Μάθημα 9ο　　Ε12. Θεωρία Ελέγχου　　8/11/2018

Παράδειγμα: $\underline{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u$

$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}([\underline{b}, A\underline{b}, A^2\underline{b}])$

$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\operatorname{rank}(\Gamma_c) = 2$

Άρα $\mathcal{X}_c = \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$

Ελεγξιμότητα μέσω διαγωνιοποίησης του "A"

Έστω $\Sigma(A,B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και έστω $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$

Τότε $AQ = Q\Lambda$ όπου $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ και Q ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων ($\det Q \neq 0$)

Έστω $\Sigma(A,B) \overset{Q}{\sim} \Sigma(\overbrace{Q^{-1}AQ}^{\Lambda}, \overbrace{QB}^{\hat{B}})$. Στις καινούργιες συντεταγμένες

$\hat{x}' = \lambda_i \hat{x}_i + \hat{\underline{b}}_i^T \underline{u}$, $i = 1, \dots, n$

Έχουμε $\hat{\Gamma}_c = [Q^{-1}B \,\vdots\, Q^{-1}AQQ^{-1}B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, Q^{-1}A^{n-1}QQ^{-1}B] = Q^{-1}[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B] = Q^{-1}\Gamma_c$

$\operatorname{rank}(\hat{\Gamma}_c) = \operatorname{rank}(\Gamma_c)$

$\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν

$\operatorname{rank}([sI - \Lambda \,\vdots\, \hat{B}]) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} s-\lambda_1 & & 0 & \vdots & \hat{\underline{b}}_1^T \\ & s-\lambda_2 & & \vdots & \hat{\underline{b}}_2^T \\ 0 & & \ddots\ s-\lambda_n & \vdots & \hat{\underline{b}}_n^T \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall s \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Το $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\hat{\underline{b}}_i \neq \underline{0}$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$

Στη γενική περίπτωση ο A δεν είναι απλής δομής άρα θα πάρω τη μορφή Jordan

Έστω $\Sigma(A,B) \overset{Q}{\sim} \Sigma(\overbrace{Q^{-1}AQ}^{J}, \overbrace{Q^{-1}B}^{\hat{B}})$

Έστω ο A δεν είναι απλής δομής και
$\varphi(s) = \det(sI - A) = (s-\lambda_1)^{\tau_1}(s-\lambda_2)^{\tau_2}\dots(s-\lambda_p)^{\tau_p}$ και αντίστοιχες
γεωμετρικές πολλαπλότητες $d_1, d_2, \dots, d_p$ $(1 < d_i \le \tau_i)$
Τότε $J = diag(J_1, J_2, \dots, J_p)$ και $J_i = diag\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$ $i=1,\dots,p$
και
$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q_{ij} \times q_{ij}}$$
επίσης
$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\tau_1 \\ \}\tau_2 \\ \\ \}\tau_p \end{matrix} \qquad \hat{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \hat{B}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{B}_{id_i} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}q_{i1} \\ \}q_{i2} \\ \\ \}q_{id_i} \end{matrix} \qquad \sum_{j=1}^{d_i} q_{ij} = \tau_i$$

$$\hat{B}_i^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} (\hat{b}_{i1}^{\top})^{\varepsilon} \\ \vdots \\ (\hat{b}_{id_i}^{\top})^{\varepsilon} \end{bmatrix}$$
$(\hat{b}_{ij}^{\top})^{\varepsilon}$: η τελευταία γραμμή του πίνακα $\hat{B}_{ij}$

Θεώρημα: $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow$ κάθε ένας από τους p πίνακες $\hat{B}_i^{\varepsilon}$
γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές

Απόδειξη (μέσω παραδείγματος)
Έστω $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\varphi(s) = (s-\lambda_1)^5(s-\lambda_2)^2$ και έστω
$\Sigma(A,B) \overset{Q}{\sim} \Sigma(J, \hat{B})$ και έστω ότι $[\lambda I - J \,\vdots\, \hat{B}] =$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc|c} \lambda-\lambda_1 & 1 & & & & & & \hat{b}_{1,11}^{\top} \\ 0 & \lambda-\lambda_1 & & & & & & \hat{b}_{1,12}^{\top} \\ & & \lambda-\lambda_1 & 1 & 0 & & & \hat{b}_{1,21}^{\top} \\ & & 0 & \lambda-\lambda_1 & 1 & & & \hat{b}_{1,22}^{\top} \\ & & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & & & \hat{b}_{1,23}^{\top} \\ & & & & & \lambda-\lambda_2 & 1 & \hat{b}_{2,11}^{\top} \\ & & & & & 0 & \lambda-\lambda_2 & \hat{b}_{2,12}^{\top} \end{array}\right]$$

$$\hat{B}_1^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{1,12} \\ \hat{b}_{1,23} \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_2^{\varepsilon} = \hat{b}_{2,12}$$

- Αν $\lambda = \lambda_1$ για να μην χάσω rank πρέπει $\hat{b}_{1,12}, \hat{b}_{1,23}$ γραμμικά ανεξάρτητες
- Αν $\lambda = \lambda_2$ πρέπει $\hat{b}_{2,12} \neq 0$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 8/11/2018

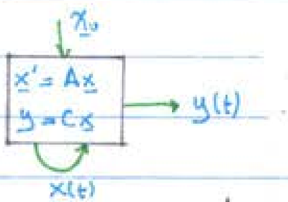
Πόρισμα: Έστω ότι $m=1$. Τότε αναγκαία συνθήκη ώστε $\Sigma(A,B)$ να είναι πλήρως ελέγξιμο είναι να έχω $d_1=d_2=\dots=d_p=1$

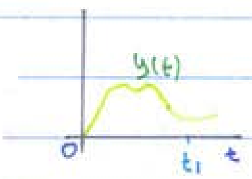
Παρατηρισιμότητα

Έστω $\Sigma(A,C)$: $\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x}, \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} &= C\underline{x} \end{aligned}\right\}$

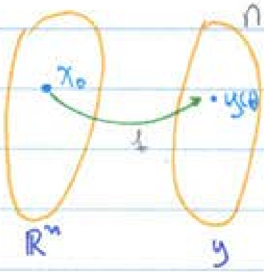
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Ορισμός: Η κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρίσιμο αν καθορίζεται μονοσήμαντα από τη συνάρτηση $y_{[0,t_1]}$ (δηλ. $y(t)$, $t\in[0,t_1]$) για κάποιο $t_1>0$.





Αν κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρίσιμη τότε $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρίσιμο



$y(t) = C\cdot e^{At}\underline{x}_0 \quad t\in[0,t_1]$

από τον ορισμό για να είναι παρατηρίσιμο η f 1-1

Παράδειγμα: Έστω ότι $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$ έχει $\operatorname{rank}(C)=n$ Τότε $\exists\, C^L : C^L C = I_n$ και $y(t) = C\cdot e^{At}\underline{x}_0 \Rightarrow e^{-At}\cdot C^L y(t) = x_0 \Rightarrow \Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρίσιμο.

Γενικά $\underset{0\le\tau\le t_1}{\underline{y}(\tau)} = C e^{A\tau}\underline{x}_0 \Rightarrow e^{A^T\tau} C^T \underline{y}(\tau) = e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\underline{x}_0$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T y(\tau)\, d\tau = \underbrace{\left\{\int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\, d\tau\right\}}_{W_0(0,t_1) = W_0^T(0,t_1) \ge 0} \underline{x}_0$$

Αν $W_0>0 \Rightarrow \underline{x}_0 = W_0^{-1}(0,t_1)\int_0^{t_1} e^{A^T\tau} C^T \underline{y}(\tau)\, d\tau \Rightarrow \Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρίσιμο

Θεώρημα: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο

(ii) $W_o(0,t_1) > 0 \quad \forall\ t_1 > 0$

(iii) Ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\Gamma_o = [C \vdots CA \vdots \dots \vdots CA^{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{pn \times n}$, $\operatorname{rank}(\Gamma_o) = n$

(iv) $\operatorname{rank}([sI-A \vdots C]^T) = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}^{n\times n}$

(v) $\Sigma(A^T, C^T)$ είναι πλήρως ελέγξιμο

Απόδειξη:

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έχουμε $y(t) = Ce^{At}\underline{x}_0 \quad t \in [0,t_1]$, $t_1 > 0$

$\Rightarrow y(0) = C\underline{x}_0$

$y'(t) = CAe^{At}\underline{x}_0 \Rightarrow y'(0) = CA\underline{x}_0$

Αν παραγωγίσω $n-1$ φορές τότε

$\underline{y}^{(n-1)}(t) = CA^{n-1}e^{At}\underline{x}_0 \Rightarrow \underline{y}^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}\underline{x}_0$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_o \underline{x}_0 = \underline{\alpha} \Rightarrow \underline{x}_0 \text{ ορίζεται μονοσήμαντα}$$

όταν οι στήλες του Γ_o είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$\operatorname{rank}(\Gamma_o) = n$

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Έστω $\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο και έστω $\exists\ \underline{x}_0, \underline{x}_0 \neq 0 : \Gamma_o \underline{x}_0 = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 = \underline{0} \Rightarrow C\underline{x}_0 = CA\underline{x}_0 = \dots = CA^{n-1}\underline{x}_0 = 0$$

$\Rightarrow CA^k \underline{x}_0 = 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow C \cdot e^{At}\underline{x}_0 \equiv 0 \quad \forall\ t \in [0,\infty)$

$\Rightarrow y_{(0,t_1)} \equiv 0 \Rightarrow \Sigma(A,C)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο

$$\left(Ce^{At}\underline{x}_0 = C\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t)\, CA^k x_0 = 0 \right)$$

(i) $\Leftrightarrow$ (v)

$\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}([C^T \vdots A^T C^T \vdots \dots \vdots A^{T^{n-1}} C^T]) = n$

$\Leftrightarrow \Sigma(A^T, C^T)$ πλήρως ελέγξιμο

Από αυτό προκύπτουν οι άλλες ισοδυναμίες

$\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \int_0^{t_1} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau > 0 \Leftrightarrow \Sigma(A^T, C^T)$ π.π.

$\Sigma(A,B)$ π.ε. $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(sI - A \vdots B) = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A^T \\ B^T \end{bmatrix} = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \Sigma(A^T, B^T)$ π.π.

ΕΙ2. Θεωρία Ελέγχου 8/11/2018

Ορισμός: Ο μη παρατηρήσιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται

$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{ \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \underline{x}_0$ δεν είναι παρατηρήσιμο $\forall\, t_1 \in (0,\infty) \}$

έχουμε $\mathcal{X}_{\bar{o}} = N_r(\Gamma_0) = N_r\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = \{ \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n : CA^k \underline{x}_0 = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \}$

$= \bigcap_{k=0}^{n-1} N_r(CA^k)$ (και $\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq N_r(C)$)

είχαμε δει ότι

$\mathcal{X}_c$: (i) $A\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{X}_c$ και $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$

(ii) $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{V}$

για τον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ έχουμε

(i) $A\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}}$, $\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq N_r(C)$

(ii) $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{V} \subseteq N_r(C) \Rightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}}$