Μάθημα 7ο ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/3/2019

Άσκηση: Να δειχθεί ότι:

- $Ker(T^*) = Ran(T)^\perp$
- $Ran(T^*) = Ker(T)^\perp$

Ειδικοί τύποι Τελεστών

Ορισμός: Ο $T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ λέγεται ισομετρία αν $\|Tx\| = \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{H}$

Ορισμός: Ένας ισομορφισμός χώρων Hilbert λέγεται μοναδιαίος τελεστής.

Άρα T μοναδιαίος $\Leftrightarrow$ (T ισομετρία και επί)

Παράδειγμα: Ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης στον ℓ^2
$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ είναι ισομετρία, δεν είναι μοναδιαίος.

Ορισμός: Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Για $x \in \mathcal{H}$ έστω $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$ τέτοια ώστε $x = x_1 + x_2$. Ο τελεστής που ορίζεται ως $Px = x_1$, ονομάζεται ορθογώνια προβολή στον M.

Παρατήρηση: Ισχύει:

$Px = x \Leftrightarrow x \in M$

$Px = 0 \Leftrightarrow x \in M^\perp$

Πρόταση: Αν ο $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ορθογώνια προβολή τότε $P = P^2 = P^*$.
Αντίστροφα, αν $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τω $P = P^2 = P^*$, τότε $Ran(P)$ είναι κλειστός υπόχωρος και ο P είναι ορθογώνια προβολή (στο $Ran(P)$)

Πρόταση: Αν $\{e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του κλειστού υπόχωρου M, τότε η ορθογώνια προβολή P επί του M, δίνεται από τη σχέση

$$Px = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

Αυτόσυζυγείς Τελεστές

Ορισμός: Ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται αυτοσυζυγής αν $T = T^*$.

Άρα T αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $x, y \in \mathcal{H}$

Πρόταση (Βασικές Ιδιότητες αυτοσυζυγών τελεστών)

(i) T_1, T_2 αυτοσυζυγείς $\Rightarrow$ $T_1 + T_2$ αυτοσυζυγής

(ii) T αυτοσυζυγής, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ λT αυτοσυζυγής

(iii) T_1, T_2 αυτοσυζυγείς $\Rightarrow$ $T_1 T_2$ αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $T_1 T_2 = T_2 T_1$

(iv) (T_n) αυτοσυζυγής, $T_n \to T$ $\Rightarrow$ T αυτοσυζυγής

(v) T αυτοσυζυγής $\Rightarrow$ $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$

Απόδειξη:

(iii) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* = T_2 T_1$ αυτό θα κάνει $T_1 T_2$ ανν $T_1 T_2 = T_2 T_1$

(iv) Έχουμε $\forall x, y \in \mathcal{H}$ $\langle T_n x, y\rangle = \langle x, T_n y\rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

άρα T αυτοσυζυγής

Πρόταση: T αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{H}$

Απόδειξη:

Ισχύει (μετά από πράξεις)

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right]$$

και παρόμοια

$$\langle x, Ty\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle + i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle\right]$$

Τα δεξιά μέλη είναι ίσα, άρα τα αριστερά είναι ίσα

άρα T αυτοσυζυγής

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής, τότε

(i) όλες οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές

(ii) ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους

Απόδειξη:

(i) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του T και $x \neq 0$ ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε
$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \implies \lambda = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$

(ii) Έστω λ, μ ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$

Έστω $Tx = \lambda x$ και $Ty = \mu y$ $(x, y \neq 0)$

$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$

Άρα αφού $\lambda \neq \mu \implies \langle x, y \rangle = 0$

Το φάσμα

Ορισμός: (i) Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Το επιλυτικό σύνολο $\rho(T)$ του T είναι το σύνολο όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $T - zI$ $(T - z)$ είναι 1-1 και επί με φραγμένο αντίστροφο.

(ii) Το φάσμα του T είναι το σύνολο $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$

Παρατηρήσεις:
- Κάθε ιδιοτιμή ανήκει στο φάσμα
- Αν $\dim(\mathcal{H}) < +\infty$ τότε το φάσμα συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοτιμών.
- $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{ \bar{z} : z \in \sigma(T) \}$

Έχουμε

$z \in \rho(T^*) \iff T^* - z$ αντιστρέψιμος (και φραγμένος αντίστροφος)

$\iff (T^* - z)^*$ — " —

$\iff T - \bar{z}$ — " —

$\iff \bar{z} \in \rho(T)$

Λήμμα: Αν $\|T\| < 1$ τότε ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και
$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Απόδειξη:

Έχουμε $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|} < +\infty$

δηλαδή η σειρά συγκλίνει απόλυτα. Έστω $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ $(\in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

αρκεί να δείξουμε ότι $S(I-T)=(I-T)S=I$

Έχουμε

$(I-T)S=(I-T)(I+T+T^2+\dots)=(I+T+T^2+\dots)-(T+T^2+T^3+\dots)=I$

και όμοια $S(I-T)=I$

Πρόταση: Ισχύει $\sigma(T)\subseteq\{z\in\mathbb{C}:|z|\le\|T\|\}$ και για $|z|>\|T\|$, $\|(T-z)^{-1}\|\le\frac{1}{|z|-\|T\|}$

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξω ότι αν $|z|>\|T\|$ τότε $z\in\rho(T)$

Έστω λοιπόν $|z|>\|T\|$

Έχουμε τότε

$z-T=z(I-z^{-1}T)$, $\|z^{-1}T\|=\frac{\|T\|}{|z|}<1$

άρα $I-z^{-1}T$ αντιστρέψιμος. Άρα $z-T$ αντιστρέψιμος και

$(z-T)^{-1}=z^{-1}(I-z^{-1}T)^{-1}$

Επιπλέον $\|(z-T)^{-1}\|=\frac{1}{|z|}\|(I-z^{-1}T)^{-1}\|\le\frac{1}{|z|}\frac{1}{1-\|z^{-1}T\|}=\frac{1}{|z|-\|T\|}$

Παρατήρηση: Αν $z\in\rho(T)$ τότε το πρόβλημα $(T-z)x=y$, $y\in\mathcal{H}$ είναι καλά τοποθετημένο. (Ύπαρξη, μοναδικότητα, συνεχής εξάρτηση)

Πρόταση: (i) Το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές

(ii) Η απεικόνιση $z\longrightarrow(z-T)^{-1}$, $\rho(T)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αναλυτική

Απόδειξη:

(i) Αρκεί να δείξω ότι $\rho(T)$ ανοικτό. Έστω $z_0\in\rho(T)$. Τότε $\forall z\in\mathbb{C}$

$z-T=(z_0-T)-(z_0-z)=(z_0-T)[I-(z_0-z)(z_0-T)^{-1}]$, άρα ο $z-T$ είναι αντιστρέψιμος αρκεί από το Λήμμα $\|(z-z_0)(z_0-T)^{-1}\|<1$, δηλαδή $|z-z_0|<\frac{1}{\|(z_0-T)^{-1}\|}$. Άρα $\rho(T)$ ανοικτό.

(ii) Για $|z-z_0|<1/\|(z_0-T)^{-1}\|$ έχουμε $(z-T)^{-1}=(z_0-T)^{-1}[I-(z_0-z)(z_0-T)^{-1}]^{-1}$

$=(z_0-T)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z_0-z)^n(z_0-T)^{-n}$ (της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z_0-z)^n$, $A_n\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$)