Μάθημα 4ο ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/2/2019

Λήμμα: Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονικό σύνολο. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{H}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει και για το $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ ισχύει $\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Ορισμός: Τα $\langle x, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, ονομάζονται συντελεστές Fourier του x ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}$

Απόδειξη: Έστω $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$, αρκεί να δείξουμε ότι η y_n συγκλίνει θα δείξουμε ότι είναι Cauchy

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ $m > n$ τότε

$\|y_m - y_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$ λόγω και της ανισότητας Bessel έχουμε ότι (y_n) είναι Cauchy, άρα η σειρά συγκλίνει

Έστω $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ τότε $\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Πρόταση: Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ ορθοκανονικό σύνολο και $L = \overline{\text{lin}\{e_n\}}$. Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. Τότε ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = L \oplus L^{\perp}$ έχουμε $x = y \oplus (x - y)$

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι $x - y \in L^{\perp}$ και για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\langle x - y, e_n \rangle = 0$ $\forall n$ Πράγματι

$\langle x - y, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_n \rangle = 0$

Πρόταση: Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονικό σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ $\forall x \in \mathcal{H}$

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ $\forall x \in \mathcal{H}$

(iii) Αν $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $x = 0$

(iv) $\overline{\text{lin}\{e_n\}} = \mathcal{H}$

Απόδειξη: (1) $\Rightarrow$ (2) Από το προηγούμενο

(2) $\Rightarrow$ (3) Προφανές

(3) $\Rightarrow$ (4) Το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με $\overline{\ell in\{e_n\}}^{\perp} = \{0\}$

Έστω ότι $\exists\, y \in \underbrace{\overline{\ell in\{e_n\}}^{\perp}}_{L^{\perp}}$ Τότε αφού $e_n \in L$

$<y, e_n> 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Άρα $y = 0$

(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω $y = \sum_{n=1}^{\infty} <x, e_n> e_n$ Έστω $n \in \mathbb{N}$ Τότε

$<x-y, e_n> = 0$ (το είδαμε πριν)

άρα $x - y \in \{e_n\}^{\perp} \rightsquigarrow x - y \in \overline{\ell in\{e_n\}}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow x = y$

Ορισμός: Ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, για το οποίο ισχύουν οι (1)-(4) ονομάζεται πλήρες ορθοκανονικό σύνολο ή ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

Παραδείγματα

1 Αν $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ τότε η έννοια συμπίπτει με την αντίστοιχη έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας.

2 Στον ℓ^2 το σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ όπου $e_n = (0, 0, \dots, \overset{n\text{-θέση}}{1}, 0, \dots)$ είναι ορθοκανονική βάση

3 Στον $L^2(0, 2\pi)$ το σύνολο $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ όπου
$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $x \in (0, 2\pi)$ είναι ορθοκανονική βάση

(Ότι είναι ορθοκανονικό σύνολο είναι απλές πράξεις
Η πληρότητα απο Fourier)

Άσκηση: M, N υπόχωροι του $\mathcal{H}$

(i) $(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$

(ii) $(M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}$

Λύση:

(i) ισχύει $M \subset M + N \Rightarrow (M+N)^{\perp} \subset M^{\perp}$ και όμοια $(M+N)^{\perp} \subset N^{\perp} \Rightarrow (M+N)^{\perp} \subset M^{\perp} \cap N^{\perp}$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/2/2019

Έστω $x \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$ και έστω $y \in M+N$, τότε $y = p+q$ $p \in M$, $q \in N$, άρα
$\langle x, y \rangle = \langle x, p \rangle + \langle x, q \rangle = 0$ Άρα $x \in (M+N)^{\perp}$

(ii) Έχουμε

$M \cap N \subset M \implies (M \cap N)^{\perp} \supset M^{\perp}$ άρα

$M \cap N \subset N \implies (M \cap N)^{\perp} \supset N^{\perp}$

$M^{\perp} + N^{\perp} \subseteq (M \cap N)^{\perp} \implies \overline{M^{\perp}+N^{\perp}} \subseteq \overline{(M \cap N)^{\perp}} = (M \cap N)^{\perp}$

Θέλουμε

$(M \cap N)^{\perp} \subseteq \overline{M^{\perp}+N^{\perp}}$

:

Άσκηση: Στον ℓ^2 έστω $A = \{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots) : \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1\}$
Να δείξουμε ότι $\overline{\operatorname{lin} A} = \ell^2$

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \perp A$ τότε $x = 0$
Έστω λοιπόν $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ τ.ω. $x_1 + x_2 \alpha + x_3 \alpha^2 + \dots = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| < 1$
Για $\alpha = 0$ παίρνουμε $x_1 = 0$
Άρα $x_2 \alpha + x_3 \alpha^2 + \dots = 0$ $\forall \alpha \rightsquigarrow x_2 + x_3 \alpha + x_4 \alpha^2 + \dots = 0$ $\forall \alpha \neq 0$
παίρνοντας $\alpha \to 0$ έχουμε $x_2 = 0$ κ.ο.κ Άρα $x = 0$