ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών
ΕΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση (2018-19)
Προβλήματα

Στα παρακάτω συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

1. Να δειχθεί ότι η νόρμα
$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| \ : \ 0 \le t \le 1\}$$
στον $C([0,1])$ δεν προέρχεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

2. Έστω M και N κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Να δειχθεί ότι
$$\text{(i)} \qquad (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}\,, \qquad \text{(ii)} \qquad (M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp.$$

3. Στον $L^2(-1,1)$ θεωρούμε τους κλειστούς υπόχωρους
$$L^2_\alpha = \{f \in L^2(-1,1) \ : \ f(-t) = f(t) \ \ \sigma.\pi.\}$$
$$L^2_\pi = \{f \in L^2(-1,1) \ : \ f(-t) = -f(t) \ \ \sigma.\pi.\}$$
Να δειχθεί ότι $L^2(-1,1) = L^2_\alpha \oplus L^2_\pi$.

4. Έστω M ο κλειστός υπόχωρος του l^2 που αποτελείται από ακολουθίες της μορφής $x = (x_1, 2x_1, x_3, 0, x_5, 0, x_7, \ldots)$. (i) Να βρεθεί η γενική μορφή των στοιχείων του $M^\perp$. (ii) Δοθέντος ενός $x \in l^2$ να βρεθούν τα $y \in M$ και $z \in M^\perp$ που είναι τέτοια ώστε $x = y + z$.

5. (**) (i) Έστω $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ χώροι Hilbert. Ορίζουμε
$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(x_1, x_2) \ : x_1 \in \mathcal{H}_1\,, \ x_2 \in \mathcal{H}_2\}.$$
Το σύνολο αυτό γίνεται κατά φυσικό τρόπο γραμμικός χώρος. Δείξτε ότι αν ορίσουμε και το εσωτερικό γινόμενο
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle,$$
τότε ο $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ γίνεται χώρος Hilbert. (ii) Επεκτείνετε τον παραπάνω ορισμό στην περίπτωση μίας ακολουθίας $(\mathcal{H}_n)_{n=1}^\infty$ χώρων Hilbert και ορίστε τον $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$. Αποδείξτε ότι ο $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ είναι χώρος Hilbert. Αποδείξτε επίσης ότι αν όλοι οι $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι διαχωρίσιμοι, τότε και ο $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ είναι διαχωρίσιμος.

6. Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τελεστής για τον οποίο υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|Ax\| \ge c\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα $\mathrm{Ran}(A)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

7. Να δειχθεί ότι ο τελεστής A στον $L^2(0,1)$, όπου
$$(Af)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$
είναι φραγμένος.

8. Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το ουσιώδες supremum μίας πραγματικής μετρήσιμης συνάρτησης h στο Ω ορίζεται ως

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega g = \inf\{M > 0 \ : \ g(x) \leq M \ \ \sigma.\pi. \ \text{ στο } \Omega\}$$

Μία μετρήσιμη συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν $\operatorname{ess\,sup}|h| < +\infty$. Ο χώρος όλων των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων στο Ω συμβολίζεται με $L^\infty(\Omega)$ και είναι χώρος Banach αν εφοδιαστεί με τη νόρμα

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |h|.$$

Έστω $h \in L^\infty(\Omega)$ και έστω M_h ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής στον $L^2(\Omega)$,

$$(M_h f)(x) = h(x) f(x).$$

Να δειχθεί ότι (i) ο M_h είναι φραγμένος και $\|M_h\| = \|h\|_{L^\infty(\Omega)}$. (ii) $\sigma(M_h) = \operatorname{ess\,ran} h$ όπου $\operatorname{ess\,ran} h$ η *ουσιώδης εικόνα* της συνάρτησης h,

$$\operatorname{ess\,ran} h = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \mu\Big(\big\{x \in \Omega \ : \ |h(x) - \lambda| < \epsilon\big\}\Big) > 0\,, \ \text{για κάθε } \epsilon > 0\Big\}.$$

[$\mu(A)$ συμβολίζει το μέτρο Lebesgue του A]

9. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και το φάσμα των τελεστών της δεξιάς και αριστερής μετατόπισης S και S^* στον l^2.

10. Έστω P και Q οι ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υποχώρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle\,, \quad x \in \mathcal{H} \\
\text{(ii)} & \|Px\| \leq \|Qx\|\,, \quad x \in \mathcal{H} \\
\text{(iii)} & PQ = QP = P \\
\text{(iv)} & M \subset N.
\end{array}$$

11. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $A : l^2 \to l^2$ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,.$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $a_n \to 0$. [Υπόδειξη: για τη μία κατεύθυνση χρησιμοποιείστε την κλειστότητα του χώρου των συμπαγών τελεστών. Για την άλλη χρησιμοποιείστε απαγωγή σε άτοπο.]

12. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ασθενώς παραγωγίσιμη και $\psi \in C^\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και ισχύει ο γνωστός τύπος για την παράγωγο γινομένου.

13. Έστω $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in B(1)$. Να βρεθεί για ποια $\alpha \in \mathbb{R}$ η u:
(i) Είναι C^1 στη $B(1)$
(ii) Είναι ασθενώς παραγωγίσιμη
(iii) Ανήκει στο $W^{1,p}(B(1))$, όπου $p \geq 1$.

14. Να δειχθεί ότι η ανισότητα Sobolev

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} , \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) .$$

δεν ισχύει για κανένα $q \neq p^*$.

Επαναληπτικές ακσήσεις.

1. Έστω $y \in \mathcal{H}$ και π το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό

$$\pi(x) = \langle x, y \rangle , \quad x \in \mathcal{H} .$$

Να βρεθούν οι τελεστές π^*, $\pi^*\pi$ και $\pi\pi^*$.

2. Έστω K συμπαγής τελεστής και (x_n) φραγμένη ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν

$$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \text{ , για κάθε } y \in \mathcal{H},$$

τότε $Kx_n \to Kx$. [Υπόδειξη: θέσετε $y = K^*z$].

3. Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Να εξεταστεί αν είναι αληθείς οι παρακάτω προτάσεις:

   (1) αν $A^n = I$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ο A δεν είναι συμπαγής

   (2) αν $AB = 0$ τότε ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι συμπαγής

   (3) αν T_n συμπαγής, $n \in \mathbb{N}$, και $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε T συμπαγής

4. Στον χώρο $L^2(0,1)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ έστω ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $(Tf)(t) = h(t)f(t)$ όπου $h(t)$ συνεχής και φραγμένη. $h \in L^\infty(\Omega)$. Να αποδειχθεί ότι ο T δεν έχει ιδιοτιμές πεπερασμένης πολλαπλότητας. [Θεωρείστε γνωστό από τη θεωρία μέτρου ότι κάθε σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ θετικού Lesbesgue μέτρου μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων θετικού μέτρου]

5. Να βρεθεί η νόρμα του τελεστή Volterra στον $L^2(0,1)$,

$$Kf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

[Υπόδειξη. Δείξτε ότι $K^*K = L^{-1}$ για κατάλληλο τελεστή Sturm-Liouville L.]

6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Έστω $f, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\Omega)$, $\vec{F} = (f_1 \ldots, f_n)$ και $g \in H^1(\Omega)$. Ορίστε κατάλληλα την έννοια της ασθενούς λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \{a_{ij}(x)u_{x_i}\}_{x_j} = f + \mathrm{div}\vec{F}, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Στη συνέχεια αποδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.