Προταση 2 Αν $f \in L^\infty(\mu) \cap$ weak-L^p για καποιο $p>0$ τοτε $\forall q>p$ ισχυει $f \in L^q(\mu)$

μαθημα 23°
14/1/19

<u>αποδειξη</u> $\int |f|^q d\mu = \int_0^\infty q\, a^{q-1} \lambda_f(a)\, da$

Ισχυει $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-σ.π. αρα $\forall a > \|f\|_\infty$ εχουμε $\lambda_f(a) = \mu(|f|>a) = 0$

Αρα $\int |f|^q d\mu = \int_0^{\|f\|_\infty} q\, a^{q-1} \lambda_f(a)\, da$

Επισης $f \in$ weak-$L^p(\mu) \Rightarrow \exists M>0 : \forall a>0 \;\; a^p \lambda_f(a) \le M \Rightarrow \lambda_f(a) \le \frac{M}{a^p}$

Αρα $\int |f|^q d\mu \le \int_0^{\|f\|_\infty} q \cdot a^{q-1} \frac{M}{a^p}\, da = qM \int_0^{\|f\|_\infty} a^{q-p-1}\, da =$

$= qM \frac{\|f\|_\infty^{q-p}}{q-p} < \infty$ αρα $f \in L^q(\mu)$

<u>Θεωρημα παρεμβολης του Marcinkiewicz</u>

Εστω $T : D \subseteq \{f$ μετρησιμη στον $(X, \mathcal{M}, \mu)\} \longrightarrow \{g$ μετρησιμη στον $(Y, N, \nu)\}$

Ο T λεγεται <u>υπογραμμικος</u> τελεστης αν $|T(f+g)| \le |T(f)| + |T(g)|$, $|T(af)| = a|T(f)|$ $\forall f, g \in D$ $\forall a>0$

$\forall 1 \le p, q \le \infty$
Ο υπογραμμικος T ειναι <u>ισχυρου τυπου (p,q)</u> αν $D \supseteq L^p(\mu)$ και $\exists C>0$ $\forall f \in L^p(\mu)$ $\|Tf\|_q \le C\|f\|_p$ (ειδικοτερα $Tf \in L^q(\mu)$)

$1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$
Ο υπογραμμικος T ειναι <u>ασθενους τυπου (p,q)</u> αν $D \supseteq L^p(\mu)$ και $\exists C>0 : \forall f \in L^p(\mu)$ εχουμε $Tf \in$ weak-$L^q(\nu)$ και $[Tf]_q \le C\|f\|_p$. Αυτο αν $1 \le q < \infty$

$1 \le p \le \infty$, $q=\infty$ θετει οτι ο T ειναι <u>ασθενους τυπου (p,∞)</u> αν ειναι ισχυρου τυπου (p,∞).

Θεωρημα Εστω $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ και $T : \underbrace{L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)}_{D} \longrightarrow L(\nu)$
οπου $L(\nu) :=$ οι μετρησιμες στον (Y, N, ν)
υπογραμμικος τελεστης ο οποιος ειναι ασθενους τυπου (p_0, p_0) με σταθερα A_0 και ασθενους τυπου (p_1, p_1) με σταθερα A_1.
Τοτε $\forall p_0 < p < p_1$ ο T ειναι ισχυρου τυπου (p,p) με σταθερα

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{1/p} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} \cdot A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} \quad \text{αν } p_1 < \infty$$

και $A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}$ αν $p_1 = +\infty$

Εφαρμογή Εστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Είχαμε ορίσει τη μεγιστική συνάρτηση
$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

Ο $M : L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n)$ είναι υπογραμμικός

• $M(f+g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \underbrace{|f(y)+g(y)|}_{|f(y)|+|g(y)|}\, dy \leq \dots \leq Mf(x) + Mg(x)$

• αν $a>0$ $M(af)(x) = aMf(x)$

Εχουμε δείξει ότι $\underbrace{m(\{x / Mf(x) > a\})}_{\lambda_{Mf}(a)} \leq \frac{3^n}{a} \|f\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{a>0} a\, \lambda_{Mf}(a) \leq 3^n \|f\|_1$ Αρα ο M είναι ασθενώς τύπου $(1,1)$

Επίσης αν $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ τότε $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \underbrace{|f(y)|}_{\|f\|_\infty} dy \leq \|f\|_\infty$

Αρα $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ δηλ ο M είναι ισχυρού τύπου (∞, ∞)
Από Marcinkiewicz $\forall\, 1<p<\infty$ ο M είναι ισχυρού τύπου (p,p)
Δηλ $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ εχουμε $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $\|Mf\|_p \leq 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} \cdot 3^{n/p} \|f\|_p$

αποδειξη θεωρήματος
Πρώτη περίπτωση: $p_0 < p < p_1 < \infty$ Εστω $f \in L^p(\mu)$. Θέλουμε να φράξουμε το $\|Tf\|_p^p = \int_0^\infty p\, a^{p-1} \lambda_{Tf}(a)\, da$

Ιδέα: Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ $\forall a > 0$ ορίζουμε
$$f_0^a(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \delta a \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad f_1^a(x) = \begin{cases} 0, & |f(x)| > \delta a \\ f(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
Εχουμε $f = f_0^a + f_1^a$

Εχουμε $|Tf| = |T(f_0^a + f_1^a)| \leq |Tf_0^a| + |Tf_1^a|$ γιατί T υπογραμμικός.
άρα $\lambda_{Tf}(a) \leq \lambda_{|Tf_0^a| + |Tf_1^a|}(a) \leq \lambda_{Tf_0^a}(a/2) + \lambda_{Tf_1^a}(a/2)$

άρα $\|Tf\|_p^p \leq \underbrace{\int_0^\infty p \cdot a^{p-1} \lambda_{Tf_0^a}(a/2)\, da}_{I} + \underbrace{\int_0^\infty p \cdot a^{p-1} \lambda_{Tf_1^a}(a/2)\, da}_{II}$

$\lambda_{g+h}(a) \leq \lambda_g(a/2) + \lambda_h(a/2)$ | $a^{p_0} \lambda_{Tg}(a) \leq A_0^{p_0} \|g\|_{p_0}^{p_0}$ $\forall g \in L^{p_0}(\mu)$
$a^{p_1} \lambda_{Th}(a) \leq A_1^{p_1} \|h\|_{p_1}^{p_1}$ $\forall h \in L^{p_1}(\mu)$

① $f_0^a \in L^{p_0}(\mu)$. Πράγματι, $\|f_0^a\|_{p_0}^{p_0} = \int |f_0^a|^{p_0} d\mu = \int_{\{|f|>\delta a\}} |f|^{p_0} d\mu =$

$$= \int_{\{|f|>\delta a\}} |f|^p |f|^{p_0-p} d\mu \overset{p_0-p<0}{\leq} \int_{\{|f|>\delta a\}} |f|^p (\delta a)^{p_0-p} d\mu = (\delta a)^{p_0-p} \int_{\{|f|>\delta a\}} |f|^p \leq$$

$\leq (\delta a)^{p_0-p} \int |f|^p d\mu < \infty$

② $f_1^a \in L^{p_1}(\mu)$. Πράγματι $\|f_1^a\|_{p_1}^{p_1} = \int_{\{|f|<\delta a\}} |f|^{p_1} d\mu = \int_{\{|f|<\delta a\}} |f|^p |f|^{p_1-p} d\mu \overset{p_1-p>0}{\leq}$

$$\leq \int_{\{|f|<\delta a\}} |f|^p (\delta a)^{p_1-p} d\mu = (\delta a)^{p_1-p} \int_{\{|f|<\delta a\}} |f|^p d\mu \leq (\delta a)^{p_1-p} \int |f|^p d\mu < \infty$$

Άρα $I \overset{s=a/2}{=} p \cdot 2^p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{Tf_0^{2s}}(s) ds \leq p 2^p A_0^{p_0} \int_0^\infty s^{p-1} \frac{1}{s^{p_0}} \|f_0^{2s}\|_{p_0}^{p_0} ds$

$$= p 2^p A_0^{p_0} \int_0^\infty s^{p-p_0-1} \int_{\{|f|>2\delta s\}} |f|^{p_0} d\mu\, ds =$$

$$= p 2^p A_0^{p_0} \int |f|^{p_0} \int_0^{\frac{|f|}{2\delta}} s^{p-p_0-1} ds\, d\mu = p 2^p A_0^{p_0} \int |f|^{p_0} \frac{|f|^{p-p_0}}{p-p_0} \frac{1}{(2\delta)^{p-p_0}} d\mu$$

$= \frac{2^p A_0^{p_0}}{(2\delta)^{p-p_0}} \frac{p}{p-p_0} \int |f|^p d\mu$. Άρα $I \leq \frac{p}{p-p_0} \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} \|f\|_p^p$

$$II = p 2^p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{Tf_1^{2s}}(s) ds \leq p 2^p A_1^{p_1} \int_0^\infty \frac{s^{p-1} \|f_1^{2s}\|_{p_1}^{p_1}}{s^{p_1}} ds =$$

$$= p 2^p A_1^{p_1} \int_0^\infty s^{p-p_1-1} \int_{\{|f|<2\delta s\}} |f|^{p_1} d\mu\, ds = p 2^p A_1^{p_1} \int |f|^{p_1} \int_{\frac{|f|}{2\delta}}^\infty s^{p-p_1-1} ds\, d\mu$$

$$= p 2^p A_1^{p_1} \int |f|^{p_1} \frac{1}{p_1-p} \frac{|f|^{p-p_1}}{(2\delta)^{p-p_1}} d\mu = \frac{p}{p_1-p} 2^p A_1^{p_1} \frac{1}{(2\delta)^{p-p_1}} \|f\|_p^p$$

άρα $II \leq \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}} \frac{p}{p_1-p} \|f\|_p^p$

Τελικά $\|Tf\|_p^p \leq I + II \leq \left(\frac{p}{p-p_0} \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p}{p-p_1} \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p$

Επιλέγουμε $\delta>0$: $\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} = \frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}} \Rightarrow \delta^{p_1-p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}}$

<u>Δεύτερη περίπτωση</u> $p_0 < p < p_1 = \infty$, $a^{p_0} \lambda_{Tf}(a) \leq A_0^{p_0} \|f\|_{p_0}^{p_0}$, $f \in L^{p_0}(\mu)$

$\|Tf\|_\infty \leq A_1 \|f\|_\infty$, $f \in L^\infty(\mu)$

Παίρνουμε $\delta = \frac{1}{2A_1}$. Ορίζουμε f_0^a, f_1^a όπως πριν

$\lambda_{Tf}(a) \leq \lambda_{Tf_0^a}(a/2) + \lambda_{Tf_1^a}(a/2)$

Εχουμε $f_1^a(x)=0$ αν $|f(x)|>\frac{1}{2A_1}a \Rightarrow \|f_1^a\| \leq \frac{1}{2A_1}a \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Tf_1^a\|_\infty \leq A_1 \frac{1}{2A_1} a \Rightarrow \lambda_{Tf_1^a}(a/2)=0$

Γράφουμε $\|Tf\|_p^p = p2^p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda_{Tf}(2s)\,ds \leq p2^p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_{Tf_0^{2s}}(s)\,ds$

$\leq p2^p \int_0^\infty s^{p-1} A_0^{p_0} \frac{\|f_0^{2s}\|_{p_0}^{p_0}}{s^{p_0}}\,ds$ κλπ.

Ασθενής σύγκλιση

Ορισμός Αν $f_n, f \in L^p(\mu)$, $1<p<\infty$ λέμε ότι $f_n \xrightarrow{w} f$ (οι f_n συγκλίνουν ασθενώς στην f) αν $\forall g \in L^q(\mu)$ (όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) ισχύει $\int f_n g\,d\mu \to \int fg\,d\mu$

Πρόταση Αν $\|f_n\|_p \leq M$ και $f_n \to f$ σ.π. τότε $f_n \xrightarrow{w} f$

Βασικά κόλπα

① $g\in L^q$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ τ.ω. αν $\mu(A)<\delta$ τότε $\int_A |g|^q<\varepsilon^q$

② Egorov: αν $\mu(B)<\infty$ και $\delta>0$ και $f_n\to f$ στο B τότε $\exists \Gamma\subseteq B$: $\mu(B\setminus\Gamma)<\delta$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο Γ

③ $g\in L^q$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists B$: $\mu(B)<\infty$ και $\int_{X\setminus B}|g|^q d\mu<\varepsilon^q$

απόδειξη πρότασης

$\left|\int f_n g - \int fg\right| = \left|\int_X (f_n-f)g\right| \leq \left|\int_\Gamma (f_n-f)g\right| + \left|\int_{B\setminus\Gamma}(f_n-f)g\right| +$

$+\left|\int_{X\setminus B}(f_n-f)g\right|$ (Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκω B ώστε να ισχύει το ③, δ ώστε να ισχύει το ① και $\Gamma\subseteq B$ ώστε να ισχύει το ②)

$\overset{\text{Holder}}{\leq} \underbrace{\left(\int_\Gamma |f_n-f|^p\right)^{1/p}}_{\to 0}\underbrace{\left(\int_\Gamma |g|^q\right)^{1/q}}_{\|g\|_q} + \underbrace{\left(\int_{B\setminus\Gamma}|f_n-f|^p\right)^{1/p}}_{2M}\underbrace{\left(\int_{B\setminus\Gamma}|g|^q\right)^{1/q}}_{<\varepsilon} +$

ομοιόμορφη σύγκλιση και $\mu(\Gamma)<\infty$

$$+\left(\int_{X\setminus B}|f_n-f|^p\right)^{1/p}\left(\int_{X\setminus B}|g|^q\right)^{1/q} \le \dots$$

$\left(\int_{X\setminus B}|f_n-f|^p\right)^{1/p} \le \|f_n\|_p+\|f\|_p = 2M$, $\left(\int_{X\setminus B}|g|^q\right)^{1/q} \le \varepsilon$

$\boxed{\text{μαθημα } 24^\circ \quad 15/1/19}$

Συνέλιξη

$C_c(\mathbb{R}^n) :=$ οι συνεχείς $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Δηλαδή το $supp(f) = \overline{\{x \,/\, f(x)\neq 0\}}$ είναι συμπαγές

$C_0(\mathbb{R}^n) =$ οι συνεχείς $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $\lim_{|x|\to\infty}|f(x)|=0$

$C_\infty(\mathbb{R}^n)$ οι άπειρες φορές παραγωγίσιμες

Αν η f είναι φραγμένη τότε $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \,/\, x\in X\}$

Παρατήρηση Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν $\|T_y f - f\|_u \xrightarrow{|y|\to 0} 0$, όπου $(T_y f)(x) = f(x-y)$

Λήμμα 1 Αν $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$ τότε $\|T_y f - f\|_u \xrightarrow{|y|\to 0} 0$ δηλ. η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$ $\forall x\in supp(f)$ $\exists \delta_x>0$: αν $z\in B(x,\delta_x)$ τότε $|f(z)-f(x)|<\varepsilon$ (λόγω συνέχεια της f). Λόγω συμπάγειας υπάρχουν $x_1,\dots,x_N\in supp(f)$ τω $supp(f)\subseteq \bigcup_{j=1}^N B(x_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})$

Ορίζουμε $\delta = \min_j \frac{\delta_{x_j}}{2}$ και δείχνουμε ότι αν $|y|<\delta$ τότε

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad |T_y f(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$
$$|T_y f(x) - f(x)| = |f(x-y)-f(x)|$$

• $x\in supp(f) \leadsto \exists j \ |x-x_j| < \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_x$. Τότε $|x-y-x_j| \le$

$\le |x-x_j| + |y| < \frac{\delta_{x_j}}{2} + \delta \le \delta_{x_j} \Rightarrow |f(x)-f(x_j)|<\varepsilon$ και $|f(x-y)-f(x_j)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x-y)-f(x)| \le |f(x-y)-f(x_j)| + |f(x_j)-f(x)| < 2\varepsilon$

• $x-y\in supp(f) \to$ εντελώς ανάλογα

Λήμμα 2 Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \le p < \infty$ τότε $\|T_y f - f\|_p \xrightarrow{|y|\to 0} 0$

Ενδ. $\left(\int |f(x-y) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \xrightarrow{|y|\to 0} 0$

απόδειξη Το δείχνω για $g \in C(\mathbb{R}^n)$ (**)

Μετά θεωρώ $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ τ.ω. $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Τότε $\|T_y f - f\|_p \le \|T_y f - T_y g\|_p + \|T_y g - g\|_p + \|g - f\|_p = \|T_y(f-g)\|_p + \|T_y g - g\|_p + \|f - g\|_p \overset{(*)}{=} \|f-g\|_p + \|T_y g - g\|_p + \|f-g\|_p < 2\varepsilon + \|T_y g - g\|_p < 3\varepsilon$

↓ αν $|y|$ μικρό

(*) $\|T_y h\|_p = \|h\|_p$. Πράγματι $\int |h(x-y)|^p \overset{u=x-y}{=} \int |h(u)|^p$

(**) Πράγματι, έχω:

Αν $supp(g) = K$ συμπαγές. Αν $|y| \le 1$ τότε $supp(T_y g) \subseteq K + \overline{B(0,1)} = K_1$

Ξέρουμε ότι $\|T_y g - g\|_u \to 0$ από λήμμα 1.

Έχουμε $\left(\int |T_y g - g|^p\right)^{1/p} = \left(\int_{K_1} |T_y g - g|^p\right)^{1/p} \le \|T_y g - g\|_u \, m(K_1)^{1/p}$

$\xrightarrow{|y|\to 0} 0$.

Ορισμός Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Ορίζουμε:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy, \text{ η συνέλιξη των } f, g$$

(α) Η $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $u(x,y) = f(x-y) g(y)$ είναι μετρήσιμη.

[Το πρόβλημα είναι αν η $(x,y) \mapsto f(x-y)$ είναι μετρήσιμη

$\overset{\shortparallel}{f \circ S(x,y)}$ όπου $S(x,y) = x-y$

Παίρνω $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel το $(f\circ S)^{-1}(E) = S^{-1}(\underbrace{f^{-1}(E)}_{\text{μετρήσιμο}}) =$ μετρήσιμο

(Άσκηση)

(β) Κάτω από ποιές προϋποθέσεις υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$?

Πρόταση (Βασικές ιδιότητες της συνέλιξης)

Αν όλα τα ολοκληρώματα παρακάτω ορίζονται καλά, τότε:

(α) $f*g = g*f$

(β) $(f*g)*h = f*(g*h)$

(γ) $T_y(f*g) = (T_y f)*g = f*(T_y(g))$

(δ) $supp(f*g) \subseteq \overline{supp(f) + supp(g)}$

<u>αποδειξη</u> (α) $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \overset{u=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)du = (g*f)(x)$

(β) Άσκηση

(γ) $[T_y(f*g)](x) = (f*g)(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)dz =$

$= \int_{\mathbb{R}^n} (T_y f)(x-z)g(z)dz = (T_y f * g)(x)$

Επίσης $T_y(f*g) = T_y(g*f) = T_y g * f = f * T_y g$

(δ) Έστω $x \notin \overline{supp(f)+supp(g)}$ Τότε $\forall y \in supp(g)$ έχουμε:

$x-y \notin supp(f)$ (αλλιώς $x \in supp(f)+y \subseteq supp(f)+supp(g)$)

Τότε $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{supp(g)} \overset{0}{f(x-y)} g(y)dy = 0$

άρα $\{f*g \neq 0\} \subseteq supp(f)+supp(g) \Rightarrow supp(f*g) = \overline{\{f*g\neq 0\}} \subseteq \overline{supp(f)+supp(g)}$

<u>Θεώρημα 1</u> <u>(ανισότητα Young)</u>
Αν $f \in L^p$ και $g \in L^1$, $1 \leq p < \infty$ τότε $f*g \in L^p$ και $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

<u>Θεώρημα 2</u> Αν p, q συζυγείς εκθέτες, $f \in L^p, g \in L^q$ τότε η $f*g$ ορίζεται καλά, είναι φραγμένη, ομοιόμορφα συνεχής και $\|f*g\|_u \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Μάλιστα αν $1<p<\infty$ τότε $f*g \in C_0(\mathbb{R}^n)$

<u>αποδειξη θεωρήματος 1</u>

$\|f*g\|_p = \left(\int \left|\int f(x-y)g(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$

$\leq \left(\int\left(\int |f(x-y)||g(y)|dy\right)^p dx\right)^{1/p} \overset{Minkowski}{\leq} \int\left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|^p dx\right)^{1/p} dy$

$= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|^p dx\right)^{1/p} dy = \int |g(y)| \left(\int |T_y f(x)|^p dx\right)^{1/p} dy$

$= \int |g(y)| \, \|T_y f\|_p dy = \int |g(y)| \, \|f\|_p dy = \|f\|_p \int |g(y)| dy$

$= \|f\|_p \cdot \|g\|_1$

απόδειξη θεωρήματος 2

$$\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int |f(x-y)|^p\right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^q\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow |f*g(x)| \le \int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \|f\|_p\|g\|_q \Rightarrow \|f*g\|_u \le \|f\|_p \|g\|_q$$

Για την ομοιόμορφη συνέχεια $\|T_y(f*g) - f*g\|_u = \|T_y f * g - f*g\|_u$

$$= \|(T_y f - f)*g\|_u \le \underset{\substack{\downarrow\, |y|\to 0 \text{ (από λήμμα 2)} \\ 0}}{\|T_y f - f\|_p}\, \|g\|_q \xrightarrow{|y|\to 0} 0$$

Έστω $1<p<\infty$. Τότε και $1<q<\infty$. Υπάρχουν $f_n, g_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$

τ.ω. $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$

Τότε $\|f_n * g_n - f*g\|_u = \|(f_n - f)*g_n + f*(g_n - g)\|_u \le$

$$\le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|f_n - f\|_p}\, \underbrace{\|g_n\|_q}_{\text{φραγμένο}} + \|f\|_p\, \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|g_n - g\|_q} \to 0$$

Έστω $\varepsilon>0$ $\exists n_0$ $\|f_{n_0} * g_{n_0} - f*g\|_u < \varepsilon$. Το $K_{n_0} := supp(f_{n_0} * g_{n_0}) \subseteq$
$\subseteq supp(f_{n_0}) + supp(g_{n_0})$ και K_{n_0} συμπαγές

Αν $x \notin K_{n_0}$ τότε $|f*g(x)| = |\underset{\substack{\| \\ 0}}{f_{n_0} * g_{n_0}(x)} - f*g(x)| < \varepsilon$

Άρα αν $|x| > R(K_{n_0}) = \max\{|z| \,/\, z \in K_{n_0}\}$ τότε $|f*g(x)|<\varepsilon$

Άρα $\lim_{|x|\to\infty} |f*g(x)| = 0$

Πρόταση Αν $f \in L^1$ και $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (υπάρχουν οι $\partial^\alpha g$ για $|\alpha| \le k$ και είναι και φραγμένες) $\left[\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_j \ge 0,\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,\ \partial^\alpha g = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} g\right]$

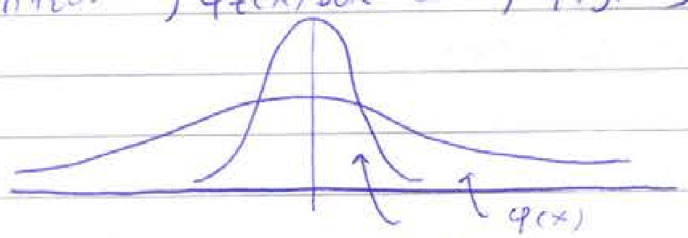
Τότε $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$

και $\partial^\alpha (f*g) = f * \partial^\alpha g$

Έστω $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $t>0$. Ορίζουμε $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, $supp(\varphi) \subseteq B(0,R)$

$\varphi_t(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{t} \in B(0,R) \Rightarrow x \in B(0, tR)$

Επιπλέον $\int \varphi_t(x)\,dx \overset{y = x/t}{=} \int \varphi(y)\,dy$



Θεώρημα Έστω $\varphi\in L^1$ και $\int\varphi(x)\,dx=\alpha$ $\left(\Rightarrow \forall t>0\ \int\varphi_t(x)\,dx=\alpha\right)$

(α) Αν $f\in L^p$, $1\le p<\infty$ τότε $\|f*\varphi_t-\alpha f\|_p \xrightarrow{t\to 0} 0$ $\quad T^0_{t\to 0}$

(β) Αν η f είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής τότε $\|f*\varphi_t-\alpha f\|_u$

(γ) Αν $f\in L^\infty$ και f συνεχής σε ένα ανοικτό $U\subseteq\mathbb{R}^n$ τότε $\forall K\subseteq U$ συμπαγές $\|f*\varphi_t-\alpha f\|_u \xrightarrow{t\to 0} 0$

απόδειξη (α) $|(f*\varphi_t)(x)-\alpha f(x)|^p \le \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_t(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_t(y)\,dy\right|^p$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|\,|\varphi_t(y)|\,dy\right)^p$$

$$\left(\int|f*\varphi_t-\alpha f|^p\right)^{1/p}\le\left(\int\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|\frac{1}{t^n}\left|\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right|dy\right)^p dx\right)^{1/p}=$$

$$\left(\int\left(\int|\underbrace{f(x-tz)}_{\tau_y f}-f(x)|\,|\varphi(z)|\,dz\right)^p dx\right)^{1/p}\le$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\le}\int|\varphi(z)|\,\|\tau_{tz}f-f\|_p\,dz \quad\text{και}\quad |\varphi(z)|\,\|\tau_{tz}f-f\|_p\le$$

$$\le|\varphi(z)|\left(\|\tau_{tz}f\|_p+\|f\|_p\right)=|\varphi(z)|\left(\|f\|_p+\|f\|_p\right)=2\|f\|_p|\varphi(z)|\in L^1$$

άρα μπορώ να εφαρμόσω ΘΚΣ

Κατασκευή Η $\eta(t)=e^{-1/t}\chi_{(0,\infty)}(t)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Ορίζουμε $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\eta(1-|x|^2)=e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\chi_{(-1,1)}(x)$

Η φ είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη

Πρόταση $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_p}=L^p$

μπορώ να υποθέσω ότι έχει συμπαγή φορέα (τη προσεγγίζω από συνάρτηση με συμπαγή φορέα) $\exists f\in L^1$

Έστω $f\in L^p$ $\forall t>0$ η φ_t είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη, έχει συμπαγή φορέα ($supp(\varphi_t)=B(0,t)$) και είδαμε ότι:

$\|f*\varphi_t-f\|_p\xrightarrow{t\to 0}0$. Από την πρόταση της προηγούμενης σελίδας, η $f*\varphi_t$ είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη $\forall t>0$.

ΤΕΛΟΣ