \in kG$

Απόδειξη: (ii) ⇒ (i) Είναι $(1-g)(1+g+\dots+g^{n-1})\eta = (1-g^n)\eta = 0\cdot \eta = 0$

(i) ⇒ (ii) Γράφω $\xi = \sum_{x\in G} a_x x$ και έχω $\xi = g\xi \Rightarrow \sum_{x\in G} a_x\cdot x = \sum_{x\in G} a_x g x \overset{gx=y}{=}$

$\underset{x=g^{-1}y}{=} \sum_{y\in G} a_{g^{-1}y}\, y = \sum_{x\in G} a_{g^{-1}x}\, x$

Συνεπώς είναι $a_x = a_{g^{-1}x}$ $\forall x\in G$, δηλαδή $a_{gx} = a_x$ $\forall x\in G$

Άρα για $x\in G$ οι συντελεστές $a_x, a_{gx}, a_{g^2x}, \dots, a_{g^{n-1}x}$ είναι ίσοι.

Συνεπώς μπορώ να ομαδοποιήσω τους προσθετέους στο άθροισμα $\sum_{x\in G} a_x\cdot x$ ως εξής: $\dots + a_x(x+gx+g^2x+\dots+g^{n-1}x) + \dots$ $=$

$= \dots + (1+g+g^2+\dots+g^{n-1})a_x x + \dots$ $=$

$= (1+g+g^2+\dots+g^{n-1})\cdot \underbrace{[\dots + a_x x + \dots]}_{:=\eta}$

απόδειξη θεωρήματος

(⇒) Ο ομομορφισμός επαύξησης $\varepsilon: kG \to k$ είναι επί και άρα ο $k \simeq kG/\ker\varepsilon$ είναι ημιαπλός. Για ν.δ.ο $|G|\cdot 1 \in U(k)$ αρκεί ν.δ.ο για κάθε πρώτο αριθμό p με $p \mid |G|$ είναι $p\cdot 1 \in U(k)$. Αν ο p είναι ένας τέτοιος πρώτος, γνωρίζω ότι υπάρχει $g\in G$ με $o(g)=p$. Ως ημιαπλός, ο δακτύλιος kG είναι vN κανονικός και άρα $\exists t\in kG$ με $(1-g)t(1-g) = 1-g \Rightarrow (1-g)[t(1-g)-1] = 0$. Από το λήμμα μπορώ να γράψω $t(1-g)-1 = (1+g+g^2\dots+g^{n-1})\tau$ για κάποιο $\tau\in kG$. Εφαρμόζοντας τον ομομορφισμό $\varepsilon: kG\to k$ έχω: $\varepsilon[t(1-g)-1] = \varepsilon[(1+g+\dots+g^{p-1})\tau] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon(t)\overset{0}{\varepsilon(1-g)} - \varepsilon(1) = \varepsilon(1+g+\dots+g^{p-1})\varepsilon(\tau) \Leftrightarrow -1 = p\cdot\varepsilon(\tau) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p[-\varepsilon(\tau)] = 1\in k$.

(⇐) Έστω M ένα kG-πρότυπο και $N\subseteq M$ ένα kG-υποπρότυπο. Καθώς ο k είναι ημιαπλός, υπάρχει από το λήμμα k-γραμμική απεικόνιση $f: M\to N$ με $f|_N = I_N$

Θεωρώ την απεικόνιση $F: M\to N$ με $F(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}f(gx) \in N$ $\forall x\in M$

Είναι:

- αν $x\in N$ τότε $gx\in N$ $\forall g\in G$ και άρα $f(gx) = gx\in N$ $\forall g\in G$.

Συνεπώς $F(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}f(gx) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}gx = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = x$

- η F είναι k-γραμμική καθώς $F = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\circ f\circ g$.

- η F είναι $\mathbb{C}G$-γραμμική: Αν $x\in M$ και $h\in G$ τότε:

$$F(hx) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}f(ghx) \overset{gh=\gamma}{\underset{g=\gamma h^{-1}}{=}} \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in G} h\gamma^{-1}f(\gamma x) = h\Big[\frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in G}\gamma^{-1}f(\gamma x)\Big]$$

$$= hF(x)$$

Από το λήμμα προκύπτει ότι $M = N \oplus \underbrace{\ker F}_{\mathbb{C}G\text{-υποπρότυπο}}$

<u>Πόρισμα</u> Αν $|G|<\infty$, τότε ο δακτύλιος $\mathbb{C}G$ είναι ημιαπλός.

<u>Λήμμα</u> Αν D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος που περιέχει το $\mathbb{C}$ ως υποδακτύλιο του κέντρου του ("η D είναι μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα") και $\dim_{\mathbb{C}} D<\infty$ τότε $D=\mathbb{C}$

<u>απόδειξη</u> Έστω $d\in D$. Οι δυνάμεις $1, d, d^2, d^3, \dots$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικά εξαρτημένες και άρα υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\in\mathbb{C}$ με $\lambda_n\neq 0$ ώστε $\lambda_0 1+\lambda_1 d+\dots+\lambda_n d^n = 0\in D$

Υποθέτω ότι n είναι το ελάχιστο δυνατό και θεωρώ το $f(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\dots+\lambda_n x^n\in\mathbb{C}[X]$. Αν $n>1$ μπορώ να γράψω $f(x)=g(x)h(x)$ με $g(x), h(x)\in\mathbb{C}[X]$ και $\deg g, \deg h<\deg f$.

Είναι $0=f(d)=g(d)h(d)\in D$ και άρα $g(d)=0$ ή $h(d)=0$. (άτοπο λόγω του ελαχιστικού χαρακτήρα του n) Άρα $n=1$, δηλαδή $\lambda_0+\lambda_1 d=0 \Rightarrow d=-\lambda_0\lambda_1^{-1}\in\mathbb{C}$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $|G|<\infty$ τότε υπάρχουν $r, n_1, n_2, \dots, n_r\in\mathbb{N}$ ώστε:

$$\mathbb{C}G = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

Γνωρίζουμε ότι, τότε υπάρχουν ακριβώς r το πλήθος (μη-ισόμορφα ανά δύο) απλά $\mathbb{C}G$-πρότυπα $V_1, V_2, \dots V_r$ όπου $V_i=\mathbb{C}^{n_i}$ (ως $\mathbb{C}$-δχ) $i=1,\dots,r$.

M <u>$1^η$ περίπτωση</u>: $n_i=1$

Μονοδιάστατες αναπαραστάσεις. Γνωρίζουμε ότι αυτές αντιστοιχούν σε ομομορφισμούς $\rho: G\to GL_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$. Είναι $|G|<\infty$ και άρα $\operatorname{im}\rho\subseteq\{\text{ρίζες του } 1\}\subseteq\{z\in\mathbb{C} / z^n=1 \text{ για κάποιο } n>0\}\subseteq S^1\subseteq\mathbb{C}^*$

Αναγκαστικά είναι $[G,G]\subseteq\ker\rho$ και άρα η ρ επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων $\bar\rho: \underbrace{G/[G,G]}_{G_{ab}}\to\mathbb{C}^*$

Πόρισμα Το πλήθος των 1-διάστατων αναπαραστάσεων της G είναι ίσο με την τάξη της $G_{ab} = G/[G,G]$

απόδειξη Αρκεί ν.δ.ο το πλήθος των ομομορφισμών $G_{ab} \to \mathbb{C}^*$ είναι ίσο με $|G_{ab}|$. Γενικά, αν A είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα, γράφω $A = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ για κάποια $n_1, n_2, \dots, n_k$ και έχω ότι:

$Hom(A, \mathbb{C}^*) \cong Hom(\mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{C}^*) \oplus Hom(\mathbb{Z}_{n_2}, \mathbb{C}^*) \oplus \cdots \oplus Hom(\mathbb{Z}_{n_k}, \mathbb{C}^*)$

Όμως $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{C}^*) \underset{\substack{\text{μη κανονικό} \\ \text{τρόπο}}}{\cong} \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ και άρα είναι $|Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{C}^*)| = n \ \forall n$

Συνεπώς $|Hom(A, \mathbb{C}^*)| = \prod_{i=1}^{k} |Hom(\mathbb{Z}_{n_i}, \mathbb{C}^*)| = \prod_{i=1}^{k} n_i = |A|$

Πρόταση Έστω G μια αβελιανή ομάδα και M ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$. Αν το M είναι ένα απλό $\mathbb{C}G$-πρότυπο, τότε και μόνο τότε $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$.

απόδειξη Θδο $\forall g \in G$ υπάρχει $\lambda_g \in \mathbb{C}$ με $gv = \lambda_g v \ \ \forall v \in M$.

Έστω $g \in G$. Καθώς $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ η γραμμική απεικόνιση $g: M \to M$ έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Θδο. $M = \{v \in M / gv = \lambda v\} := N$

Για το σκοπό αυτό, αρκεί ν.δ.ο το N είναι ένα $\mathbb{C}G$-υποπρότυπο του M.

Όμως αν $h \in G$ και $v \in N$, τότε $g(hv) = ghv = hgv = h(gv) = h(\lambda v) = \lambda hv$
$\Rightarrow hv \in N$.

G ομάδα

$\left\{\substack{\text{1-διάστατες αναπαραστάσεις} \\ \text{(οι κλάσεις των ισομορφισμών τους)}}\right\} \longleftrightarrow Hom(G/[G,G], \underset{GL_1(\mathbb{C})}{\underbrace{\mathbb{C}^*}})$

μάθημα 14ο
10/4/19

Πρόταση Έστω $p_1: G \to GL_n(\mathbb{C})$ και $p_2: G \to GL_n(\mathbb{C})$ δύο n-διάστατες $\mathbb{C}$ αναπαραστάσεις της ομάδας G. Τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Τα $\mathbb{C}G$-πρότυπα $V_1 = \mathbb{C}^n$ και $V_2 = \mathbb{C}^n$ που επάγονται από τους ομομορφισμούς p_1 και p_2 αντίστοιχα είναι ισόμορφα

(ii) Υπάρχει $A \in GL_n(\mathbb{C})$ ώστε $p_2(g) = A p_1(g) A^{-1} \ \forall g \in G$

Στην περίπτωση αυτή, οι <u>αναπαραστάσεις</u> p_1 και p_2 καλούνται <u>ισοδύναμες</u>

απόδειξη Σταθεροποιώ μια βάση του $\mathbb{C}$-δχ. $\mathbb{C}^n$ και τον αντίστοιχο

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \simeq M_n(\mathbb{C})$

(i) ⇒ (ii) Έστω $f: V_1 \to V_2$ ένας ισομορφισμός $\mathbb{C}G$-προτύπων. Ειδικότερα, η f είναι ένας ισομορφισμός $\mathbb{C}$-δ.χ. τ.ω. $f(gv) = g f(v) \in V_2$, $\forall v \in V_1, \forall g \in G$

δηλ $f(\rho_1(g) v) = \rho_2(g) f(v)$ $\forall v \in V, \forall g \in G$ $\Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f \circ \rho_1(g))(v) = (\rho_2(g) \circ f)(v)$ $\forall v \in V, \forall g \in G \Leftrightarrow f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ $\forall g \in G$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \arrow[d, "f"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Η ισότητα $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ $\forall g \in G$ είναι ότι $\rho_2(g) = f \circ \rho_1(g) \circ f^{-1}$. Αν $A \in GL_n(\mathbb{C})$ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στον f έχω το ζητούμενο.

(ii) ⇒ (i) (ίδια)

Πόρισμα Έστω $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathbb{C}^*$ ομομορφισμοί ομάδων και V_1, V_2 τα αντίστοιχα $\mathbb{C}G$-πρότυπα ($V_1 = \mathbb{C} = V_2$ ως $\mathbb{C}$-δ.χ.). Τότε είναι:
$V_1 \simeq V_2$ ως $\mathbb{C}G$-πρότυπα ανν $\rho_1 = \rho_2$

απόδειξη Η ομάδα $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ είναι αβελιανή.

Παραδείγματα

1) $G = \mathbb{Z}_3$ αβελιανή ομάδα με γεννήτορα g $\langle g \rangle = \{1, g, g^2\}$

Άρα $\mathbb{C}G \simeq M_1(\mathbb{C}) \times M_1(\mathbb{C}) \times M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1$, δηλαδή υπάρχουν 3 μη-ισόμορφες 1-διάστατες αναπαραστάσεις

Εναλλακτικά είναι $G_{ab} = G$ και άρα υπάρχουν $|G_{ab}| = |G| = 3$ 1-διάστατες αναπαραστάσεις

Αυτές δίνονται από ομομορφισμούς ομάδων $\rho : G \to \mathbb{C}^*$

καθε ομομορφισμός χαρακτηρίζεται από την εικόνα του στον γεννήτορα

- ρ_1 τετριμμένος ομομορφισμός
- ρ_2 ομομορφισμός με $\rho_2(g) = w$, $\rho_2(g^2) = w^2$
- ρ_3 ομομορφισμός με $\rho_3(g) = w^2$, $\rho_3(g^2) = w^4 = w$ $(w = e^{2\pi i/3})$

	1	g	g^2
ρ_1	1	1	1
ρ_2	1	w	w^2
ρ_3	1	w^2	w

2) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{ \underset{(0,0)}{e}, \underset{(1,0)}{(12)(34)}, \underset{(0,1)}{(14)(23)}, \underset{(1,1)}{(13)(24)} \} \subseteq S_4$

$|G_{ab}| = |G|$ διότι G αβελιανή

Καθώς η G είναι αβελιανή, $\mathbb{C}G = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ και υπάρχουν ακριβώς 4 μονοδιάστατες αναπαραστάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε 4 ομομορφισμούς ομάδων $G \to \mathbb{C}^*$. Είναι $Hom(G, \mathbb{C}^*) = Hom(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*) \cong$
$\cong Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*) \oplus Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*)$ και άρα οι 4 ομομορφισμοί p_1, p_2, p_3, p_4 περιγράφονται ως εξής:

	e	$(12)(34)$	$(14)(23)$	$(13)(24)$
p_1	1	1	1	1
p_2	1	-1	1	-1
p_3	1	1	-1	-1
p_4	1	-1	-1	1

3) $G = S_3$ μη αβελιανή $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}S_3$ όχι μεταθετική.
Κατά συνέπεια, υπάρχει τουλάχιστον 1 μπλοκ $M_n(\mathbb{C})$ με $n \geq 2$ στη διάσπαση W-A της $\mathbb{C}S_3$. Με "πειραματισμούς" έπεται ότι η διάσπαση W-A της $\mathbb{C}S_3$ είναι η εξής: $\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$. Άρα υπάρχουν 2 μη-ισόμορφες 1-διάστατες αναπαραστάσεις και 1 2-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση.
Εναλλακτικά για τις 1-διάστατες αναπαραστάσεις, μπορώ να βρώ τους ομομορφισμούς $S_3 \to \mathbb{C}^*$. Είναι $(12)(13)(12)^{-1}(13)^{-1} = (132)(132) = (123)$ και άρα $(123) \in [S_3, S_3] \Rightarrow \langle(123)\rangle \subseteq [S_3, S_3]$. Επειδή η $S_3/\langle(123)\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ είναι αβελιανή έπεται ότι $\langle(123)\rangle = [S_3, S_3]$. Άρα $(S_3)_{ab} = S_3/_{[S_3,S_3]} =$
$= S_3/_{\langle(123)\rangle} \cong \mathbb{Z}_2$ με γεννήτορα την κλάση μιας αντιμετάθεσης.
Συνεπώς υπάρχουν 2 ομομορφισμοί $S_3 \to \mathbb{C}^*$ οι εξής:

- $S_3 \to S_3/\langle(123)\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\text{τετρ.}} \mathbb{C}^*$ (τετριμμένη)
- $S_3 \to S_3/\langle(123)\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ (πρόσημο)

$(12) \mapsto -1$, $(13) \mapsto -1$, $(23) \mapsto -1$ (γιατί είναι ίσες modulo τον μεταθέτη)
$(123) \mapsto 1$, $(132) \mapsto 1$ (επειδή είναι μεταθέτες πάνε στο 1)
$e \mapsto 1$.

Αν $V_0 = \mathbb{C}$ είναι η τετριμμένη αναπαράσταση, τότε για κάθε $a \in \mathbb{C}G$ και $v \in V \overset{\mathbb{C}}{=}$
είναι $av = \varepsilon(a) \cdot v \in \mathbb{C}$ όπου $\varepsilon: \mathbb{C}G \to G$ ο ομομορφισμός επαύξησης.
Γενικά $a = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ $\quad av = \sum \lambda_g \underbrace{p(g)}_{=1} \cdot v$

Αν $V_1 = \mathbb{C}$ είναι η αναπαράσταση πρόσημο, τότε για:

$a = \lambda_0 e + \lambda_1 (12) + \lambda_2 (23) + \lambda_3 (13) + \lambda_4 (123) + \lambda_5 (132) \in \mathbb{C}S_3$ και $v \in V_1 = \mathbb{C}$ είναι $av = (\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) v$

Η 2-διάστατη αναπαράσταση ?

1η μέθοδος Η S_3 δρα στη βάση e_1, e_2, e_3 του $V = \mathbb{C}^3$ (π.χ. $(12)e_1 = e_2$, $(12)e_2 = e_1$ και $(12) \cdot e_3 = e_3$) και άρα η S_3 δρα με γραμμικούς μετασχηματισμούς του V. (π.χ $(12)(4e_1 - 17e_2 + i \cdot e_3) = 4e_2 - 17e_2 + ie_3$). Έτσι το V αποκτά τη δομή ενός $\mathbb{C}S_3$-προτύπου. Ο δ. υπόχωρος $U = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ είναι S_3-αναλλοίωτος. (π.χ $(12)\sqrt{2}(e_1 + e_2 + e_3) = \sqrt{2}(e_2 + e_1 + e_3) \in U$) και άρα το U είναι ένα $\mathbb{C}S_3$-υποπρότυπο του V. Θεωρώ το $\mathbb{C}S_3$-πρότυπο πηλίκο V/U. Ως $\mathbb{C}$ δ.χ είναι $V/U = \mathbb{C}(e_1 + U) + \mathbb{C}(e_2 + U) + \mathbb{C}(e_3 + U) =$
$= \mathbb{C} \cdot \bar{e_1} + \mathbb{C} \cdot \bar{e_2} + \mathbb{C} \bar{e_3} = \mathbb{C} \cdot \bar{e_1} + \mathbb{C} \bar{e_2} = \mathbb{C} \cdot \bar{e_1} \oplus \mathbb{C} \bar{e_2}$
$\bar{e_3} = -\bar{e_1} - \bar{e_2}$

Για παράδειγμα θα υπολογίσω την δράση των στοιχείων αυτών $(12), (123) \in S_3$ στα διανύσματα της βάσης $\bar{e_1}, \bar{e_2}$ του V/U.

$(12)\bar{e_1} = \overline{(12)e_1} = \bar{e_2} = 0\,\bar{e_1} + 1 \cdot \bar{e_2}$

$(12)\bar{e_2} = \overline{(12)e_2} = \bar{e_1} = 1 \cdot \bar{e_1} + 0 \cdot \bar{e_2}$

$(123)\bar{e_1} = \overline{(123)e_1} = \bar{e_2} = 0 \cdot \bar{e_1} + 1 \cdot \bar{e_2}$

$(123)\bar{e_2} = \overline{(123)e_2} = \bar{e_3} = (-1)\bar{e_1} + (-1)\bar{e_2}$

Για τον επαγόμενο ομομορφισμό $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ είναι:

$$\rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(123) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: Το $\mathbb{C}S_3$-πρότυπο V/U είναι απλό.

S_3 2 1-διάστατες αναπαραστάσεις (την τετριμμένη και την αναπαράσταση-πρόσημο) | μάθημα 15° 15/4/19

1 2-διάστατη ανάγωγη

$V = \underbrace{\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3}_{\mathbb{C}(e_1+e_2+e_3)} = \mathbb{C}\bar{e}_1 + \mathbb{C}\bar{e}_2 + \mathbb{C}\bar{e}_3 = \mathbb{C}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_2 \; (\bar{e}_3 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2$

$g: S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$

$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ισχυρισμός: η 2-διάστατη αυτή αναπαράσταση της S_3 είναι ανάγωγη.

απόδειξη: Αν όχι, θα υπήρχαν δύο απλά $\mathbb{C}S_3$-υποπρότυπα $V_1, V_2 \leq V$ με $V = V_1 \oplus V_2$ και $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_2 = 1$. Γνωρίζοντας τις 2 1-διάστατες αναπαραστάσεις της S_3, έπεται ότι το $(123) \in S_3$ δρα με τετριμμένο τρόπο στο V_1 και στο V_2 (δηλαδή $(123) \cdot v = v$, $\forall v \in V_1 \cup V_2$). Συνεπώς το $(123) \in S_3$ δρα με τετριμμένο τρόπο στον $V_1 \oplus V_2 = V$, άτοπο (γιατί $\rho(123) \neq I_2$)

Ορισμός: Έστω R μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα (πχ $R = \mathbb{C}G$, G ομάδα) και M ένα R-πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$. Έστω $g: R \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} M$ ο αντίστοιχος ομομορφισμός δακτυλίων. Ορίζω την απεικόνιση:

$\chi_M: R \to \mathbb{C}$ θέτοντας $\chi_M(r) = tr(g(r): M \to M)$

Υπενθύμιση: $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} V \cong M_n(\mathbb{C})$, $n = \dim_{\mathbb{C}} V$

- αν $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ τότε $tr(AB) = tr(BA)$
- αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $P \in GL_n(\mathbb{C})$ τότε $tr(A) = tr(PAP^{-1})$
- αν $f: V \to V$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική τότε ορίζεται το $tr(f)$ ως η κοινή τιμή του $tr(A)$, όπου $A = (f: \hat{v}, \hat{v})$ ($\hat{v}$ διατεταγμένη βάση του V)

Παρατηρήσεις

1) $\forall r_1, r_2 \in R$ είναι $\chi_M(r_1 r_2) = \chi_M(r_2 r_1)$

Πράγματι, είναι: $\chi_M(r_1 r_2) = tr(g(r_1 r_2)) = tr(g(r_1) g(r_2)) \overset{!}{=}$
$= tr(g(r_2) g(r_1)) = tr(g(r_2 r_1)) = \chi_M(r_2 r_1)$

2) $\forall r_1, r_2 \in R$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι $\chi_M(r_1 + r_2) = \chi_M(r_1) + \chi_M(r_2)$ και $\chi_M(\lambda r) = \lambda \chi_M(r)$

Πράγματι, $\chi_M(r_1 + r_2) = tr(g(r_1 + r_2)) = tr(g(r_1) + g(r_2)) =$

$= tr(g(r_1)) + tr(g(r_2)) = \chi_M(r_1) + \chi_M(r_2)$

3) Η απεικόνιση $\chi_M : R \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και ο πυρήνας $\ker \chi_M$ περιέχει τον δ-υπόχωρο $[R,R]$ = {διανυσματικός υπόχωρος του R που παράγεται από τα $rr'-r'r$ ($r,r' \in R$)}. Συνεπώς μπορώ να θεωρήσω τον χαρακτήρα χ_M ως μια γραμμική απεικόνιση $\chi_M : R/_{[R,R]} \to \mathbb{C}$

$$\chi_M(r+[R,R]) = tr(g(r))$$

4) Αν $R=\mathbb{C}G$, τότε ο δ.χ. πηλίκο $\mathbb{C}G/_{[\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]}$ έχει βάση το σύνολο $\mathcal{C}(G)$ των κλάσεων συζυγίας της G. $x\sim y \Leftrightarrow \exists g\in G : y = g^{-1}xg$

Αν $x\in G$ συμβολίζω με $[x]$ την κλάση συζυγίας του και θέτω $\mathcal{C}(G) = \{[x] / x\in G\}$. Θεωρώ την απεικόνιση πηλίκο $\pi : G \to \mathcal{C}(G)$, $g \mapsto [g]$ και τη γραμμική της επέκταση $\Pi : \mathbb{C}G \to \bigoplus_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{C}[g]$

Καθώς η π είναι επί, η Π είναι επίσης επί.

Ισχυρισμός $\ker\Pi = [\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]$ (και άρα $\frac{\mathbb{C}G}{[\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]} \xrightarrow{\bar{\Pi}} \mathrm{im}\,\Pi = \bigoplus_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{C}[g]$, $g+[\mathbb{C}G,\mathbb{C}G] \mapsto [g]$)

"$\supseteq$" Ο δ.χ. $[\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]$ παράγεται από τα $gh-hg$, $g,h\in G$ και άρα αρκεί ν.δ.ο. $\Pi(gh-hg)=0$. Όμως είναι $\Pi(gh-hg) = \pi(gh)-\pi(hg) =$
$= [gh]-[hg] = 0$ γιατί τα $gh, hg \in G$ είναι συζυγή ($gh = h^{-1}\,hg\,h$)

"$\subseteq$" Έστω $\xi = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \ker\Pi$. Είναι $\xi = \sum_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \sum_{x\in[g]} \lambda_x x$

και $\Pi(\xi) = \sum_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \left(\sum_{x\in[g]} \lambda_x [x] \right) = \sum_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \left(\sum_{x\in[g]} \lambda_x [g] \right) =$

$= \sum_{[g]\in\mathcal{C}(G)} \left(\sum_{x\in[g]} \lambda_x \right) [g]$

Καθώς $\Pi(\xi) = 0$ είναι $\sum_{x\in[g]} \lambda_x = 0 \in \mathbb{C}$ $\forall [g] \in \mathcal{C}(G)$

Για ν.δ.ο. $\xi \in [\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]$ αρκεί ν.δ.ο. $\sum_{x\in[g]} \lambda_x x \in [\mathbb{C}G,\mathbb{C}G]$ $\forall [g]\in\mathcal{C}(G)$

Όμως είναι: $\sum_{x\in[g]} \lambda_x x = \lambda_g g + \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x x = \left(- \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x \right) g + \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x x =$

$= \sum_{\substack{x\in[g] \\ x\neq g}} \lambda_x (x-g)$

Αρκεί συνεπώς ν.δ.ο $x-g \in [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$ $\forall [g] \in \mathcal{C}(G)$ $\forall x \in [g]$.

Πράγματι, αν $x = a^{-1}ga$, τότε $x-g = a^{-1}ga - g = a^{-1} \cdot ga - ga \cdot a^{-1} \in [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]$

5) Αν M είναι ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ τότε μπορώ να θεωρήσω τον χαρακτήρα χ_M ως μια απεικόνιση $\chi_M : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$

$$[g] \mapsto tr\,\rho(g)$$

6) Αν $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$, τότε ο χαρακτήρας $\chi_M : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ είναι η απεικόνιση με $\chi_M[g] = \rho(g) \in \mathbb{C}^*$

Πίνακας Χαρακτήρων της S_3

	1	(12)	(123)	
χ_1	1	1	1	τετριμμένη
χ_2	1	-1	1	(αναπαράσταση-πρόσημο)
χ_3	2	0	-1	(2-διάστατη ανάγωγη)

Για τη 2-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση της S_3 είναι:

$\rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(123) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\rho(1) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση. Έστω R $\mathbb{C}$-άλγεβρα και M είναι R-πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$. Έστω $N \leq M$ είναι R-υποπρότυπο και M/N το R-πρότυπο πηλίκο. Τότε είναι $\chi_M = \chi_N + \chi_{M/N} : R \to \mathbb{C}$

απόδειξη. Έστω $r \in R$. Θέλω ν.δ.ο. $\chi_M(r) = \chi_N(r) + \chi_{M/N}(r) \in \mathbb{C}$ (*)

Έστω $f = g(r) : M \to M$, $f|_N = g(r)|_N = N \to N$, και $\bar{f} = \overline{g(r)} : M/N \to M/N$ οι επαγόμενες από το $r \in R$ $\mathbb{C}$-γραμμικές απεικονίσεις.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f|_N"'] & M \arrow[r, "\pi\rho o\beta"] \arrow[d, "f"] & M/N \arrow[d, "\bar{f}"] \\ N \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\pi\rho o\beta"] & M/N \end{tikzcd}$$

Για ν.δ.ο ισχύει η (*) αρκεί ν.δ.ο. ισχύει η ισότητα $tr(f) = tr(f|_N) + tr(\bar{f})$

Θεωρώ μια βάση $\hat{u} = \{e_1, \dots, e_k\}$ του δ.χ. N και την επεκτείνω σε μια βάση $\hat{v} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ του M. Τότε, μια βάση $\hat{w}$ του M/N αποτελούν τα $e_{k+1} + N, \dots, e_n + N$. Είναι:

$(f : \hat{v}, \hat{v}) = \left(\begin{array}{c|c} (f|_N : \hat{u}, \hat{u}) & * \\ \hline 0 & (\bar{f} : \hat{w}, \hat{w}) \end{array} \right)$ και άρα $\underbrace{tr(f)}_{tr(f : \hat{v}, \hat{v})} = \underbrace{tr(f|_N)}_{tr(f|_N : \hat{u}, \hat{u})} + \underbrace{tr(\bar{f})}_{tr(\bar{f} : \hat{w}, \hat{w})}$