Μάθημα 6º ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/3/2019

Πρόταση: Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ είναι χώρος Banach

Απόδειξη:

Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε

$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|$

άρα η $(T_n x)$ είναι Cauchy στον $\mathcal{F}$. Ορίζουμε $Tx = \lim T_n x$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής.

Αφού η (T_n) είναι Cauchy είναι φραγμένη, άρα $\exists M>0$ τ.ω

$\|T_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα

$\|Tx\| = \lim\|T_n x\| \leq \lim \|T_n\|\|x\| \leq M\|x\|$, άρα T φραγμένος $(T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F}))$

Μένει να δείξουμε τη σύγκλιση

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω αν $n,m \geq n_0$ τότε $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε για $n,m \geq n_0$ $\quad \|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon \|x\|$

Παίρνουμε όριο $m \to \infty$ οπότε

$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\| \quad (n \geq n_0, x \in \mathcal{H})$ Άρα $\|T_n - T\| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow T_n \to T$

Παράδειγμα: Στον $L^2(\alpha,\beta)$ θεωρούμε τον τελεστή $(Tf)(x) = h(x) f(x)$

όπου $h:(\alpha,\beta) \to \mathbb{C}$, συνεχής και φραγμένη. Τότε $\|T\| = \underbrace{\sup_{x\in(\alpha,\beta)} |h(x)|}_{M}$

Απόδειξη:

Έστω $f \in L^2(\alpha,\beta)$ τότε $\|Tf\|^2 = \int_\alpha^\beta |h(x)\cdot f(x)|^2 dx \leq M^2 \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx = M^2 \cdot \|f\|^2$

άρα $\|T\| \leq M$.

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει ανοικτό, μη κενό διάστημα $I \subseteq (\alpha,\beta)$ τ.ω

$|h(x)| > M - \varepsilon \quad \forall x \in I$ $\quad$ (χ_I: χαρακτηριστική στο I)

Τότε $\|T\|^2 \geq \|T\chi_I\|^2 / \|\chi_I\|^2 = \dfrac{\int_\alpha^\beta |h(x)\cdot \chi_I(x)|^2 dx}{\int_\alpha^\beta |\chi_I(x)|^2 dx} = \dfrac{\int_I |h(x)|^2 dx}{|I|} \geq$ $\leftarrow$ μήκος του I

$\geq \int_I (M-\varepsilon)^2 dx / |I| = (M-\varepsilon)^2$

Αφού $\varepsilon > 0$ τυχόν $\quad \|T\| \geq M$

Άρα $\quad \|T\| = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} |h(x)|$

Παρατήρηση: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ορίζουμε

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \exists M > 0 \text{ τω } |f(x)| \le M \text{ σχεδόν παντού} \}$

χώρος Banach ως προς τη νόρμα. essential supremum

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{ M > 0 : |f(x)| \le M \text{ σπ στο } \Omega \} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)|$

επιπλέον, αν $f \in C(\Omega)$ τότε $\operatorname{esssup}|f(x)| = \sup|f(x)|$

Έστω $h \in L^\infty(\Omega)$ και έστω $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $(Tf)(x) = h(x) f(x)$

τότε T φραγμένος και $\|T\| = \|h\|_{L^\infty(\Omega)}$ (άσκηση)

Θεώρημα (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz)

Έστω $\Pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{H}$ ώστε $\Pi(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$, επιπλέον $\|\Pi\| = \|y\|$

Απόδειξη:

(i) μοναδικότητα

Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ τω $\Pi(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$, τότε $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$ δηλαδή $y_1 - y_2 \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$, άρα $y_1 = y_2$

(ii) Ύπαρξη

Αν $\Pi = 0$, τότε παίρνουμε $y = 0$.

Έστω $\Pi \neq 0$, τότε ο πυρήνας $\operatorname{Ker}(\Pi)$ είναι μη-κενός, κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Άρα υπάρχει $z \in \operatorname{Ker}(\Pi)^\perp$, $z \neq 0$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $\Pi(x) z - \Pi(z) x \in \operatorname{Ker}(\Pi)$

άρα $\langle \Pi(x) z - \Pi(z) x, z \rangle = 0 \Rightarrow \Pi(x) \|z\|^2 - \Pi(z) \langle x, z \rangle = 0$

$\Rightarrow \Pi(x) = \frac{\Pi(z)}{\|z\|^2} \langle x, z \rangle = \langle x, \frac{\overline{\Pi(z)}}{\|z\|^2} z \rangle \to y$

Τέλος για κάθε $x \in \mathcal{H}$ $|\Pi(x)| = |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \|y\|$ άρα $\|\Pi\| \le \|y\|$

και $\|\Pi\| \geq \frac{|\Pi(y)|}{\|y\|} = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} = \|y\|$

Άρα $\|\Pi\| = \|y\|$

ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/3/2019

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$. Υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{H})$ ώστε
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H},\, y \in \mathcal{F}$

Απόδειξη:

(i) Μοναδικότητα ... εύκολη

(ii) Ύπαρξη:

Έστω $y \in \mathcal{F}$ ορίζουμε $\Pi: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\Pi(x) = \langle Tx, y\rangle$

Το Π είναι γραμμικό και $|\Pi(x)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|T\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$ άρα $\|\Pi\| \leq \|T\|\cdot\|y\|$

Από το Θ.Αν.Riesz $\exists\, z \in \mathcal{H}$ τ.ω $\Pi(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$, δηλαδή
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$. Ορίζουμε $T^*y = z$. Ο T^*
είναι γραμμικός, επίσης $\|T^*y\| = \|z\| = \|\Pi\| \leq \|T\|\cdot\|y\|$

Άρα T^* φραγμένος και $\|T^*\| \leq \|T\|$

Από την κατασκευή έπεται ότι $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{H},\, y \in \mathcal{F}$

Ορισμός: Ο T^* ονομάζεται συζυγής του T

Πρόταση: Έστω $T, T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{K})$ τότε:

(i) $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

(iii) $T^{**} = T$

(iv) $(ST)^* = T^* S^*$

(v) $\|T^*\| = \|T\|$

(vi) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

(vii) αν T αντιστρέψιμος και $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{H})$ τότε T^* αντιστρέψιμος και
$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Απόδειξη:

(iv) Έστω $x \in \mathcal{H}$, $y \in K$ τότε $\langle STx, y\rangle_K = \langle Tx, S^*y\rangle_{\mathcal{F}} = \langle x, T^*S^*y\rangle_{\mathcal{H}}$

όμως $\langle STx, y\rangle_K = \langle x, (ST)^*y\rangle_H$ άρα $(ST)^* = T^*S^*$

(v) Ξέρουμε $\|T^*\| \leq \|T\|$

$\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$

Πρόταση: Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ και $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{K})$ τότε $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$

Απόδειξη:

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $\|STx\| \le \|S\|\,\|Tx\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\|$

(iv) Έχουμε $\|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$

επίσης $\|T\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx \rangle = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x \rangle$

$\le \sup\limits_{\|x\|=1} \|T^*Tx\|\,\|x\| = \|T^*T\|$

Παραδείγματα:

1 Να υπολογιστεί ο S^* όπου $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης

$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$

Έστω $x, y \in \ell^2$ τότε $\langle Sx, y \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle$

$= x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3 + x_3 \bar{y}_4 + \dots = \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots) \rangle$

Άρα $S^*y = (y_2, y_3, \dots)$ (τελεστής αριστερής μετατόπισης.)

2 Στον $L^2(\alpha,\beta)$ θεωρούμε τον τελεστή Volterra $(Tf)(x) = \int_\alpha^x f(s)\,ds$

Έστω $f, g \in L^2(\alpha,\beta)$ τότε

$\langle Tf, g \rangle = \int_\alpha^\beta (Tf)(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^x f(s)\,ds\,\overline{g(x)}\,dx$

$$\begin{array}{ccc} \alpha \le x \le \beta & & \alpha \le s \le \beta \\ & \Leftrightarrow & \\ \alpha \le s \le x & & s \le x \le \beta \end{array}$$

$= \iint_E f(s)\overline{g(x)}\,dA = \int_\alpha^\beta \int_s^\beta f(s)\overline{g(x)}\,dx\,ds = \int_\alpha^\beta f(s)\,\overline{\int_s^\beta g(x)\,dx}\,ds$

άρα $(T^*g)(s) = \int_s^\beta g(x)\,dx$