Πληρότητα Πολλαπλοτήτων

Σβούρος Στυλιανός

Μάιος 2024

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΕΙΣΑΓΩΓΉ

Έχοντας δείξει ότι η συνάρτηση απόστασης $d_g : M \times M \to \mathbb{R}$ είναι μετρική στην M, προσδίδει δηλαδή δομή μετρικού χώρου, και σέβεται την τοπολογία του, το επόμενο ερώτημα που προκύπτει είναι αν αυτός ο μετρικός χώρος είναι πλήρης με τη συνήθη έννοια, και αν ναι, τότε τι σημαίνει γεωμετρικά η πληρότητα. Αυτά είναι τα ζητήματα που θα μας απαχολήσουν στην παρούσα εργασία.

Στα παρακάτω, εκτός αν υποθεί το αντίθετο, η πολλαπλότητα *Riemann* (M, g) είναι συνεκτική.

Ορισμός:

1. Η (M, g) λέγεται **γεωδαισιακά πλήρης** αν κάθε μεγιστική γεωδαισιακή ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, για κάθε $p \in M$ η εκθετική απεικόνιση πάνω από το p ορίζεται σε όλο το T_pM.

2. Ενώ λέγεται **μετρικά πλήρης** αν είναι πλήρης ως μετρικός χώρος με μετρική την συνάρτηση απόστασης $d_g : M \times M \to \mathbb{R}$.

Στόχος μας είναι η απόδειξη του θεωρήματος $Hopf - Rinow$ που αναφέρει ότι αυτές οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες σε συνεκτικές πολλαπλότητες. Εν γένει, φυσικά, αυτό μπορεί να μην συμβαίνει, για παράδειγμα αν M είναι ανοιχτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ τότε δεν είναι, όπως γνωρίζουμε, μετρικά πλήρης.

Λήμμα: Έστω (M, g) συνεκτική *Riemann* και έστω ότι υπάρχει $p \in M$ τέτοιο ώστε η εκθετική απεικόνιση πάνω από το p να ορίζεται σε όλον τον T_pM. Τότε:

α) για κάθε $q \in M$ υπάρχει ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το p στο q.

β) M είναι μετρικά πλήρης.

Απόδειξη: Έστω $q \in M$ τυχόν. Πρώτα θα δώσουμε μία ορολογία: εάν $\gamma : [0, b] \to M$ είναι γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, τότε λέμε ότι η γ στοχεύει στο q εάν:

(i) γ είναι ελαχιστοποιούσα και

(ii) $d_g(p, q) = d_g(p, \gamma(b)) + d_g(\gamma(b), q)$

Για το **(α)** αρκεί ν.δ.ο. υπάρχει τέτοια γ που στοχεύει στο q και έχει μήκος $d_g(p, q)$, καθώς τότε η γ θα είναι ελαχιστοποιούσα (περιέχεται στον όρο 'στοχέυει') και άρα θα έχουμε ότι $d_g(p, \gamma(b)) = L_g(\gamma) = d_g(p, q)$ οπότε η (ii) θα γίνει $d_g(p, q) = d_g(p, q) + d_g(\gamma(b), q) \Rightarrow \gamma(b) = q$ οπότε και η γ θα είναι η ζητούμενη ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το p στο q.

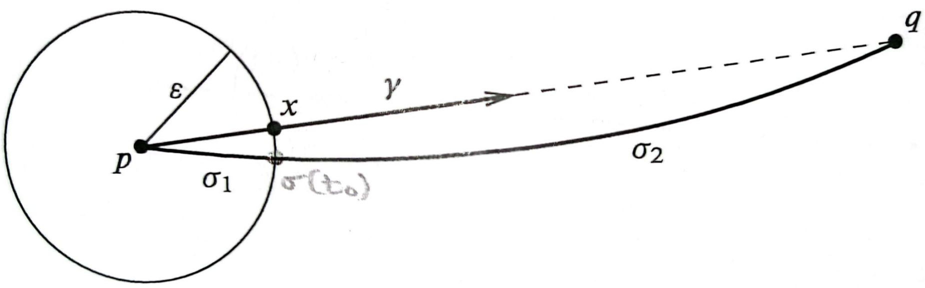
Έστω $\epsilon > 0$ ώστε η κλειστή γεωδαισιακή μπάλα $\overline{B_\epsilon(p)}$ να μην περιέχει το q. Η d_g είναι συνεχής σε μετρικό χώρο και η γεωδαισιακή σφαίρα $S_\epsilon(p) \subset \overline{B_\epsilon(p)}$ συμπαγής (εξ' ορισμού τους), άρα υπάρχει $x \in S_\epsilon(p)$ όπου η $d_g(x, q)$ ελαχιστοποιείται.

Παίρνουμε γ μεγιστική ακτινική γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας ώστε $\gamma\Big|_{[0,\epsilon]}(t) = exp_p(tv)$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(\epsilon) = x$.

1) Θ.δ.ο. η $\gamma\Big|_{[0,\epsilon]}$ στοχεύει στο q.
Αρχικά είναι ελαχιστοποιούσα εξ' ορισμού της, σύμφωνα και με προηγούμενη Πρόταση που είχαμε δει. Μένει να δείξουμε την (ii) για $b = \epsilon$, δηλαδή ότι

$$d_g(p, q) = d_g(p, x) + d_g(x, q)$$

Έστω $\sigma : [0, b_0] \to M$ μία κ.τ. ομαλή καμπύλη με $\sigma(0) = p$ και $\sigma(b_0) = q$ και t_0 τέτοιο ώστε $\sigma(t_0) \in S_\epsilon(p)$ για πρώτη φορά με $\sigma\Big|_{[0,t_0]} := \sigma_1$ και $\sigma\Big|_{[t_0,b_0]} := \sigma_2$.



Έχουμε ότι

$$L_g(\sigma_1) \geq d_g(p, \sigma(t_0)) = d_g(p, x)$$

(όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι $x, \sigma(t_0)$ ανήκουν στην ίδια σφαίρα) και

$$L_g(\sigma_2) \geq d_g(\sigma(t_0), q) \geq d_g(x, q)$$

από τον τρόπο που επιλέξαμε το x.
Συνεπώς

$$L_g(\sigma) \geq d_g(p, x) + d_g(x, q)$$

Παίρνοντας στην τελευταία σχέση το inf όλων αυτών των καμπύλων σ έχουμε:

$$d_g(p, q) \geq d_g(p, x) + d_g(x, q)$$

και το ανάποδο ισχύει από τριγωνική ανισότητα, άρα εν τέλει:

$$d_g(p, q) = d_g(p, x) + d_g(x, q)$$

2)Τώρα για ν.δ.ο. η γ έχει μήκος $d_g(p, q)$.
Έστω $T := d_g(p, q)$ και $\mathscr{A} := \{b \in [0, T] : \gamma\Big|_{[0,b]}$ στοχεύει στο $q\}$.
Οπότε από τα προηγούμενα έχουμε ότι $\epsilon \in \mathscr{A}$ άρα $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Έστω $A = sup(\mathscr{A}) \geq \epsilon$. Λόγω συνέχειας το $\mathscr{A}$ είναι κλειστό στο $[0, T]$ και άρα $A \in \mathscr{A}$.
-Εάν $A = T$ τότε τελειώσαμε.
-Εάν $A < T$, τότε έστω $y = \gamma(A)$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η κλειστή γεωδαισιακή μπάλα $\overline{B_\delta(y)}$ να μην περιέχει το q. Αφού $A \in \mathscr{A}$ τότε από την (ii) έπεται ότι

$$d_g(p,q) = d_g(p,y) + d_g(y,q) \iff d_g(y,q) = T - A$$

Με όμοια κατασκευή με πριν παίρνουμε $z \in S_\delta(y)$ ώστε
$d_g(z,q) \leq d_g(w,q), \forall w \in S_\delta(y)$ και έστω
$\tau : [0, \delta] \to M$ με $|\tau'| = 1$, $\tau(0) = y$, $\tau(\delta) = z$ και $\tau(t) = exp_y(tv)$.
Τότε, ακριβώς με τον ίδιο συλλογισμό, η τ στοχεύει στο q οπότε:

$$d_g(y,q) = d_g(y,z) + d_g(z,q) \iff d_g(z,q) = T - A - \delta$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης και της τριγωνικής ανισότητας έχουμε ότι:

$$d_g(p,z) \geq d_g(p,q) - d_g(z,q) = T - (T - A - \delta) = A + \delta$$

Οπότε η κ.τ. ομαλή καμπύλη που αποτελείται από τον περιορισμό της γ στο $[0, A]$ και την τ, είναι ελαχιστοποιούσα από το p στο z, δηλαδή δεν έχει γωνίες και άρα το z πρέπει να βρίσκεται στη γ, συνεπώς $z = \gamma(A + \delta)$.
Επομένως,

$$d_g(p,q) = T = (A + \delta) + d_g(z,q) = d_g(p,z) + d_g(z,q)$$

οπότε η $\gamma\Big|_{[0,A+\delta]}$ στοχεύει στο q άρα $(A + \delta) \in \mathscr{A}$ ΆΤΟΠΟ.

Για το (β) αρκεί ν.δ.ο. κάθε ακολουθία $Cauchy$ της M συγκλίνει.
Έστω (q_n) $Cauchy$ ακολουθία της M και για κάθε n $\gamma_n(t) := exp_p(tv_n)$ με $|\gamma_n'| = 1$ ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το p στα q_n.
$d_n := d_g(p, q_n)$ οπότε $q_n = exp_p(d_n v_n)$ εφόσον είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Η (d_n) ως $Cauchy$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και η (v_n) με $|v_n| = 1, \forall n$ είναι φραγμένη ακολουθία του T_pM, συνεπώς η ακολουθία $(d_n v_n)$ είναι φραγμένη στο T_pM. Από θεώρημα $Bolzano - Weierstrass$ υπάρχει υπακολουθία $(d_{n_k} v_{n_k})$ που συγκλίνει σε κάποιο $v \in T_pM$ και λόγω συνέχειας εκθετικής έχουμε ότι $q_{n_k} \to exp_p(v) \Rightarrow (q_n)$ ως $Cauchy$ με συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο.

$\square$

Θεώρημα ($Hopf - Rinow$)**:** Μια συνεκτική πολλαπλότητα $Riemann$ M είναι μετρικά πλήρης αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακά πλήρης.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Άμεσο από το προηγούμενο λήμμα.
($\Rightarrow$) Έστω προς άτοπο ότι δεν είναι γεωδαισιακά πλήρης. Τότε υπάρχει μεγιστική γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma : [0, b) \to M$. Εάν (t_n) ακολουθία με $t_n \to b$ και $q_n := \gamma(t_n), \forall n$ τότε εφόσον είναι μοναδιαίας ταχύτητας $\Rightarrow L_g(\gamma\Big|_{[t_n,t_m]}) = |t_n - t_m| \Rightarrow d_g(q_n, q_m) \leq |t_n - t_m|$ δηλαδή η (q_n) είναι $Cauchy$.
Λόγω μετρικής πληρότητας έχουμε ότι $q_n \to q \in M$.
Έστω σταθερά $\delta > 0$ και ομοιόμορφα κανονική περιοχή W του q και έστω $t_m > b - \delta$ και $q_m \in W \Rightarrow W \subset B_\delta(q_m)$ γεωδαισιακή μπάλα.
Εξ' ορισμού γεωδαισιακής μπάλας έχουμε ότι κάθε γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας με αφετηρία το q_m υπάρχει στο $[0, \delta)$ σίγουρα.
Ειδικότερα αν σ γεωδαισιακή με $\sigma(0) = q_m$ και $\sigma'(0) = \gamma'(t_m)$, τότε η $\tilde{\gamma} : [0, t_m + \delta) \to M$ με

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$$

στο $[0, b)$ και

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma(t - t_m)$$

στο $(t_m - \delta, t_m + \delta)$,
είναι καλά ορισμένη εφόσον οι κλάδοι της συμφωνούν στη θέση και την ταχύτητα στο t_m και είναι και οι δύο γεωδαισιακές από υπόθεση, οπότε από μοναδικότητα γεωδαισιακών πρέπει οι δύο αυτές να συμφωνούν και σε όλο το κοινό τους διάστημα. Εφόσον $t_m + \delta > b$ έπεται ότι η $\tilde{\gamma}$ είναι επέκταση της γ στο δεξί άκρο που είναι άτοπο.

$\square$

Επομένως, σε συνεκτικές πολλαπλότητες $Riemann$ θα λέμε ότι είναι πλήρεις εννοώντας και τις δύο έννοιες πληρότητας που είδαμε ότι τότε είναι ισοδύναμες. Σε μη-συνεκτικές πληρότητα σημαίνει γεωδαισιακή πληρότητα, που σε κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ισοδύναμο με τη μετρική πληρότητα.

Πόρισμα 1: Εάν M είναι συνεκτική $Riemann$ και υπάρχει $p \in M$ ώστε η exp_p να ορίζεται σε όλο το T_pM, τότε η M είναι πλήρης.

Η απόδειξη είναι άμεση από το λήμμα.

Πόρισμα 2: Εάν M είναι πλήρης και συνεκτική $Riemann$, τότε κάθε δύο σημεία μπορούν να ενωθούν από μία ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή.

Απόδειξη: Ως πλήρης και συνεκτική είναι γεωδαισιακά πλήρης, δηλαδή υπάρχει p ώστε η exp_p να ορίζεται σε όλο το T_pM και μάλιστα αυτό ισχύει για κάθε p, οπότε από το λήμμα δοθέντος $q \in M$ έπεται το συμπέρασμα.

Πόρισμα 3: Εάν M είναι συμπαγής $Riemann$, τότε είναι γεωδαισιακά πλήρης.

Απόδειξη: Ξέρουμε ότι (M, d_g) είναι μετρικός χώρος και επίσης ξέρουμε από θεώρημα της ανάλυσης ότι σε μετρικούς χώρους συμπαγής $\iff$ πλήρης και ολικά φραγμένος, άρα είναι γεωδαισιακά πλήρης.

References

[1] John M. Lee, "Introduction to Riemannian Manifolds", 2nd edition, Springer, 2018

[2] do Carmo, "Riemannian Geometry", 1993