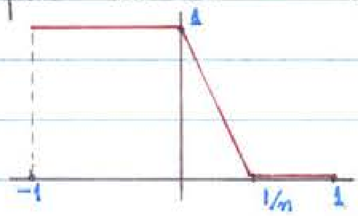
Μάθημα 2ο — ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση — 20/2/2019

Παράδειγμα: Ο $C([-1,1])$ δεν είναι χώρος Hilbert $\left(\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt\right)$

Ορίζουμε $f_n(t) = \begin{cases} 1 , & -1 \le t \le 0 \\ 1-nt , & 0 \le t \le 1/n \\ 0 , & 1/n \le t \le 1 \end{cases}$



Η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy (να το δείξουμε)

Θέλουμε να δείξουμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει. Έστω αντιθέτα ότι η $f_n \to f$

Έστω $\delta > 0$, για $n > 1/\delta$ έχουμε $f_n(t) = 0$ στο $[\delta, 1]$ άρα

$\|f_n - f\|^2 \ge \int_{\delta}^{1} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = \int_{\delta}^{1} |f(t)|^2 dt$, άρα $\int_{\delta}^{1} |f(t)|^2 dt = 0$

Άρα $f(t) = 0$ στο $[\delta, 1]$, άρα $f(t) = 0$ στο $[0,1]$ (αφού δ τυχόν)

Όμοια βρίσκουμε ότι $f(t) = 1$ στο $[-1, 0]$, άτοπο αφού θέλουμε f συνεχή

Πρόταση: Σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, αν

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$$

Ο $L^2(\mathbb{R})$

1) Ορίζουμε το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mu(E) \in [0, +\infty]$

E μετρήσιμο (γενίκευση της έννοιας του μήκους διαστήματος)

Αν $E_i \cap E_j \neq 0$, $i \neq j$ τότε $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

2) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

για συναρτήσεις $f(x)$ που είναι (Lebesgue) μετρήσιμες και τ.ω.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ (f αθροίσιμη ή ολοκληρώσιμη)

[Γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann]

3)
- Αν $f(t) \ge 0$ τότε $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \ge 0$
- Αν $f(t) \ge 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$ τότε $f(t) = 0$ σχεδόν παντού.

④ Ορίζουμε $\mathcal{L}^2(\alpha,b)=\{f:(\alpha,b)\to\mathbb{C}, L$ μετρήσιμες, $\int_\alpha^b |f(t)|^2 dt < +\infty\}$
Στον $\mathcal{L}^2(\alpha,b)$ ορίζουμε : $<f,g>:=\int_\alpha^b f(t)\overline{g(t)}dt$
ισχύουν οι (i), (ii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου
Έστω $<f,f>=0$ τότε $\int_\alpha^b |f(t)|^2 dt=0$ τότε $f(t)=0$ σχεδόν παντού
μπορεί δηλαδή $f\neq 0$.
(Η $\|f\|=\left(\int_\alpha^b |f(t)|^2\right)^{1/2}$ είναι ημι-νόρμα)

⑤ Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^2(\alpha,b)$
$f\sim g \iff f(t)=g(t)$ σ.π.
Ορίζουμε $L^2(\alpha,b)=\mathcal{L}^2(\alpha,b)/\sim$
Στον $L^2(\alpha,b)$ ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $<[f],[g]>:=\int_\alpha^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Στην πράξη αντιμετωπίζουμε τα στοιχεία του $L^2(\alpha,b)$ ως συναρτήσεις (και όχι ως κλάσεις συναρτήσεων) οι οποίες όμως ταυτίζονται αν είναι ίσες σχεδόν παντού.

Πρόταση: Ο χώρος $C([\alpha,b])$ είναι πυκνός στον $L^2(\alpha,b)$
(Γενικότερα για $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό ο $C(\overline{\Omega})$ είναι πυκνός του $L^2(\Omega)$)

Καθετότητα

Έστω X χώρος εσωτερικού γινομένου

Ορισμός: Αν $<x,y>=0$ τότε τα x,y λέγονται κάθετα ή ορθογώνια μεταξύ τους (Γράφουμε $x\perp y$)

Πρόταση: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)
Αν τα $x_1,x_2,\dots,x_n$ είναι κάθετα ανά 2 τότε:
$\|x_1+x_2+\dots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\dots+\|x_n\|^2$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $x\perp y \iff \|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\| \ \forall\, \lambda\in\mathbb{C}$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

20/2/2019

Ορισμός: Έστω $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$ και $\alpha \in X$. Η απόσταση του α από το K ορίζεται ως $d(\alpha, K) = \inf\{\|\alpha - x\| : x \in K\}$

Ορισμός: Το K λέγεται κυρτό αν $x, y \in K$, $\lambda \in (0,1) \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K$

Πρόταση: Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Έστω K κλειστό και κυρτό και $\alpha \in \mathcal{H}$. Υπάρχει μοναδικό $x \in K$ τ.ω. $d(\alpha, K) = \|\alpha - x\|$

Απόδειξη:

Έστω $d = d(\alpha, K)$, τότε $\exists\ (x_n) \subset K$ τ.ω. $\|\alpha - x_n\| \to d$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου στα $\alpha - x_n$, $\alpha - x_m$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|\alpha - x_n\|^2 + 2\|\alpha - x_m\|^2 - \|2\alpha - x_n - x_m\|^2 = 2\|\alpha - x_n\|^2 + 2\|\alpha - x_m\|^2 - 4\left\|\alpha - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\|\alpha - x_n\|^2 + 2\|\alpha - x_m\|^2 - 4d^2 \xrightarrow{m,n \to \infty} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

Άρα (x_n) Cauchy, άρα συγκλίνει

Έστω $x = \lim x_n$, το $x \in K$, άρα K κλειστό

Επίσης $\|\alpha - x\| = \lim \|\alpha - x_n\| = d$

Μοναδικότητα:

Έστω ένα άλλο $x' \in K$ τ.ω. $\|\alpha - x\| = d$ όπως πριν

$$\|x - x'\|^2 = 2\|\alpha - x\|^2 + 2\|\alpha - x'\|^2 - 4\left\|\alpha - \frac{x + x'}{2}\right\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

Άρα $x = x'$

Πρόταση: Έστω K κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και $\alpha \in \mathcal{H}$. Για το πλησιέστερο σημείο x του X στο α έχουμε $\langle \alpha - x, y \rangle = 0 \ \forall\, y \in K$

Απόδειξη:

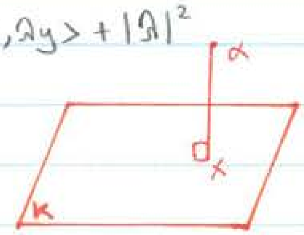
Έστω $y \in K$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|y\| = 1$

Έστω $\lambda = \langle \alpha - x, y \rangle$ τότε $x + \lambda y \in K$, έχουμε τότε

$$d^2 \leq \|\alpha - (x + \lambda y)\|^2 = \|(\alpha - x) - \lambda y\|^2 = \|\alpha - x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \alpha - x, \lambda y \rangle + |\lambda|^2$$

$$= d^2 - 2 \cdot \mathrm{Re}(\lambda \bar{\lambda}) + |\lambda|^2 = d^2 - 2|\lambda|^2 + |\lambda|^2 = d^2 - |\lambda|^2$$

Άρα $\lambda = 0$



Μάθημα 3ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   25/2/2019

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η $f_n(t) = \begin{cases} 1 & , \ -1 \le t \le 0 \\ 1-nt & , \ 0 \le t \le 1/n \\ 0 & , \ 1/n \le t \le 1 \end{cases}$ είναι Cauchy.

Λύση:

Έστω $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, dt = \int_0^{1/m} (nt - mt)^2 dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^2 dt$$

$$\le (n-m)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \le \frac{1}{3}\frac{m^2}{m^3} + \frac{1}{n} = \frac{4}{3n}$$

άρα (f_n) Cauchy

Άσκηση: $x \perp y \iff \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Λύση:

$(\Rightarrow)$ Εύκολο

$(\Leftarrow)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad 0 = \|x + \lambda y\|^2 - \|x - \lambda y\|^2 = 4 \, \mathrm{Re}\langle x, \lambda y \rangle$

Επιλέγουμε $\lambda = \langle x, y \rangle$ Τότε

$$0 = \mathrm{Re}\langle x, \lambda y \rangle = \mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x, y \rangle) = \mathrm{Re}\left(\overline{\langle x, y \rangle}\langle x, y \rangle\right) = |\langle x, y \rangle|^2 \Rightarrow x \perp y$$

Άσκηση: $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

Λύση: (α' τρόπος)

Υπάρχει $M > 0$ τ.ω $\|x_n\| \le M$, $\|y_n\| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|$$

$$\le |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \le \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$$

$$\le M \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \longrightarrow 0$$

(β' τρόπος) $\begin{cases} x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\| \text{ γνωστό} \\ \text{Πολική ταυτότητα} \end{cases}$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι στον $C([0,1])$ η νόρμα $\|f\|_{C([0,1])} = \max\limits_{0 \le t \le 1} |f(t)|$ δεν επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός μη-κενού συνόλου $M \subseteq \mathcal{H}$ είναι το $M^{\perp} = \{ y \in \mathcal{H} \ \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M \}$

Πρόταση: Το $M^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$

Παράδειγμα: Στον ℓ^2 να βρεθεί το $M^{\perp}$ όταν $M = \{ (x_1, 0, -x_1, 0, \ ), x_1 \in \mathbb{C} \}$

$M^{\perp} = \{ (y_1, y_2, y_1, y_3, y_4, \dots) \}$

Συμβολισμός: Αν $A, B \in \mathcal{H}$, $A, B \neq \emptyset$ τότε $A + B = \{ \alpha + \beta, \ \alpha \in A, \beta \in B \}$

Παρατήρηση: Αν M, N υπόχωροι του $\mathcal{H}$. $M + N = \underset{\text{γραμμική θήκη}}{\operatorname{lin}}(M \cup N) :=$ ο ελάχιστος υπόχωρος που περιέχει τα M, N.

Ορισμός: Έστω M, M_1, M_2 κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ λέμε ότι ο M είναι το ευθύ άθροισμα των M_1, M_2 $\quad M = M_1 \oplus M_2$, αν $M \supseteq M_1 + M_2$ και κάθε $x \in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$
Στη περίπτωση αυτή γράφουμε συχνά $x = x_1 \oplus x_2$

Παρατήρηση: Αν $M = M_1 \oplus M_2$, τότε $M_1 \cap M_2 = \{0\}$

Πρόταση: Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$, τότε $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$

Απόδειξη:

Έστω $x \in \mathcal{H}$. Έστω $x_1 \in M$ τω $\|x - x_1\| = d(x_1, M)$

Τότε $x - x_1 \perp M$ $\quad$ Θέτουμε $x_2 = x - x_1$

Άρα $x_2 \in M^{\perp}$ $\quad$ Άρα $x = x_1 + x_2$ $\quad x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$

Έστω ότι έχουμε επίσης

$x = x_1' + x_2'$, $x_1' \in M$, $x_2' \in M^{\perp}$ $\quad$ τότε

$x_1 - x_1' \in M$ και $\quad x_1 - x_1' = (x - x_2) - (x - x_2') = x_2' - x_2 \in M^{\perp}$

Άρα $\|x_1 - x_1'\|^2 = \langle \underset{\overset{\cap}{M}}{x_1 - x_1'}, \underset{\overset{\cap}{M^{\perp}}}{x_1 - x_1'} \rangle = 0$

άρα $x_1 = x_1' \Rightarrow x_2 = x_2'$

ΕΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 25/2/2019

Πρόταση: (i) Αν $M \subset N$ τότε $M^{\perp} \supset N^{\perp}$

(ii) $M \subset M^{\perp\perp}$

(iii) $M = M^{\perp\perp}$ ανν M κλειστός υπόχωρος

(iv) αν M πυκνό τότε $M^{\perp} = \{0\}$

(v) αν M υπόχωρος και $M^{\perp} = \{0\}$ τότε M πυκνό

Απόδειξη:

(i) εύκολο

(ii) Έστω $x \in M$, έστω $y \in M^{\perp}$ τότε $\langle x, y \rangle = 0$ άρα $x \in M^{\perp\perp}$

(iii) ($\Longrightarrow$) άμεσο αφού το ορθογώνιο συμπλήρωμα είναι κλειστός υπόχωρος

($\Longleftarrow$) Ξέρουμε ήδη $M \subset M^{\perp\perp}$

Έστω $x \in M^{\perp\perp}$ τότε γράφουμε $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$ (M κλειστός υπόχωρος)

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \underset{M^{\perp\perp}}{x}, \underset{M^{\perp}}{x_2} \rangle}_{0} = \underbrace{\langle x_1, x_2 \rangle}_{0} + \langle x_2, x_2 \rangle$$

άρα $x_2 = 0$ άρα $x = x_1 \in M$

(iv) Έστω $x \in M^{\perp}$. Έστω $(x_n) \in M$ τω $x_n \to x$ τότε

$0 = \langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle$ άρα $x = 0$

(v) Το $\bar{M}$ είναι κλειστός υπόχωρος. άρα $\mathcal{H} = \bar{M} \oplus \bar{M}^{\perp}$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $x = x_1 \oplus x_2$

$x_1 \in \bar{M}$, $x_2 \in (\bar{M})^{\perp} \subset M^{\perp} = \{0\}$. άρα $x_2 = 0$, άρα $x = x_1 \in \bar{M}$

Άσκηση: (i) $(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$

(ii) $(M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}$

M, N υπόχωροι

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $(x_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N})$ συγκλίνει αν η ακολουθία $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ συγκλίνει. Αν $S_n \to x$ γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$

- Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$

Πρόταση: Αν μια σειρα συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει

Ορισμός: Ένα σύνολο $\{e_n\}$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονικό σύνολο τότε $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Απόδειξη:

Έστω $M \in \mathbb{N}$ τότε

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \,,\; x - \sum_{k=1}^{M} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{M} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle + \sum_{n,k=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle e_n, e_k \rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Άρα $\sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ παίρνουμε $M \longrightarrow +\infty$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι ο υπόχωρος του ℓ^2 που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$ $|\alpha| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι πυκνός