μαθημα 3°
25/9/19

Πρόταση Εστω M ένα R-πρότυπο και $N \subseteq M$ ένα υποπρότυπο. Τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες

(i) το M είναι της Noether (αντ. του Artin)

(ii) τα N και M/N είναι της Noether. (αντ. του Artin)

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Noether. Κάθε R-υποπρότυπο $L \subseteq N$ είναι ασφαλώς υποπρότυπο του M. Καθώς το M είναι της Noether, το L είναι πεπ. παραγόμενο. Άρα το N είναι της Noether.

Εστω $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M/N. Τότε για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots$ υπάρχει υποπρότυπο $M_i \subseteq M$ με $M_i \supseteq N$ ώστε $X_i = M_i/N$. Καθώς είναι $X_i \subseteq X_{i+1}$ έπεται ότι $M_i = p^{-1}(X_i) \subseteq p^{-1}(X_{i+1}) = M_{i+1}$ $\forall i = 0, 1, 2, \dots$ (όπου $p : M \to M/N$ είναι η απεικόνιση πηλίκο) Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M: $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$

Καθώς το M είναι της Noether, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$ Συνεπώς έπεται ότι:

$$\underbrace{M_{n_0}/N}_{X_{n_0}} = \underbrace{M_{n_0+1}/N}_{X_{n_0+1}} = \underbrace{M_{n_0+2}/N}_{X_{n_0+2}} = \dots$$ και άρα το M/N είναι της Noether.

(ii) ⇒ (i) Artin. Εστω $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$ μια φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του M. Θεωρώ τις εξής δύο φθίνουσες ακολουθίες υποπροτύπων των N και M/N:

$M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \dots \supseteq M_n \cap N \supseteq \dots$ (N) και

$$\frac{M_0+N}{N} \supseteq \frac{M_1+N}{N} \supseteq \frac{M_2+N}{N} \supseteq \dots \supseteq \frac{M_n+N}{N} \supseteq \dots \quad (M/N)$$

Από την υπόθεση, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ είναι:

$$\boxed{M_{n_0} \cap N = M_n \cap N}_{(*)} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{M_{n_0}+N}{N} = \frac{M_n+N}{N}} \iff \boxed{M_{n_0}+N = M_n+N}_{(**)}$$

Καθώς $\forall n \geq n_0$ είναι $M_{n_0} \supseteq M_n$, οι ισότητες (*) και (**) δίνουν ότι $M_{n_0} = M_n$

Ορισμός Ο δακτύλιος R ονομάζεται <u>αριστερά της Noether</u> εάν το R-πρότυπο R είναι της Noether. (Ισοδύναμα ο R είναι αριστερά της Noether ανν δεν υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία

αριστερών ιδεωδών $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$
ανν κάθε μη-κενή οικογένεια αριστερών ιδεωδών έχει μεγιστικό στοιχείο
ανν κάθε αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι πεπερ. παραγόμενο.
Ο δακτύλιος R ονομάζεται αριστερό του Artin αν το R-πρότυπο R είναι του Artin.

Παρατηρήσεις
1) Έστω $A, B \subseteq M$ υποπρότυπα του R-προτύπου M. Αν τα A, B είναι της Noether (Artin) τότε το άθροισμα $A+B \subseteq M$ είναι επίσης της Noether (Artin).
απόδειξη Το ευθύ άθροισμα (Καρτεσιανό γινόμενο) $A \oplus B$ είναι του Artin καθώς το υποπρότυπο $A \oplus 0 \subseteq A \oplus B$ είναι του Artin. $(A \oplus 0 \cong A)$ και το πηλίκο $\frac{A \oplus B}{A \oplus 0} \cong \frac{B}{0} = B$ είναι του Artin.

Υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $\Sigma: A \oplus B \to A+B$ $(a,b) \mapsto a+b$ η οποία είναι επί

άρα $A+B \cong \frac{A \oplus B}{\ker \Sigma}$ το οποίο είναι του Artin.

2) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq M$ υποπρότυπα του R-προτύπου M τα οποία είναι της Noether (Artin). Τότε το άθροισμα $A_1 + A_2 + \dots + A_n \subseteq M$ είναι της Noether (Artin).
3) Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether (Artin) και M είναι ένα πεπ. παραγ. R-πρότυπο, τότε το M είναι της Noether (Artin)
απόδειξη Γράφω $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle + \dots + \langle x_n \rangle$ και άρα αρκεί ν.δ.ο. κάθε $\langle x_i \rangle \subseteq M$ είναι ένα R-πρότυπο της Noether.
Όμως υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $R \to \langle x_i \rangle$ $(r \mapsto r x_i)$ η οποία είναι

επί και άρα υπάρχει ισομορφισμός $\langle x_i \rangle \cong R/\ker f$
4) Αν F είναι ένα σώμα και V είναι F-δ.χ. με $\dim_F V < \infty$ τότε το F-πρότυπο V είναι της Noether και του Artin.
Αν όμως $\dim_F V = +\infty$ (ανδηλαδή ο F-δχ V δεν είναι πεπ. παραγόμενος) τότε το F-πρότυπο V δεν είναι ούτε της Noether ούτε

του Artin. Πράγματι, αν ο δ.χ. V δεν είναι πεπ. παραγόμενος, τότε υπάρχει ακολουθία γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων $v_1, v_2, \dots$ Οι ακολουθίες υποχώρων $\langle v_1\rangle \subset \langle v_1,v_2\rangle \subset \langle v_1,v_2,v_3\rangle \subset \cdots$ και
$\langle v_1,v_2,\dots\rangle \supset \langle v_2,v_3,\dots\rangle \supset \langle v_3,\dots\rangle \supset \cdots$ δείχνουν ότι ο V δεν είναι της Noether ούτε του Artin.

Παραδείγματα

1) Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}$ είναι της Noether αλλά όχι του Artin. (Με άλλα λόγια ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι της Noether αλλά όχι του Artin)

Noether: Γνωρίζουμε ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ είναι κύριο.

Artin: $(2)\supset(4)\supset(8)\supset(16)\supset\cdots$

2) Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $C_{2^\infty} := C = \{z\in\mathbb{C} \,/\, z^{2^n}=1$ για $n\geq 0\}$ (πολλαπλασιαστική ομάδα) είναι του Artin αλλά όχι της Noether.

[$C \cong (\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}, +)$ $\quad (e^{2\pi i/2^n} \longleftrightarrow \frac{1}{2^n}+\mathbb{Z})$]

Έστω $\zeta_n = e^{2\pi i/2^n}$ η πρωταρχική 2^n-οστή ρίζα της μονάδας και $C_n = \langle \zeta_n\rangle$, $n=0,1,2,\dots$ Η ακολουθία $C_0 \subsetneq C_1\subsetneq C_2 \subsetneq\cdots$ είναι γνήσια αύξουσα καθώς $C_n \subsetneq C_{n+1}$ και $|C_n| = 2^n < 2^{n+1} = |C_{n+1}|$

$\{z\in\mathbb{C}/z^{2^n}=1\} \hookrightarrow \{z\in\mathbb{C}/z^{2^{n+1}}=1\}$

Συνεπώς το $\mathbb{Z}$-πρότυπο C δεν είναι της Noether.

Όμως το $\mathbb{Z}$-πρότυπο C είναι του Artin, καθώς κάθε γνήσια υποομάδα $C' \subsetneq C$ είναι ίση με την C_n για κάποιο $n=0,1,2,\dots$

Απόδειξη: Είναι $C' \subsetneq C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ και άρα $\exists n\in\mathbb{N}$: $C_n \not\subseteq C'$

Επιλέγω τον $n\in\mathbb{N}$ να είναι ο ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα οπότε έχω $C_{n-1}\subseteq C'$. Θ.δ.ο. $C' = C_{n-1}$. Έστω $z\in C'$ με $o(z)=2^k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$.

• Αν $k\geq n$ τότε $o(z^{2^{k-n}}) = \frac{2^k}{\mu\kappa\delta(2^{k-n},2^k)} = 2^n$

[Αν $o(g)=\lambda$ τότε $o(g^s) = \frac{\lambda}{\mu\kappa\delta(s,\lambda)}$]

Συνεπώς ο $z^{2^{k-n}}$ είναι μια πρωταρχική 2^n-ρίζα της μονάδας και άρα $\langle z^{2^{k-n}}\rangle = C_n$. Όμως $\langle z^{2^{k-n}}\rangle \subseteq\langle z\rangle\subseteq C'$ Άτοπο.

• Αν $k\leq n-1$ τότε $z^{2^k}=1 \Rightarrow z^{2^{n-1}}=1$ και άρα $z\in\{w\in\mathbb{C}/w^{2^{n-1}}=1\} =$
$= C_{n-1}$. Τελικά $C'\subseteq C_{n-1}$

Παράδειγμα $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$

αριστερή συμπεριφορά

Το ιδεώδες $I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ελαχιστικό μη μηδενικό από τα

αριστερά καθώς $\forall \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ με $x \neq 0$ είναι $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Άρα αν $I_0 \subseteq I$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες με $I_0 \neq 0$ είναι $RI_0 \supseteq I$ και $RI_0 \subseteq I_0$. Συνεπώς $I_0 = I$.

Το R-πρότυπο πηλίκο R/I είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ (μέσω της $f: R \to \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ με $f\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = (\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ $\forall \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in R$. Είναι $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}(\alpha', \gamma') \overset{\text{o}}{=} (\alpha\alpha', \gamma\gamma') \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ και

άρα το υποσύνολο $\mathbb{R}\times 0 \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ είναι ένα ελαχιστικό μη-μηδενικό υποπρότυπο με πηλίκο $\frac{\mathbb{R}\times\mathbb{Q}}{\mathbb{R}\times 0} \simeq \mathbb{Q}$ το οποίο είναι επίσης ελαχιστικό μη-μηδενικό.

δεξιά συμπεριφορά Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \in R$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x\nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, για κάθε $\mathbb{Q}$-δ υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}$ μπορώ να θεωρήσω το δεξιό ιδεώδες $I_V = \left\{\begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / v \in V\right\}$. Καθώς $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ υπάρχουν

γνήσια αύξουσες και γνήσια φθίνουσες ακολουθίες $\mathbb{Q}$-δ υποχώρων του $\mathbb{R}$. Έτσι κατασκευάζω γνήσια αύξουσες και φθίνουσες ακολουθίες δεξιών ιδεωδών του R. $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots \subseteq \mathbb{R} \rightsquigarrow$

$I_{V_1} \subset I_{V_2} \subset \cdots \subseteq \mathbb{R}$

Ορισμός Ένα R-πρότυπο M καλείται απλό αν υπάρχουν ακριβώς δύο υποπρότυπα $N \subseteq M$, το $N = 0$ και το $N = M$.

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα R-πρότυπο M:
(i) Το M είναι απλό
(ii) $M \neq 0$ και $M = \langle x \rangle$ $\forall x \in M \setminus \{0\}$
(iii) $M \cong R/I$ για κάποιο γνήσιο μεγιστικό αρ. ιδεώδες $I \subseteq R$

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Αν $x \in M$ με $x \neq 0$ τότε για το $N = \langle x \rangle \subseteq M$ είναι $N \neq 0$ (καθώς $x \neq 0$) και άρα $N = M$
(ii) ⇒ (i) Αν $N \subseteq M$ είναι ένα $\neq 0$ υποπρότυπο και $x \in N$ με $x \neq 0$ τότε είναι $M = \langle x \rangle \subseteq N \subseteq M \Rightarrow N = M$
(i), (ii) ⇒ (iii) Έστω $x \in M \setminus \{0\}$ και $f: R \to M$ με $f(r) = rx \in M$ $\forall r \in R$. Είναι $\mathrm{im} f = \langle x \rangle = M$ και άρα $M \cong R/I$ όπου $I = \ker f$ (ένα αριστερό ιδεώδες του R). Είναι $M \neq 0 \Rightarrow R/I \neq 0 \Rightarrow I \neq R$.
Τα υποπρότυπα του $R/I \cong M$ είναι μόνο δύο, το $I/I = 0$ και το R/I. Άρα τα μόνα αριστερά ιδεώδη $J \subseteq R$ με $J \supseteq I$ είναι τα εξής δύο: το I και το R.
(iii) ⇒ (i) Είναι $I \neq R \Rightarrow R/I \neq 0 \Rightarrow M \neq 0$. Καθώς τα μόνα αριστερά ιδεώδη $J \subseteq R$ με $J \supseteq I$ είναι το I και το R προκύπτει ότι τα μόνα υποπρότυπα του R/I είναι το $I/I = 0$ και το R/I. Άρα το $M \cong R/I$ είναι απλό.

Πρόταση (Λήμμα Schur)
(i) Αν $f: M \to N$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο απλών R-προτύπων τότε $f = 0$ ή f ισομορφισμός
(ii) Αν M είναι ένα απλό R-πρότυπο, τότε ο υποδακτύλιος $\mathrm{End}_R M = \{f: M \to M \,/\, f \text{ γραμμική}\} \subseteq \mathrm{End}(M,+)$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος (όχι απαραίτητα μεταθετικό σώμα)
απόδειξη (i) Έστω ότι $f \neq 0$. Τότε $\mathrm{im} f \neq 0$ και άρα (καθώς το N είναι απλό) $\mathrm{im} f = N$, δηλαδή η f είναι επί. Επίσης $\ker f \neq M$ και άρα (καθώς το M είναι απλό) είναι $\ker f = 0$, δηλαδή η f είναι 1-1.
(ii) Καθώς το άθροισμα και η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση και $I_M \in \mathrm{End}_R M$, το $\mathrm{End}_R M \subseteq \mathrm{End}(M,+)$ είναι υποδακτύλιος. Από το (i) κάθε $f \in \mathrm{End}_R M \setminus \{0\}$ είναι αντιστρέψιμο

Ορισμός Αν $(M_\lambda)_\lambda$ είναι μια οικογένεια υποπροτύπων του R-προτύπου M το **άθροισμα** $\sum_\lambda M_\lambda$ ορίζεται ως $\langle \bigcup_\lambda M_\lambda \rangle$. Λέμε ότι το άθροισμα $\sum_\lambda M_\lambda$ είναι **ευθύ** και το γράφουμε ως $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ αν $\forall \lambda \in \Lambda$ είναι

$$M_\lambda \cap \Big(\sum_{\lambda' \neq \lambda} M_{\lambda'} \Big) = 0.$$

Παρατήρηση (για σύνολο δεικτών με 2 στοιχεία)
Αν $M_1, M_2 \subseteq M$ είναι υποπρότυπα του R-προτύπου M, τότε η γραμμική απεικόνιση $M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\Sigma} M_1 + M_2$ είναι επί και έχει πυρήνα
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$
$\ker \Sigma$ που δίνεται από την ισότητα $\ker \Sigma = \{(x,-x) \,/\, x \in M_1 \cap M_2\} \cong M_1 \cap M_2$
Συνεπώς η Σ είναι ισομορφισμός αν $M_1 \cap M_2 = 0$. (Τότε λέμε ότι το άθροισμα $M_1 + M_2$ είναι ευθύ).

Ορισμός Το R-πρότυπο M ονομάζεται **ημιαπλό** (semi-simple) αν $\forall$ R-υποπρότυπο $N \subseteq M$ υπάρχει υποπρότυπο $K \subseteq M$ με $M = N \oplus K$ (δηλαδή $M = N + K$ και $N \cap K = 0$)

Παρατήρηση: Αν το M είναι απλό, τότε το M είναι ημιαπλό.
$(0 \oplus M = M \,,\, M \oplus 0 = M)$

Πρόταση Έστω M είναι ημιαπλό R-πρότυπο και $N \subseteq M$ είναι υποπρότυπο. Τότε τα R-πρότυπα N και M/N είναι επίσης ημιαπλά.
απόδειξη Έστω $A \subseteq N$ ένα υποπρότυπο. Είναι $A \subseteq M$ και καθώς το M είναι ημιαπλό, υπάρχει υποπρότυπο $B \subseteq M$ με $M = A \oplus B$.
Θ.δ.ο. $N = A \oplus (B \cap N)$, δηλαδή ότι $A + (B \cap N) = N$ και $A \cap (B \cap N) = 0$
Είναι $A \cap (B \cap N) = (A \cap B) \cap N = 0 \cap N = 0$.
Καθώς $A \subseteq N$ είναι $A + (B \cap N) = (A + B) \cap N = M \cap N = N$
Αν $N' \subseteq M$ είναι ένα υποπρότυπο με $M = N \oplus N'$ τότε είναι:
$M/N = \dfrac{N' + N}{N} \cong \dfrac{N'}{N' \cap N} = N'/0 = N'$ ημιαπλό ως υποπρότυπο του M.

Πρόταση Αν το $M \neq 0$ είναι ημιαπλό R-πρότυπο τότε υπάρχει απλό πρότυπο $N \subseteq M$

__απόδειξη__ Έστω $x \in M$ με $x \neq 0$. Έστω $\mathcal{X} = \{M' \,/\, M' \subseteq M \text{ υποπρότυπο με } x \notin M'\}$

Είναι $\mathcal{X} \neq \emptyset$ (γιατί $0 \in \mathcal{X}$) Αν $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ είναι μια αλυσίδα, τότε το R-υποπρότυπο $M_0 = \cup \mathcal{Y}$ δεν περιέχει το x και είναι μεγαλύτερο από κάθε $M' \in \mathcal{Y}$. Συνεπώς είναι $M_0 \in \mathcal{X}$. Έστω $M' \in \mathcal{X}$ ένα μεγιστικό στοιχείο (Λήμμα Zorn). Μπορώ να βρω $N \subseteq M$ με $M = M' \oplus N$

__Ισχυρισμός__: N απλό.

__απόδειξη__ Είναι $x \notin M'$ και άρα $M' \subset M$ και άρα $N \neq 0$. Έστω ότι υπάρχει υποπρότυπο $0 \subset L \subset N$. Καθώς το N είναι ημιαπλό μπορώ να βρω $L' \subseteq N$ με $N = L \oplus L'$. Είναι $0 \subset L' \subset N$. Είναι $M' \subset M' \oplus L$ (διότι $L \neq 0$) $\Rightarrow x \in M' \oplus L$. Και $M' \subset M' \oplus L'$ (διότι $L' \neq 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in M' \oplus L'$ και άρα $x \in (M' \oplus L) \cap (M' \oplus L') \subseteq M = M' \oplus N =$
$= M' \oplus L \oplus L'$

$$(M' \oplus L + 0) \cap (M' \oplus 0 \oplus L')$$

Όμως είναι $(M' \oplus L) \cap (M' \oplus L') = M' \oplus 0 \oplus 0 = M'$ και άρα $x \in M'$ (άτοπο γιατί $M' \in \mathcal{X}$)

Λήμμα Έστω M ένα R-πρότυπο με $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ για κάποια απλά υποπρότυπα $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ και $N \subseteq M$ ένα υποπρότυπο. Τότε υπάρχει υποσύνολο $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ ώστε $M = N \oplus \left[\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda\right]$

$\boxed{\text{μάθημα } 5^{o} \quad 4/3/19}$

__απόδειξη__ Έστω $\mathcal{L} = \{\Lambda' \,/\, \Lambda' \subseteq \Lambda \text{ και το άθροισμα } N + \sum_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda \text{ είναι ευθύ}\}$ Είναι $\mathcal{L} \neq \emptyset$ καθώς $\emptyset \in \mathcal{L}$. Επίσης αν είναι $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ μια αλυσίδα τότε $\cup \mathcal{L}_0 \in \mathcal{L}$. Συνεπώς μπορώ να βρω μεγιστικό στοιχείο $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$. Είναι $N + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda = N \oplus \left[\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda\right]$ και μένει ν.δ.ο. $N + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda = M$.

Καθώς $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ αρκεί ν.δ.ο. $\forall \lambda' \in \Lambda$ είναι $M_{\lambda'} \subseteq N + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda$.

Έστω ότι αυτό δεν είναι σωστό για κάποιο $\lambda' \in \Lambda$. Τότε η τομή $M_{\lambda'} \cap \left[N + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda\right]$ δεν είναι ίση με το $M_{\lambda'}$. Καθώς το $M_{\lambda'}$

είναι απλό έπεται ότι $M_{\lambda'} \cap \left[N + \sum_{\lambda\in\Lambda_0} M_\lambda\right] = 0$. Άρα το άθροισμα

$N + \sum_{\lambda\in\Lambda_0} M_\lambda + M_{\lambda'}$ είναι ευθύ, δηλαδή $\Lambda_0 \cup \{\lambda'\} \in \mathcal{L}$. Λόγω του μεγιστικού

χαρακτήρα του $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$ είναι $\Lambda_0 \cup \{\lambda'\} = \Lambda_0 \Leftrightarrow \lambda' \in \Lambda_0 \Rightarrow M_{\lambda'} \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda_0} M_\lambda$

Αυτό είναι άτοπο καθώς $M_{\lambda'} \cap \left[\sum_{\lambda\in\Lambda_0} M_\lambda\right] = 0$

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα R-πρότυπο M

(i) το M είναι ημιαπλό

(ii) $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ με το $M_\lambda \subseteq M$ απλό $\forall \lambda \in \Lambda$

(iii) $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ με το $M_\lambda \subseteq M$ απλό $\forall \lambda \in \Lambda$.

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Έστω $\mathcal{S} = \{M' \subseteq M \,/\, M' \text{ απλό}\}$ και $N = \sum_{M'\in\mathcal{S}} M'$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει υποπρότυπο $L \subseteq M$ με $M = N \oplus L$.
Το L ως υποπρότυπο του M είναι ημιαπλό. Αν $L \neq 0$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει απλό πρότυπο $M_0 \subseteq L$. Όμως είναι $M_0 \in \mathcal{S}$ και άρα $M_0 \subseteq N$. Άρα $M_0 \subseteq L \cap N = 0$ άτοπο. Συνεπώς $L = 0$ δηλαδή $N = M$

(ii) ⇒ (iii) Έπεται από το προηγούμενο λήμμα για $N = 0$

(iii) ⇒ (ii) ✓

(ii) ⇒ (i) Έστω $N \subseteq M$ ένα υποπρότυπο. Από το λήμμα μπορώ να βρω $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ με $M = N \oplus \left[\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} M_\lambda\right]$

Πόρισμα Αν $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ με το M_λ ημιαπλό $\forall \lambda \in \Lambda$ τότε το M είναι επίσης ημιαπλό.

απόδειξη $\forall \lambda \in \Lambda$ μπορώ να γράψω $M_\lambda = \sum_{i\in X_\lambda} M_{\lambda,i}$ για κάποια κατάλληλη οικογένεια απλών υποπροτύπων $(M_{\lambda,i})_{i\in X_\lambda}$

Είναι $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i\in X_\lambda} M_{\lambda,i} = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ i\in X_\lambda}} \underbrace{M_{\lambda,i}}_{\text{απλά}} \xRightarrow{\text{πρόταση}} M$ ημιαπλό

Πρόταση Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για έναν δακτύλιο R:

(i) όλα τα R-πρότυπα είναι ημιαπλά.

(ii) όλα τα πεπ παραγ. R-πρότυπα είναι ημιαπλά.

(iii) το (αριστερό) R-πρότυπο R είναι ημιαπλό.

Στην περίπτωση αυτή ο δακτύλιος R καλείται αριστερά ημιαπλός

απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω M είναι R-πρότυπο και $x \in M$. Η απεικόνιση $f: R \to M$ με $f(r) = rx$ $\forall r \in R$ είναι γραμμική και άρα $\langle x \rangle = \operatorname{Im} f \cong R/\ker f$.

Συνεπώς το R-υποπρότυπο $\langle x \rangle \subseteq M$ είναι ημιαπλό. Άρα το $M = \sum_{x \in M} \langle x \rangle$ είναι ημιαπλό.

Πρόταση Κάθε αριστερά ημιαπλός δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether και αριστερά του Artin.

απόδειξη Γράφω ${}_R R = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ όπου τα $I_\lambda \subseteq R$ είναι ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη ($\equiv$ απλά υποπρότυπα του R) $\forall \lambda \in \Lambda$

Το ζητούμενο έπεται αν δ.ο $|\Lambda| < \infty$

Είναι $1 \in R = \bigoplus_\lambda I_\lambda = \sum_\lambda I_\lambda$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ ώστε $1 = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ όπου $r_i \in I_{\lambda_i}$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Ισχυρισμός: $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Αν υπάρχει $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ τότε $\forall r \in I_\lambda$ είναι:

$r = r \cdot 1 = r \cdot r_1 + r r_2 + \dots + r r_n \in I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \dots + I_{\lambda_n}$

άρα $r \in I_\lambda \cap (I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \dots + I_{\lambda_n}) = 0$. Συνεπώς $I_\lambda = 0$ άτοπο.

Στόχος αριστερά ημιαπλοί δακτύλιοι $\equiv \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ γινόμενο πινάκων με στοιχεία διαιρ.

στόχος D διαιρετικός δακτύλιος και $n \in \mathbb{N}$, τότε ο $M_n(D)$ είναι αριστερά ημιαπλός.

Ορισμός Ένας δακτύλιος R καλείται απλός αν τα μόνα ιδεώδη του R είναι το 0 και ο R.

Λημμα Αν ο R είναι απλός τότε ο $\mathbb{M}_n(R)$ είναι απλός $\forall n$

απόδειξη Εστω $I \subseteq \mathbb{M}_n(R)$ ένα ιδεώδες με $I \neq 0$. Εστω $A = (a_{ij}) \in I \setminus \{0\}$.
Υπάρχουν $i_0, j_0 \in \{1, 2, .., n\}$ με $a_{i_0 j_0} \neq 0$.
Είναι $E_{1 i_0} A E_{j_0 1} = \begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{i_0 j_0} E_{11} \in I$

Θεωρώ $J = \{ r \in R \,/\, r E_{11} \in I \}$. Το J είναι ένα ιδεώδες του R και $J \neq 0$ (καθώς $a_{i_0 j_0} \in J$). Άρα $J = R$ δηλαδή $1 \in J$ δηλαδή $E_{11} \in I$.
Όμως $\forall i, j \in \{1, 2, .., n\}$ είναι $E_{ij} = E_{i1} \underbrace{E_{11}}_{\in I} E_{1j} \in I$. Τελικά $\forall B = (B_{ij})$

Είναι $B = \sum_{i,j} B_{ij} E_{ij} = \sum_{i,j} (B_{ij} I_n) E_{ij} \in I$

Πόρισμα Αν D είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος τότε ο δακτύλιος $\mathbb{M}_n(D)$ είναι απλός.

Πρόταση Ο $R = \mathbb{M}_n(D)$ είναι αριστερά ημιαπλός και μάλιστα ${}_R R \simeq V^n$ ως αριστερό R-πρότυπο, όπου V είναι το μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) απλό R-πρότυπο.

απόδειξη Εστω $V = D^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} / a_i \in D \right\}$. Θεωρώ το V ως $\mathbb{M}_n(D)$-πρότυπο

μέσω του πολλαπλασιασμού πινάκων. Το V είναι ένα απλό $\mathbb{M}_n(D)$-πρότυπο.
Πράγματι, $\forall v \in V$ με $v \neq 0$ είναι $\mathbb{M}_n(D) \cdot v = V$.
Είναι $\mathbb{M}_n(D) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{I_1} \oplus \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & 0 \\ 0 & * & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{I_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\}}_{I_n}$

$\simeq V \oplus V \oplus \cdots \oplus V = V^n$

Μένει νδο. το V είναι το μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) απλό R-πρότυπο

Γράφω για R-πρότυπα M, N $\underline{Hom_R(M, N)} = \{ f : M \to N \,/\, f \text{ γραμμική} \}$

Παρατηρήσεις

1) Εστω A, B, Γ τρία R-πρότυπα. Η απεικόνιση:
$\lambda : Hom_R(A, B \oplus \Gamma) \to Hom_R(A, B) \oplus Hom_R(A, \Gamma)$
$f \mapsto (p_B f, p_\Gamma f)$, όπου $p_B : B \oplus \Gamma \to B$ και

μάθημα 6°
6/3/19

$P_\Gamma : B\oplus\Gamma \to \Gamma$ είναι οι προβολές, είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "p_B f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "p_\Gamma f"] & \\ B & B\oplus\Gamma \arrow[l, "p_B"] \arrow[r, "p_\Gamma"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

Η αντίστροφη λ^{-1} είναι η απεικόνιση:

$$\lambda^{-1}: Hom_R(A,B)\oplus Hom_R(A,\Gamma) \to Hom_R(A, B\oplus\Gamma)$$
$$(g,h) \to \left(\begin{array}{l} \mu(g,h): A \to B\oplus\Gamma \\ \quad \alpha \mapsto (g(\alpha), h(\alpha)) \end{array}\right)$$

2) Αν $A, B_1, \dots, B_n$ είναι R-πρότυπα, τότε η απεικόνιση:

$$Hom_R(A, \bigoplus_{i=1}^{n} B_i) \to \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_R(A,B)$$

$$f \mapsto (p_{B_i} f)_i$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

3) Αν A, B, Γ είναι R-πρότυπα, τότε η απεικόνιση:

$$\nu: Hom_R(A\oplus B, \Gamma) \to Hom_R(A,\Gamma)\oplus Hom_R(B,\Gamma)$$
$$f \mapsto (f i_A, f i_B)$$

όπου $i_A: A \to A\oplus B$, $\alpha \mapsto (\alpha, 0)$ και $i_B: B \to A\oplus B$, $\beta \mapsto (0,\beta)$

είναι οι προφανείς εμφυτεύσεις, είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f i_A"'] & A\oplus B \arrow[d, "f"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "f i_B"] \\ & \Gamma & \end{tikzcd}$$

Η αντίστροφη ν^{-1} είναι η απεικόνιση:

$$\sigma: Hom_R(A,\Gamma)\oplus Hom_R(B,\Gamma) \to Hom_R(A\oplus B, \Gamma)$$
$$(g,h) \mapsto \sigma(g,h)$$

με $\sigma(g,h)(\alpha,\beta) = g(\alpha) + h(\beta) \in \Gamma \quad \forall (\alpha,\beta)\in A\oplus B$

4) Αν $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ είναι R-πρότυπα, τότε η απεικόνιση

$$Hom_R(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i, B) \to \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_R(A_i, B)$$

$$f \mapsto (f i_{A_1}, f i_{A_2}, \dots, f i_{A_n})$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

5) Αν A, B, Γ, Δ, E είναι R-πρότυπα, τότε υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων $\mathrm{Hom}_R(A \oplus B, \Gamma \oplus \Delta \oplus E) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \Gamma \oplus \Delta \oplus E) \oplus$
$\oplus \mathrm{Hom}_R(B, \Gamma \oplus \Delta \oplus E) \simeq$
$\simeq \mathrm{Hom}_R(A,\Gamma) \oplus \mathrm{Hom}_R(A,\Delta) \oplus \mathrm{Hom}_R(A,E) \oplus \mathrm{Hom}_R(B,\Gamma) \oplus \mathrm{Hom}_R(B,\Delta) \oplus$
$\oplus \mathrm{Hom}(B,E)$.

6) Αν A είναι ένα R-πρότυπο και $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει ισομορφισμός

$$\mathrm{End}_R A^n = \mathrm{Hom}_R(A^n, A^n) \simeq \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{n}\right] n \simeq M_n(\mathrm{End}_R A)$$

$\mathrm{Hom}_R(A,A) = \mathrm{End}_R A$

$\underline{\pi \chi}$ $\mathrm{Hom}_R(A \oplus A, A \oplus A) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_R(A,A) & \mathrm{Hom}_R(A,A) \\ \mathrm{Hom}_R(A,A) & \mathrm{Hom}_R(A,A) \end{pmatrix}$

$\mathrm{End}_R A^2$ $\qquad\qquad \simeq M_2(\mathrm{End}_R A)$

7) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ R-πρότυπα με $\mathrm{Hom}_R(A_i, A_j) = 0$ για $i \neq j$ και $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός:

$$\mathrm{End}_R A = \mathrm{Hom}_R(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n, A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n) \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_R(A_1,A_1) & \mathrm{Hom}_R(A_2,A_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_R(A_n,A_1) \\ \mathrm{Hom}_R(A_1,A_2) & \mathrm{Hom}_R(A_2,A_2) & & \mathrm{Hom}_R(A_n,A_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}_R(A_1,A_n) & \mathrm{Hom}_R(A_2,A_n) & & \mathrm{Hom}_R(A_n,A_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{End}_R(A_2) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \mathrm{End}_R(A_n) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{End}_R A_i$$

Πρόταση ($R = M_n(D) \simeq V^n$, V απλό R-πρότυπο) Κάθε απλό R-πρότυπο U είναι ισόμορφο με το V.

απόδειξη Έστω ότι υπάρχει ένα απλό R-πρότυπο U με $U \not\simeq V$. Γνωρίζουμε ότι $U \simeq R/I$ για κάποιο (γνήσιο) μεγιστικό αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$. Έστω $p: R \to R/I \simeq U$ ο ομομορφισμός πηλίκο. Είναι $p \neq 0$ καθώς $\mathrm{im}\, p = U \neq 0$. Όμως υπάρχει ισομορφισμός ομάδων $Hom_R(R,U) \simeq Hom_R(V^n,U) \simeq Hom_R(\bigoplus_{i=1}^{n} V, U) \simeq \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_R(V,U)}=0$

Ο από λήμμα Shur.

Πρόταση ($R = M_n(D) \simeq V^n$, V απλό R-πρότυπο)

Η απεικόνιση $\tau : D \to End_R V$ όπου $\tau(d): V \to V$ είναι η απεικόνιση

$d \mapsto \tau(d)$

με $\tau(d)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d \\ a_2 d \\ \vdots \\ a_n d \end{pmatrix} \in V \quad \forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ είναι ισομορφισμός αβελιανών

ομάδων με $\tau(1) = I_V$ και $\tau(dd') = \tau(d')\tau(d) \quad \forall d, d' \in D$.

Απόδειξη: Η τ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή $\tau(d) \in End_R V \ \forall d \in D$. Πράγματι:

Η $\tau(d)$ είναι προφανώς προσθετική. Αν $A = (d_{ij}) \in M_n(D) = R$ και

$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ τότε είναι $\tau(d)(Av) = \tau(d)\begin{pmatrix} \sum_j d_{1j} a_j \\ \sum_j d_{2j} a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_j d_{1j} a_j) d \\ (\sum_j d_{2j} a_j) d \\ \vdots \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \sum_j d_{1j} a_j d \\ \sum_j d_{2j} a_j d \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j d_{1j}(a_j d) \\ \sum_j d_{2j}(a_j d) \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 d \\ a_2 d \\ \vdots \\ a_n d \end{pmatrix} = A\,\tau(d)(v)$.

Η τ είναι προσθετική, δηλαδή $\tau(d_1 + d_2) = \tau(d_1) + \tau(d_2) \in End_R V, \ \forall d_1, d_2 \in D$

και "πολλαπλασιαστική" δηλαδή $\tau(d_1 d_2) = \tau(d_2) \circ \tau(d_1) \in End_R V$.

Πράγματι, αν $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ τότε $\tau(d_1 d_2)(v) = \begin{pmatrix} a_1 (d_1 d_2) \\ a_2 (d_1 d_2) \\ \vdots \\ a_n (d_1 d_2) \end{pmatrix}$

και $[\tau(d_2) \circ \tau(d_1)](v) = \tau(d_2)[\tau(d_1)(v)] = \tau(d_2)\begin{pmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_1 \\ \vdots \\ a_n d_1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (a_1 d_1) d_2 \\ (a_2 d_1) d_2 \\ \vdots \\ (a_n d_1) d_2 \end{pmatrix}$ Προφανώς είναι $\tau(1) = I_V$. Η τ είναι 1-1:

(ταυτοτική απεικόνιση (μονάδα του $End_R V$))

Έστω ότι υπάρχει $d \in D$ με $\tau(d) = 0$ και $d \neq 0$. Τότε είναι

$I_V = \tau(1) = \tau(d^{-1} d) = \tau(d)\tau(d^{-1}) = 0 \cdot \tau(d^{-1}) = 0$ (*)

Η τ είναι επί: Έστω $f: V \to V$ μια $R = M_n(D)$-γραμμική

απεικόνιση με $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ * \\ * \end{pmatrix}$. Έστω $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$. Τότε

$v = \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ και άρα $f(v) = f\left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = A f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= A\begin{pmatrix} d \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d \\ a_2 d \\ \vdots \\ a_n d \end{pmatrix} = T(d)(V) \quad \text{Άρα } f = T(d)$$

D διαιρετικός δακτύλιος

$R = M_n(D)$ ημιαπλός

Υπάρχει ένα μοναδικό απλό R-πρότυπο V με $R \simeq \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$ ως R-πρότυπο

$D^{op} = End_R V$

Παρατήρηση Αν $R_1, R_2, \ldots, R_n$ είναι αριστερά ημιαπλοί δακτύλιοι τότε ο $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ είναι επίσης αριστερά ημιαπλός δακτύλιος.

Πρόταση Αν $r \in \mathbb{N}$, $D_1, D_2, \ldots, D_r$ είναι διαιρετικοί δακτύλιοι και $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ τότε ο δακτύλιος $\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) = R$ είναι ημιαπλός

(i) Υπάρχουν ακριβώς r μη-ισόμορφα απλά R-πρότυπα, έστω $V_1, V_2, \ldots, V_r$

(ii) $R \simeq V_1^{n_1} \oplus V_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$ ως R-πρότυπα.

(iii) $D_i^{op} = End_R V_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$

μάθημα 7°
13/3/19

Γενικά: Αν $R_1, \ldots, R_n$ είναι δακτύλιοι και $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ τότε μπορώ να περιγράψω όλα τα R-πρότυπα ως εξής:

- Αν για $i = 1, 2, \ldots, n$ έχω ένα R_i-πρότυπο M_i τότε η αβελιανή ομάδα $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ λαμβάνει τη δομή ενός R-προτύπου ως εξής:

$(r_1, r_2, \ldots, r_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (r_1 x_1, r_2 x_2, \ldots, r_n x_n) \in M$

$\forall (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R$ και $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$

- Αντίστροφα, αν M είναι ένα R-πρότυπο και $e_1, e_2, \ldots, e_n \in R$ με $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, θεωρώ τις υποομάδες $M_1, M_2, \ldots, M_n \subset M$ που ορίζονται ως εξής:

$M_1 := e_1 M = \{e_1 x \mid x \in M\}$, $M_2 = e_2 M$, $\ldots$, $M_n = e_n M$

και έχω ότι: