Μάθημα 8ο ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 18/3/2019

Άσκηση. Να δειχθεί ότι

* $Ker(T^*) = Ran(T)^\perp$
* $\overline{Ran(T^*)} = Ker(T)^\perp$

Λύση: • $x \in Ker(T^*) \Leftrightarrow T^*x = 0 \Leftrightarrow \langle T^*x, y\rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{H} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle x, Ty\rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x \in Ran(T)^\perp$

• Από το προηγούμενο:
$\overline{Ran(T^*)} = Ran(T^*)^{\perp\perp} = Ker(T^{**})^\perp = Ker(T)^\perp$

Άσκηση: $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ P ορθογώνια προβολή $\Leftrightarrow P = P^2 = P^*$

Λύση:

$(\Rightarrow)$ Έστω $Ran(P) = M$. Έστω $x \in \mathcal{H}$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$

Τότε $x_1 = x_1 + 0$ άρα $P^2x = Px_1 = Px$

Έστω ακόμη $y = y_1 + y_2 \in \mathcal{H}$. Τότε $\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle$
$= \langle x_1, y_1\rangle + 0 = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle$

Άρα $P = P^*$

$(\Leftarrow)$ Έστω $(x_n) \subset Ran(P)$, $x_n \to x \in \mathcal{H}$, τότε $x_n = Py_n$

Άρα $Px = \lim Px_n = \lim P^2y_n = \lim Py_n = \lim x_n = x$

άρα $x \in Ran(P)$, άρα $Ran(P)$ κλειστός υπόχωρος

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε

$x = Px + (I-P)x$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x - Px \in Ran(P)^\perp \ \forall x \in \mathcal{H}$

Έστω $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$ αρκεί να δείξω ότι $\langle x - Px, Py\rangle = 0$

Έχουμε $\langle x - Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle - \langle Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle - \langle x, P^2y\rangle$
$= \langle x, Py\rangle - \langle x, Py\rangle = 0.$

Πρόταση: Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Το $\sigma(T)$ είναι μη κενό.

Απόδειξη:

Έστω αντίθετα ότι $\exists\, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \sigma(T) = \emptyset$. Τότε $T \neq 0$.

Έχουμε δει ότι για $|z| > \|T\|$ έχουμε:

$\|(T-z)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|z| - \|T\|}$, ειδικότερα, αν $|z| \geq 2\|T\|$

Τότε $\|(T-z)^{-1}\| \le \frac{1}{\|T\|}$. Έστω $x, y \in \mathcal{H}$.

Ορίζουμε $f(z) = \langle (T-z)^{-1}x, y \rangle$, $z \in \mathbb{C}$

Η f είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$, δηλαδή ακέραια.

Για $|z| > 2\|T\|$ έχουμε $|f(z)| \le \frac{1}{\|T\|} \|x\| \, \|y\|$.

Είναι φραγμένη και στο $D(2 \cdot \|T\|)$. Άρα f φραγμένη. Άρα (Θ. Liouville) f σταθερή.

Για $|z| > \|T\|$, $|f(z)| \le \|(T-z)^{-1}\| \, \|x\| \, \|y\| \le \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{|z| - \|T\|} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$

Άρα $f \equiv 0$. Άρα $(T-z)^{-1} = 0$. Άτοπο.

Θεώρημα: Το $\sigma(T)$ είναι ένα μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, το οποίο περιέχεται στο $\overline{D}(\|T\|)$. Επιπλέον η συνάρτηση $z \longrightarrow (T-z)^{-1}$ είναι αναλυτική από το $\rho(T)$ στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Παράδειγμα: Στον $L^2(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό)

Θεωρούμε $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχή και φραγμένη και τον τελεστή

$(Tf)(x) = h(x) \cdot f(x)$, $f \in L^2(\Omega)$

Τότε, $\sigma(T) = \overline{Ran(h)}$

($\subseteq$) Έστω $\lambda \in \sigma(T)$ και έστω ότι $\lambda \notin \overline{Ran(h)}$. Λόγω συμπάγειας $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $|\lambda - z| \ge \delta$ $\forall z \in \overline{Ran(h)}$ και $|\lambda - h(x)| \ge \delta$, $\forall x \in \Omega$

Άρα $(\lambda - h(x))^{-1}$ ορίζεται στο Ω και φράσεται από το $1/\delta$

Ορίζεται ο $S: L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$,

$(Sf)(x) = (h(x) - \lambda)^{-1} f(x)$ και είναι φραγμένος

Προφανώς $S(T-\lambda) = (T-\lambda)S = I$, άρα $T-\lambda$ αντιστρέψιμος, με φραγμένο αντίστροφο. Δηλαδή $\lambda \in \rho(T)$ Άτοπο

($\supseteq$) Έστω $\lambda \in \overline{Ran(T)}$ και έστω ότι $\lambda \notin \sigma(T)$.

Έστω $S = (T-\lambda)^{-1}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε μπάλα $B \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε $|h(x) - \lambda| < \varepsilon$, $\forall x \in B$.

[$\exists\, x_0$: τ.ω. $|h(x_0) - \lambda| < \varepsilon/2$, λόγω συνέχειας $\exists\, r > 0$: $|x - x_0| < r \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon/2$]

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 18/3/2019

Έστω $\chi(x)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της B. Άρα $\chi \in L^2(\Omega)$
τότε $(T-\lambda)S\chi = \chi \Rightarrow (h(x)-\lambda)(S\chi)(x) = \chi(x)$ και ειδικότερα
$(h(x)-\lambda)(S\chi)(x) = 1 \quad \forall x \in B \Rightarrow (S\chi)(x) = \frac{1}{h(x)-\lambda}$

Άρα $\|S\|^2 \geq \frac{\|S\chi\|^2}{\|\chi\|^2} \geq \frac{\int_\Omega \frac{1}{|h(x)-\lambda|^2}\chi^2(x)\,dx}{\int_\Omega \chi^2(x)\,dx} \geq 1/\varepsilon^2$

Αφού $\varepsilon > 0$ τυχόν, άτοπο

Πρόταση: Αν T αυτοσυζυγής τότε $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Απόδειξη:

Έστω $z = a + ib$, $b \neq 0$ θα δείξουμε ότι $z \in \rho(T)$

(i) "1-1" Έστω ότι $(T-z)x = 0$, $x \neq 0$. Τότε z ιδιοτιμή. Άτοπο

(ii) "Επί" (α) $Ran(T-z)$ κλειστή

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $\|(T-z)x\|^2 = \|(T-a)x - ibx\|^2$
$= \|(T-a)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2 - \cancel{2Re\langle (T-a)x, ibx\rangle}^{\,0} \geq |b|^2\|x\|^2$

Έστω $(y_n) \subseteq Ran(T-z)$, $y_n \to y \in \mathcal{H}$

Έστω $y_n = (T-z)x_n$. Τότε
$\|y_n - y_m\|^2 = \|(T-z)(x_n - x_m)\|^2 \geq |b|^2\|x_n - x_m\|^2$

Αφού (y_n) Cauchy και η (x_n) είναι Cauchy

Έστω $x = \lim x_n$ τότε $(T-z)(x) = \lim (T-z)x_n = \lim y_n = y$

Άρα $y \in Ran(T-z)$, άρα $Ran(T-z)$ κλειστή

(β) $Ran(T-z)$ πυκνή

$Ran(T-z)$ πυκνή $\Rightarrow \overline{Ran(T-z)} = \mathcal{H}$ όμως
$\overline{Ran(T-z)} = [Ker(T-z)^*]^\perp = Ker(T-\bar{z})^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$

επειδή οι ιδιοτιμές του T πραγματικές

Έχουμε $\|(T-z)x\| \geq |b| \cdot \|x\|$

Αν θέσουμε $y = (T-z)x$ τότε $\|(T-z)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|b|}\|y\|$

Άρα $z \in \rho(T)$ άτοπο

Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ λέγεται συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subset \mathcal{H}$ η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Παρατήρηση: Έστω $B = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| < 1\}$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν το σύνολο $\overline{T(B)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{H}$

Παρατήρηση: Αν $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ τότε για μια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$: $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ $(n \neq m)$. Άρα η $\overline{B}$ δεν είναι συμπαγές σύνολο (είναι κλειστό και φραγμένο)

Πόρισμα: Αν $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ τότε ο ταυτοτικός τελεστής I δεν είναι συμπαγής