ΒΙΒΛΙΟ: G. Folland
Real Analysis
Modern Techniques and Applications

Το πρόβλημα του μέτρου (στον $\mathbb{R}^n$)

μάθημα 1ο
2/10/18

Θέλουμε σε κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ να αντιστοιχίσουμε τον "όγκο" του, δηλ $A \mapsto \mu(A) \in [0,\infty]$ έτσι ώστε:

(i) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένα ανά δύο $\subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(ii) Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γρ. μετασχηματισμός τ.ω. $T^t T = I$ και $x \in \mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mu(T(A)+x) = \mu(A)$

(iii) $\mu(Q) = 1$, όπου $Q = \{(x_1, \dots, x_n) \,/\, 0 \le x_i < 1\}$

(*) Αυτό δεν γίνεται (ούτε και για $n=1$)

- Θεωρούμε το $[0,1]$ και τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ (τότε $x-y \in [-1,1]$)
- Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο σύνολο (ισοπληθικό με το $\mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ υπάρχουν υπεραριθμήσιμες το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας
- Θεωρούμε ένα σύνολο N που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση (αξίωμα επιλογής)
- Έστω $\{r_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $N_n = N + r_n$

Άσκηση (α) Τα N_n είναι ξένα ανά δύο

αν $x \in N_n \cap N_k \Rightarrow \exists\, y,z \in N : x = y + r_n = z + r_k \Rightarrow y - z = r_k - r_n \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow y \sim z \xRightarrow{N} y = z$

(β) $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq [-1,2]$

Αυτό το μ αν υπήρχε θα ήταν μονότονο: Αν $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \le \mu(B)$.
πράγματι. $B = (B \setminus A) \cup A \cup \emptyset \cup \dots \Rightarrow \mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A) + \overset{0}{\mu(\emptyset)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

άρα $\mu([0,1]) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \le \mu([-1,2]) \Rightarrow 1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) \le 3$ (*)

από αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: $\forall n$ $\mu(N_n) = \mu(N + r_n) = \mu(N)$

άρα αν $\lambda > 0 \Rightarrow \sum \mu(N_n) = +\infty$

αν $\lambda < 0 \Rightarrow \sum \mu(N_n) = 0$

άρα η (*) είναι άτοπο.

Παρατήρηση Ακόμα και αν αντικαταστήσουμε την απαίτηση $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για ξένα A_n με την $\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$ για ξένα $A_1, \dots, A_N$ πάλι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση μ.

Ενότητα 1 - Μέτρα

Έστω X μη κενό σύνολο. Έστω $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ (μια οικογένεια υποσυνόλων του X)

Ορισμός 1 Η $\mathcal{A}$ λέγεται άλγεβρα αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{A}$

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

Παρατηρήσεις

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ [Πράγματι έχω $\mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow$
$\Rightarrow X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = X^c \in \mathcal{A}$]

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$ [$A \setminus B = \underset{\in \mathcal{A}}{A} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{B^c} \in \mathcal{A}$]

(iii) Αν $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{A}$ [$A_1^c, \dots, A_k^c \in \mathcal{A} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1^c \cup \dots \cup A_k^c \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_1^c \cup \dots \cup A_k^c)^c \in \mathcal{A}$, δηλ. $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{A}$]

Ορισμός 2 Η $\mathcal{A}$ λέγεται σ-άλγεβρα αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$, ικανοποιεί το (β) και το (α'): Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Άσκηση Τότε αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ έχουμε και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Παρατήρηση Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα ((α') $\Rightarrow$ (α))

Παραδείγματα

(i) Εστω $X \neq \emptyset$. Οι $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, X\}$ και $P(X)$ είναι σ-άλγεβρες, και καθε άλλη άλγεβρα ή σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ικανοποιεί: $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq P(X)$

(ii) Εστω X άπειρο αριθμήσιμο σύνολο. $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,/\, A$ πεπερασμένο ή A^c πεπερασμένο$\}$

(iii) Εστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο. $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,/\, A$ αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο$\}$

Η (iii) είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι έχω:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
- Εστω $A \in \mathcal{A}$. $\begin{cases} \text{Αν } A \text{ αριθμήσιμο τοτε } (A^c)^c = A \text{ αριθμησιμο} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ \text{Αν } A^c \text{ αριθμησιμο τοτε } A \in \mathcal{A} \end{cases}$
- Εστω $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

(α) Αν $A_1, \dots, A_n$ αριθμησιμα τοτε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ αριθμησιμο άρα $\in \mathcal{A}$

(β) Αν καποιο A_k δεν είναι αριθμήσιμο, αφού $A_k \in \mathcal{A}$ εχουμε A_k^c ...
αριθμησιμο. Ομως αν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τοτε $A_k \subseteq A \Rightarrow A^c \subseteq A_k^c$ = αριθμησιμο
$\Rightarrow A^c$ αριθμησιμο $\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Η (ii) είναι άλγεβρα αλλά οχι σ-άλγεβρα.

Υποδειξη $\bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{2k\}}_{\in \mathcal{A}} = 2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$

Ασκηση Εστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ άλγεβρα υποσυνολων του X.
Σε καθε μια απο τις παρακάτω περιπτωσεις η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα

(Αn) αύξουσα
$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$
(Αn) φθίνουσα
$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$

(i) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ αύξουσα τοτε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ φθίνουσα τοτε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iii) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ τοτε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

αποδειξη (i) $\Rightarrow \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα

Εστω $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$. Θα δείξουμε οτι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

Για καθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_N = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N$

τοτε $\overset{A_1 \subseteq}{\subseteq} A_{N-1} \subseteq A_N$ και $A_1 \cup \dots \cup A_N = A_N = B_1 \cup \dots \cup B_N$

τοτε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ γιατί η (A_n) αύξουσα

(iii) Έστω $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ χωρίς καμία υπόθεση.

$A_1 = B_1$

$A_2 = B_2 \setminus B_1 \rightsquigarrow \begin{matrix} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 \end{matrix}$

$A_3 = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$

$\vdots$

$A_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$

αυτά είναι ξένα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ $\in \mathcal{A}$ από υπόθεση

<u>Ορισμός</u> <u>Η σ-άλγεβρα που "παράγεται" από μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq P(X)$</u>

Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{E}$ οικογένεια (μη κενή) υποσυνόλων του X.

• Υπάρχουν σ-άλγεβρες $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X τ.ω. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ (για παράδειγμα το $P(X)$)

<u>Παρατήρηση</u> Αν $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών του X τότε η τομή τους $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα.

• Ορίζουμε $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα τ.ω. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$

Η $\sigma(\mathcal{E})$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Είναι μάλιστα η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{E}$: αν $\mathcal{A}_0$ σ-άλγεβρα και $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_0$ τότε $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}_0$

Λέμε ότι η $\mathcal{E}$ <u>παράγει</u> την σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E})$

<u>κλασικό παράδειγμα</u> Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}$ όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του X. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$ είναι η <u>Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$</u> του X.

• Η $\mathcal{B}(X)$ περιέχει τα ανοιχτά, τα κλειστά υποσύνολα του X,

τα G_δ-σύνολα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n-ανοιχτά,

τα F_σ-σύνολα $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n-κλειστά

τα $G_{\delta\sigma}$-σύνολα $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, H_n-G_δ-σύνολα

τα $F_{\sigma\delta}$-σύνολα $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n-F_σ-σύνολα

$\vdots$

Ορισμος Εστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{E} \subseteq P(X)$. Η $\mathcal{E}$ λεγεται στοιχειωδης οικογενεια αν ικανοποιει τα εξης:

(α) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(β) Αν $A, B \in \mathcal{E}$ τοτε $A \cap B \in \mathcal{E}$

(γ) Αν $A \in \mathcal{E}$ τοτε το A^c ειναι πεπερασμενη ενωση ξενων στοιχειων της $\mathcal{E}$

$(A^c = F_1 \cup \dots \cup F_k$, F_i ξενα, $F_i \in \mathcal{E})$

Προταση Αν η $\mathcal{E}$ ειναι στοιχειωδης οικογενεια υποσυνολων του X, τοτε η οικογενεια ολων των πεπερασμενων ξενων ενωσεων συνολων από την $\mathcal{E}$ ειναι αλγεβρα.

Παραδειγμα $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{E}$ τα αριστερα ανοιχτα και δεξια κλειστα διαστηματα του $\mathbb{R}$. $[(a,b], (-\infty, b], (a, +\infty), \mathbb{R}, \emptyset]$

$(a,b]^c = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ ειναι στοιχειωδης οικογενεια.

αποδειξη προτασης

Βηματα

(1) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

(2) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

(4) $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup \dots \cup E_k \in \mathcal{A}$

(5) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$

$$(1)\quad A \setminus B = A \cap B^c \overset{(\gamma)}{=} A \cap \underbrace{(F_1 \cup \dots \cup F_k)}_{\substack{F_i \text{ ξενα} \\ F_i \in \mathcal{E}}} = \underbrace{(A \cap F_1)}_{\in \mathcal{E}} \cup \dots \cup \underbrace{(A \cap F_k)}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{A}$$

ξενα

Εστω $X \neq \emptyset$. Μια οικογενεια $\mathcal{E} \subseteq P(X)$ λεγεται στοιχειωδης οικογενεια αν:

μαθημα 2°
4/10/18

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(ii) Αν $E, F \in \mathcal{E}$ τοτε $E \cap F \in \mathcal{E}$ (επεται πως ισχυει το ιδιο στα πεπερασμενες τομες)

(iii) Αν $E \in \mathcal{E}$ τοτε το E^c γραφεται σαν ξενη ενωση $F_1 \cup \dots \cup F_k$, $F_i \in \mathcal{E}$

Πρόταση: Αν $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια στο X τότε η οικογένεια $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων συνόλων από την $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα.

Απόδειξη ① Αν $A, B \in \mathcal{E}$ τότε $A\setminus B \in \mathcal{A}$

Γράφουμε $A\setminus B = A\cap B^c = A\cap(F_1\cup\dots\cup F_k) = \underbrace{\underbrace{(A\cap F_1)}_{\in\mathcal{E}}\cup\dots\cup\underbrace{(A\cap F_k)}_{\in\mathcal{E}}}_{\text{ξένα διότι } F_i \text{ ξένα στην } \mathcal{E}} \in \mathcal{A}$

② Αν $A, B\in\mathcal{E}$ τότε $A\cup B\in\mathcal{A}$

$A = \underbrace{A}_{\in\mathcal{E}}\cup\underbrace{(B\setminus A)}_{\in\mathcal{A}} = \underbrace{A}_{\in\mathcal{E}}\cup\underbrace{(F_1\cup\dots\cup F_k)}_{\in\mathcal{E}} \in \mathcal{A}$ ξένα

③ Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ τότε $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n\in\mathcal{A}$

Με επαγωγή ως προς n. Υποθέτω ότι το ξέρω για $2,\dots,n-1$ σύνολα της $\mathcal{E}$. Έστω $A_i\in\mathcal{E}$, $i=1,\dots,n$. Γράφουμε $A_1\cup\dots\cup A_n = \underbrace{(A_1\cup\dots\cup A_{n-1})}_{\in\mathcal{A}}\cup A_n$

$= \underbrace{(F_1\cup\dots\cup F_k)}_{\text{ξένα στην } \mathcal{E}}\cup A_n = \underbrace{(F_1\setminus A_n)\cup\dots\cup(F_k\setminus A_n)\cup A_n}_{\text{ξένα στην } \mathcal{A}} =$

$= \underbrace{(G_{11}\cup\dots\cup G_{1s_1})\cup\dots\cup(G_{k1}\cup\dots G_{ks_k})\cup A_n}_{\text{ξένα στην } \mathcal{E}\text{, πεπερασμένα το πλήθος}} \in\mathcal{A}$

④ Αν $E_1,\dots,E_k\in\mathcal{A}$ τότε $E_1\cup\dots\cup E_k\in\mathcal{A}$

Έχουμε $E_1\cup\dots\cup E_k = \underbrace{\underbrace{(F_{11}\cup\dots\cup F_{1s_1})}_{\text{ξένα στην } \mathcal{E}}\cup\dots\cup\underbrace{(F_{k1}\cup\dots\cup F_{ks_k})}_{\text{ξένα στην } \mathcal{E}}}_{\text{πεπερασμένη ένωση συνόλων της } \mathcal{E}} \in\mathcal{A}$ από το ③

⑤ Αν $A\in\mathcal{A}$ τότε $A^c\in\mathcal{A}$

Γράφουμε $A = \underbrace{E_1\cup\dots\cup E_k}_{\text{ξένα στην } \mathcal{E}} \Rightarrow A^c = E_1^c\cap\dots\cap E_k^c \overset{(iii)}{=}$

$= (F_{11}\cup\dots\cup F_{1s_1})\cap\dots\cap(F_{k1}\cup\dots\cup F_{ks_k}) = \bigcup_{j_1=1}^{s_1}\dots\bigcup_{j_k=1}^{s_k}\underbrace{(F_{1j_1}\cap\dots\cap F_{kj_k})}_{\in\mathcal{E} \text{ από την (ii)}} \in\mathcal{A}$ από το ③

Η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$

• Είχαμε ορίσει την σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E})$ που παράγεται από μια $\mathcal{E}\subseteq P(X)$.

Λήμμα Έστω $X\neq\emptyset$. Αν $\mathcal{E},\mathcal{F}\subseteq P(X)$ και $\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{F})$ τότε $\sigma(\mathcal{E})\subseteq\sigma(\mathcal{F})$

απόδειξη: Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει την $\mathcal{E}$ άρα περιέχει την μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{E}$.

Πρόταση Η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ παράγεται από τις οικογένειες:

$\mathcal{E}_1 = \{(a,b) / a<b\}$, $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] / a<b\}$, $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] / a<b\}$

$\mathcal{E}_4 = \{[a,b) / a<b\}$, $\mathcal{E}_5 = \{(a,+\infty) / a\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) / a\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{E}_7 = \{[a,+\infty) / a\in\mathbb{R}\}$ $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] / a\in\mathbb{R}\}$

Δηλαδή $\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i=1,\dots,8$

απόδειξη Για οποιοδήποτε i, κάθε $E\in\mathcal{E}_i$ είναι Borel σύνολο

$\mathcal{E}_3: (a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\frac{1}{n})$ ~> Borel σύνολο (είναι G_δ-σύνολο)

άλλος τρόπος: $\mathcal{E}_4: [a,b) = [a,\frac{a+b}{2}] \cup (\frac{a+b}{2}, b)$

κ.τ.λ. άρα $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow} \sigma(\mathcal{E}_i)\subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Για το αντίστροφο: Για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\sigma(\mathcal{E}_1)$, γράφουμε $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Theta)$, όπου Θ: τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αρκεί να ισχύει $\Theta\subseteq\sigma(\mathcal{E}_1)$ και το αποτέλεσμα έπεται από το λήμμα.
Όμως κάθε ανοικτό $U\subseteq\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση φραγμένων διαστημάτων $\Rightarrow U\in\sigma(\mathcal{E}_1)$

σ-άλγεβρα γινόμενο

Έστω $\{X_a\}_{a\in A}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων.
Ορίζουμε $X = \prod_{a\in A} X_a$ να είναι το σύνολο όλων των $\{x_a\}_{a\in A}$ όπου $x_a\in X_a$.

[πχ. αν έχω τα $X_1,\dots,X_n$ τότε $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1\times X_2\times\dots\times X_n = \{(x_1,\dots,x_n) / x_i\in X_i, i=1,\dots,n\}$]

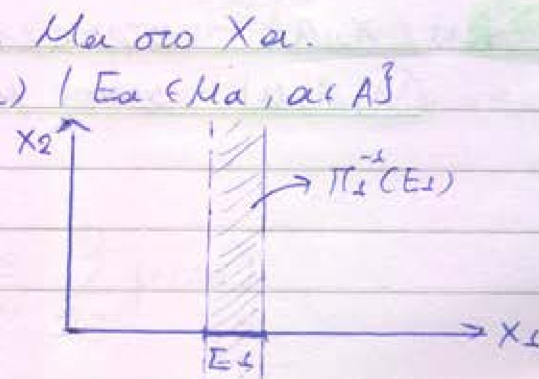
Συμβολίζουμε με π_a τις συναρτήσεις συντεταγμένων

$\pi_a: X = \prod_{b\in A} X_b \to X_a$

$\pi_a(\{x_b\}_{b\in A}) = x_a$

Έστω ότι $\forall a\in A$ έχουμε μια σ-άλγεβρα M_a στο X_a.
Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E} = \{\pi_a^{-1}(E_a) / E_a\in M_a, a\in A\}$

Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E})$ είναι η σ-άλγεβρα γινόμενο των M_a και συμβολίζεται με $\bigotimes_{a\in A} M_a$.



Στην περιπτωση $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ γραφουμε $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$

Ασκησεις

1) Αν το συνολο δεικτων A ειναι αριθμησιμο, τοτε η $\bigotimes_{a \in A} M_a$ παραγεται απο την $\mathcal{E}_1 = \{ \prod_{a \in A} E_a \,/\, E_a \in M_a \}$

2) Αν $M_a = \sigma(\mathcal{E}_a)$, οπου $\mathcal{E}_a \subseteq P(X_a)$ τοτε η $\bigotimes_{a \in A} M_a$ παραγεται απο την $F_1 = \{ \pi_a^{-1}(E_a) \,/\, E_a \in \mathcal{E}_a, a \in A \}$
και στην περιπτωση που το A ειναι αριθμησιμο απο την $F_2 = \{ \prod_{a \in A} E_a \,/\, E_a \in \mathcal{E}_a \}$

3) Εστω $X_1, \dots X_n$ μετρικοι χωροι. Τοτε ισχυει:
$\mathcal{B}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(X_n) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times \cdots \times X_n)$ με μετρικη γινομενο την
$d((x_1, \dots, x_n), (x_1', \dots, x_n')) = \max d_i(x_i, x_i')$
Αν οι X_i ειναι διαχωρισιμοι, τοτε ισχυει ισοτητα.

4) Πορισμα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Μετρο

Ορισμός Εστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ-αλγεβρα στο X. Μια συναρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λεγεται μετρο αν:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθια ξενων συνολων στην $\mathcal{A}$ τοτε :
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Σημειωση: Επεται η πεπερασμενη προσθετικοτητα: αν $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ ξενα οριζω $A_n = \emptyset$ για $n = N+1, N+2, \dots$ και εχω:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{(ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \overbrace{\mu(\emptyset)}^{=0} \to 0$$

Ορολογια $(X, \mathcal{A})$ - μετρησιμος χωρος
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ - χωρος μετρου

Ορισμός

(i) Το μ λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X)<\infty$. (Τότε $\forall A\in\mathcal{A}$ ισχύει $\mu(A)<\infty$)

(ii) Το μ λέγεται σ-πεπερασμένο αν $\exists\, E_n\in\mathcal{A}$, $n=1,2,\dots$ τ.ω. $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ και $\mu(E_n)<\infty$ $\forall n$. [τότε κάθε $A\in\mathcal{A}$ γράφεται στη μορφή $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, $F_n\in\mathcal{A}$, $\mu(F_n)<\infty$ (βλέπε προσθήκη στην επόμενη σελίδα)]

(iii) Το μ λέγεται ημιπεπερασμένο αν $\forall\, E\in\mathcal{A}$ με $\mu(E)=\infty$ $\exists\, F\in\mathcal{A}$, $F\subseteq E$ τ.ω. $0<\mu(F)<\infty$

Άσκηση Κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο

Έστω $E\in\mathcal{A}$ με $\mu(E)=\infty$. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο $\exists\, F_n\in\mathcal{A}$ με $\mu(F_n)<\infty$ τ.ω. $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$

Έχουμε $\infty=\mu(E)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)$ ιδιότητα μέτρου, επόμενη πρόταση

άρα υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\mu(F_{n_0})>0$ και βέβαια $\mu(F_{n_0})<\infty$

Πρόταση βασικές ιδιότητες μέτρου

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου.

(α) Αν $A,B\in\mathcal{A}$ και $A\subseteq B$ τότε $\mu(A)\leq\mu(B)$ (μονοτονία)

(β) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ σύνολα στην $\mathcal{A}$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (υποπροσθετικότητα)

(γ) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ (συνέχεια)

(δ) Αν $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $\mu(B_1)<\infty$ τότε: $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$

απόδειξη (α) $B=A\cup(B\setminus A)\Rightarrow\mu(B)=\mu(A)+\overbrace{\mu(B\setminus A)}^{\geq 0}\geq\mu(A)$

(β) υπάρχουν ξένα $B_1,B_2,\dots$ στην $\mathcal{A}$ τ.ω. $\forall N\in\mathbb{N}$: $A_1\cup\dots\cup A_N=B_1\cup\dots\cup B_N$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ και $B_n\subseteq A_n$.

Τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\overset{(ii)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\underset{(\alpha)}{\leq}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

(γ) Θεωρούμε τα B_n όπως πριν και έχουμε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(\underbrace{A_1\cup\dots\cup A_N}_{=A_N \text{ γιατί } (A_n)\uparrow}) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$

(δ) Ορίζουμε $A_n = B_1 \setminus B_n$. Η (A_n) είναι αύξουσα, άρα:

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1\setminus B_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_1\setminus B_n) = \lim_{n\to 0} (\mu(B_1) - \mu(B_n))$

$\overset{\mu(B_1)<\infty}{=} \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

και $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1\setminus B_n)\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$

άρα $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

Προσθήκη Έστω μ - σ-πεπερασμένο μέτρο και $A \in \mathcal{A}$. Γνωρίζουμε πως $\exists\, E_n \in \mathcal{A}$, $\mu(E_n) < \infty$ τ.ω. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

άρα $A = A\cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A\cap E_n)}_{:= F_n \in \mathcal{A}}$

και $\mu(F_n) = \mu(A\cap E_n) \underset{\text{μονοτονία}}{\leq} \mu(E_n) < \infty$

Παραδείγματα

(α) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = P(X)$. Έστω $f: X \to [0,\infty]$. Ορίζουμε $\mu_f : P(X) \to [0,\infty]$ με $\mu_f(A) = \sum_{x\in A} f(x)$ $(A \subseteq X)$

(όπου γενικά αν $t_x \geq 0$, $x \in A$, θέτουμε $\sum_{x\in A} t_x \overset{op}{=} \left\{ \sum_{x\in B} t_x \,/\, B\subseteq A,\ B \text{ πεπερασμένο} \right\}$)

Άσκηση (i) Αποδείξτε ότι το μ_f είναι μέτρο

(ii) μ_f ημιπεπερασμένο $\iff$ $\forall x \in X$ ισχύει $f(x) < \infty$

(iii) μ_f σ-πεπερασμένο $\iff$ το $\{x\in X \,/\, f(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο