Σημειώσεις στην Γεωμετρία Riemann

Βασισμένες στις διαλέξεις του Παναγιώτη Γιαννιώτη

Επιμέλεια : Μπιζάνος Κωνσταντίνος

17 Μαΐου 2024

Περιεχόμενα

1 Διάλεξη 01

1.1 Τανυστές

Ορισμός 1. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\omega_1, \ldots, \omega_k \in V^*$. Τότε ορίζεται πλειογραμμική απεικόνιση

$$\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k \colon \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \text{ φορές}} \to \mathbb{R}, \quad \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k(v_1, \ldots, v_k) = \omega_1(v_1) \cdot \omega_2(v_2) \cdots \omega_k(v_k).$$

η οποία καλείται **τανυστικό γινόμενο** των $\omega_1, \ldots, \omega_k \in V^*$.

Παρατήρηση 1. Ο παραπάνω συμβολισμός δεν είναι τυχαίος ! Αν V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε αποδεικνύεται ότι $\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ φορές}}$ (σύνηθες τανυστικό γινόμενο) είναι ένας $\mathbb{R}$ - δ.χ. ισόμορφος με αυτόν των πλειογραμμικών απεικονίσεων $\mathscr{L}\left(V^k; \mathbb{R}\right)$

Απόδειξη. Θεωρήστε την $\psi \colon V^* \times \cdots \times V^* \to \mathscr{L}\left(V^k; \mathbb{R}\right)$ με $(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mapsto \prod_{i=1}^k \omega_i$ και δείξτε ότι είναι πλειογραμμική. Χρησημοποιήστε την *χαρακτηριστική ιδιότητα των τανυστικών γινομένων* για να δείξετε το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2. Θα συμβολίζουμε με $T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ φορές}}$. Ανάλογα την περίσταση με τον συμβολισμό $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$ θα συμβολίζουμε είτε τον αντίστοιχο στοιχειώδη τανυστή είτε την ταύτισή στον $\mathscr{L}\left(V^k; \mathbb{R}\right)$ που δίνεται μέσω του Ορισμού 1. Σε κάθε περίπτωση τα στοιχεία του $T^k(V^*)$ θα λέγονται k **- τανυστές**.

Παρατήρηση 2. Έστω V ένας δ.χ. και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια βάση του και $\left\{v^1, \ldots, v^n\right\}$ η αντίστοιχη βάση του δυϊκού V^* που ικανοποιεί τις σχέσεις $v^i(v_i) = \delta^i_j$. Αν $T \in \mathscr{L}\left(V^k; \mathbb{R}\right)$ και $W_1, \ldots, W_k$ με $W_i = W_i^j v_j$, τότε έχουμε ότι

$$T(W_1, \ldots, W_k) = W_1^{j_1} W_2^{j_2} \cdots W_k^{j_k} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$$

Ορίζοντας $T_{j_1,\ldots,j_k} = T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$, αφού $W_\ell^{j_\ell} = v^{j_\ell}(W_\ell)$, συμπεραίνουμε ότι

$$T(W_1, \ldots, W_k) = T_{j_1,\ldots,j_k} v^{j_1}(W_1) \cdots v^{j_k}(W_k) = T_{j_1,\ldots,j_k} v^{j_1}(W_1) \otimes \cdots \otimes v^{j_k}(W_k).$$

Πρόταση 1. Έστω V δ.χ. και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια βάση του. Αν $\{v^1, \ldots, v^n\}$ η αντίστοιχη δϋική βάση του V^*, τότε μια βάση του $T^k(V^*)$ είναι η

$$\mathscr{B} = \left\{v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k} \mid 1 \leq j_i \leq n,\ 1 \leq i \leq k\right\} \tag{1}$$

Ειδικότερα $\dim_{\mathbb{R}} T^k(V^*) = n^k$.

Απόδειξη. Μέσω της Παρατήρησης 2 προκύπτει ότι $\mathscr{B}$ παράγει τον $T^k(V^*)$. Δείξτε ότι $\mathscr{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Ορισμός 3. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα. Η **δέσμη των k - τανυστών** της M ορίζεται ως

$$T^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} T^k\left(T_p^*M\right).$$

Παρατήρηση 3. Θεωρούμε την συνήθη προβολή $\pi\colon T^k(T^*M) \to M$. Δείξτε ότι μέσω της π η $T^k(T^*M)$ εφοδιάζεται με δομή διανυσματικής δέσμης. Ποιες είναι οι τετριμμενοποιήσεις της ;

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παρατήρηση 4. Αφού $T^k(T^*M)$ είναι μια διανυσματική δέσμη, τότε μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο των ομαλών τομών της $T^k(T^*M)$, δηλαδή το

$$\mathscr{T}^k(M) = \Gamma\left(T^k(T^*M)\right) = \left\{A\colon M \to T^k(T^*M) \mid \pi \circ A = \mathrm{id}_M \text{ και } A \text{ είναι } \mathscr{C}^\infty\right\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathscr{T}^k(M)$ θα λέγονται k - **τανυστικά πεδία**. Έστω (U, φ) ένας ομαλός χάρτης της M με $\left(x^i\right)$ αντίστοιχες συναρτήσεις συντεταγμένων. Τότε, κάθε $A\colon M \to T^k(T^*M)$ με $\pi \circ A = \mathrm{id}_M$ (όχι απαραίτητα $\mathscr{C}^\infty$), στο U γράφεται ως εξής :

$$A = A_{j_1,\ldots,j_k} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k} \tag{2}$$

όπου

$$A_{j_1,\ldots,j_k} = A\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)\colon U \to \mathbb{R}$$

Οι απεικονίσεις $A_{j_1,\ldots,j_k}$ λέγονται **συνιστώσες** της A. Σκοπός είναι να βρούμε ένα κριτήριο, με το οποίο να μπορούμε να εξετάζουμε αν μια τομή A είναι ομαλή ή όχι.

Πρόταση 2. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $A\colon M \to T^k\left(T^*M\right)$ με $\pi \circ A = \mathrm{id}_M$ (όχι απαραίτητα $\mathscr{C}^\infty$). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(α) Το A είναι ομαλό.

(β) Για κάθε ομαλό χάρτη (U, φ) οι αντίστοιχες συνιστώσες $A_{j_1,\ldots,j_k}$ είναι λείες συναρτήσεις στο U.

(γ) Για κάθε $p \in M$, υπάρχει ομαλός χάρτης (U, φ), γύρω από το p, ώστε οι αντίστοιχες συνιστώσες $A_{j_1,\ldots,j_k}$ είναι λείες συναρτήσεις στο U.

(δ) Για κάθε $X_1, \ldots, X_k \in \mathscr{X}(M)$, η συνάρτηση

$$A(X_1, \ldots, X_n)\colon M \to \mathbb{R}, \quad A(X_1, \ldots, X_n)(p) = A_p\left(X_1|_p, \ldots, X_n|_p\right)$$

είναι λεία.

(ε) Για κάθε $U \subseteq M$ ανοικτό και για κάθε $X_1, \ldots, X_k \in \mathscr{X}(U)$ η συνάρτηση

$$A(X_1, \ldots, X_n)\colon U \to \mathbb{R}, \quad A(X_1, \ldots, X_n)(p) = A_p\left(X_1|_p, \ldots, X_n|_p\right)$$

είναι λεία.

Απόδειξη. Άσκηση. □

1.2 Μετρικές Riemann

Ορισμός 4. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Μια **μετρική Riemann** στην M είναι $g\colon M \to T^2\left(T^*M\right)$ ένα συμμετρικό 2 - τανυστικό πεδίο, το οποίο είναι θετικά ορισμένο σε κάθε σημείο. Δηλαδή, για κάθε $p \in M$ υπάρχει $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

- g_p είναι μια διγραμμική απεικόνιση
- g_p είναι συμμετρική, δηλαδή $g_p(v, w) = g_p(w, v)$, για κάθε $v, w \in T_pM$.
- g_p θετικά ορισμένη, δηλαδή $g_p(v, v) \geq 0$ και $g_p(v, v) = 0$ αν και μόνο αν $v = 0$, για κάθε $v \in T_pM$.

Επίσης g είναι C^∞, δηλαδή για κάθε $V, W \in \mathscr{X}(M)$, τότε η συνάρτηση $g(V, W)$ είναι λεία. Το ζεύγος (M, g) ονομάζεται **πολλαπλότητα Riemann**.

Παρατήρηση 5.

- Για κάθε $p \in M$ και $v \in T_pM$ ορίζεται το **μήκος** του v ως $|v| = \sqrt{g_p(v, v)}$.

- Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια C^∞ καμπύλη. Ορίζεται το μήκος της γ ως εξής

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt \tag{3}$$

- Αν (M,g) συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, τότε αυτή επιδέχεται δομή μετρικού χώρου (M,d_g), όπου $d_g\colon M\times M \to \mathbb{R}$ με

$$d_g(p,q) = \inf\left\{\ell(\gamma) \mid \gamma\colon [0,1]\to M,\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q\right\} \tag{4}$$

Από την σχέση 2, για δεδομένο ομαλό χάρτη (U,φ) της M έχουμε ότι η g γράφεται ως $g = g_{i,j}dx^i dx^j$ με $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ και $(g_{ij})_{i,j}$ συμμετρικός πίνακας (αφού g είναι συμμετρικό).

1.3 Γραμμικό ισομορφισμός επαγόμενος από εσωτερικό γινόμενο

Έστω $(V,\langle,\rangle)$ χώρος με (μη εκφυλισμένο) εσωτερικό γινόμενο με $\dim V = n$.

- Η $\langle,\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ ορίζει γραμμική $L\colon V\to V^*$ με $L(v)(w) = \langle v,w\rangle$. Αφού $\langle,\rangle$ είναι μη εκφυλισμένο, τότε $\ker L = \{0\}$, άρα L είναι ισομορφισμός.

- Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}$ μια βάση του V και $\{v^1,\ldots,v^n\}$ η δυική βάση του V^*. Τότε, έχουμε ότι
$$\left[L\left(a^i v_i\right)\right]\left(b^j v_j\right) = \left\langle a^i v_i, b^j v_j\right\rangle = a^i b^j g_{ij}$$
όπου $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Τότε, έχουμε ότι $L\left(a^i v_i\right) = a^i g_{ij} v^j$. Αντιστροφα, έστω $a = a_j v^j \in V^*$. Από το επί της L έχουμε ότι $L\left(\xi^i v_i\right) = \xi^i g_{ij} v^j = a_j v^j$, συνεπώς $\xi^i g_{ij} = a_j$.

- Συμβολίζοντας με $\left(g^{ij}\right)$ το αντίστροφο πίνακα του (g_{ij}) έχουμε ότι $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. Παρατηρήστε ότι $L^{-1}\left(a_j v^j\right) = a_j g^{kj} v_k$.

- Τα παραπάνω μπορούν να συμβολιστούν ως εξής : για $X\in V$ έχουμε ότι $L(X) = X_\flat \in V^*$ και για $a\in V^*$ έχουμε ότι $a^\sharp = L^{-1}(a)\in V$. Οι προηγούμενες δύο απεικονίσεις λέγονται **μουσική ισομορφισμοί**.

2 Διάλεξη 02

2.1 Επέκταση εσωτερικού γινομένου σε δέσμες τανυστών

Όπως, πριν έστω $(V,\langle,\rangle)$ χώρος με (μη εκφυλισμένο) εσωτερικό γινόμενο με $\dim V = n$ και θεωρούμε την $L\colon V\to V^*$.

- Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $\langle,\rangle$ στον V^* ώστε η L να καθίσταται γραμμική ισομετρία, δηλαδή
$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle = \left\langle\omega_1^\sharp,\omega_2^\sharp\right\rangle, \quad \text{για κάθε } \omega_1,\omega_2\in V^*.$$

Ως προς την δυϊκή βάση $\left\{v^1, \ldots, v^n\right\}$ έχουμε ότι

$$L^{-1}\left(v^i\right) = \delta^i_j g^{jm} v_m = g^{im} v_m$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $\left\langle v^i, v^j \right\rangle = g^{ij}$. Άρα, ο αντίστροφος πίνακας $\left(g^{ij}\right)$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον V^*.

- Σε πλήρη αντιστοιχεία θεωρούμε $T = T_{i_1,\ldots,i_k} v^{i_1} \otimes \cdot \otimes v^{i_k}$ και $S = S_{j_1,\ldots,j_k} v^{j_1} \otimes \cdot \otimes v^{j_k}$ στην $T^k\left(V^*\right)$ και ορίζουμε

$$\begin{aligned} & \langle T, S\rangle = \left\langle T_{i_1,\ldots,i_k} v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_k}, S_{j_1,\ldots,j_k} v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k} \right\rangle \\ = \; & T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k} \left\langle v^{i_1} \otimes \cdots \otimes v^{i_k}, v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k} \right\rangle \\ = \; & T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k} \left\langle v^{i_1}, v^{j_1} \right\rangle \cdots \left\langle v^{i_k}, v^{j_k} \right\rangle \\ = \; & T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά ορίζουμε

$$\langle T, S\rangle = T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \tag{5}$$

Παρατήρηση 6. Παρόλα αυτά μπορεί να ορισθεί εσωτερικό γινόμενο στην $T^k\left(V^*\right)$, ο οποίος να είναι ανεξάρτητος από την επιλογή βάση του V ως εξής : για $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$ και $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k$ ορίζουμε

$$\langle \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \rangle = \prod_{i=1}^{k} \langle \omega_i, \eta_i \rangle \tag{6}$$

Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι οι ορισμοί 5 και 6 είναι ισοδύναμοι.

Πρόταση 3. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann διάσταση n. Αν συμβολίσουμε $g_p = \langle , \rangle_p$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

(α) Για κάθε $X \in \mathscr{X}(M)$ υπάρχει μοναδική 1 - μορφή $X_\flat$ ώστε $X_\flat(V) = \langle X, V\rangle$, για κάθε $V \in \mathscr{X}(M)$.

(β) Για κάθε 1 - μορφή ω στην M υπάρχει μοναδικό $\omega^\sharp$ ώστε $\omega(V) = \left\langle \omega^\sharp, V \right\rangle$ για κάθε $V \in \mathscr{X}(M)$.

(γ) Η T^*M γίνεται δέσμη με C^∞ εσωτερικό γινόμενο.

(δ) Η $T^k(T^*M)$ γίνεται δέσμη με C^∞ εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη. (α) Για κάθε $p \in M$, τότε $L(X_p) = X_{p,\flat} \in T_p^*M$, με $X_{p,\flat}(v) = \langle X_p, v \rangle$. Συνεπώς, ορίζεται $X_\flat$ 1- μορφή, όπου για κάθε $V \in \mathscr{X}(M)$ έχουμε ότι $X_\flat(V)_p = \langle X_p, V_p \rangle$.

(β) Έστω ω 1 - μορφή. Τότε, για κάθε $p \in M$ ορίζεται $\omega_p^\sharp = L^{-1}(\omega_p) \in T_pM$. Για $p \in M$ έχουμε ότι

$$\omega(V)_p = \omega_p(V_p) = L\left(\omega_p^\sharp\right)(V_p) = \left\langle \omega_p^\sharp, V_p \right\rangle$$

για κάθε $V \in \mathscr{X}(M)$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\omega(V) = \left\langle \omega^\sharp, V \right\rangle$.

(γ) Έστω ω_1, ω_2 δύο 1- μορφές. Τότε για κάθε $p \in M$ ορίζουμε

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_p = \left\langle \omega_1^\sharp, \omega_2^\sharp \right\rangle_p .$$

Ουσιαστικά ορίζεται $C^\infty(M)$ - εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle : T^*M \times T^*M \to C^\infty(M)$.

(δ) Βλέπε Παρατήρηση 6.

□

2.2 Ύπαρξη Μετρικής Riemann σε Διαφορική Πολλαπλότητα

Παράδειγμα 1. Έστω $\mathbb{R}^n$ η διαφορική πολλαπλότητα με τη συνήθη διαφορική δομή που προκύπτει από τον ολικό χάρτη $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Η συνήθης μετρική Riemann είναι η μετρική $g_{\mathbb{R}^n}$ ως προς τις συνήθεις συντεταγμένες

$$g_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j .$$

Ισοδύναμα, αν $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ και $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$, τότε

$$g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j (X, Y) = a^i b^i$$

δηλαδή το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4. Κάθε διαφορική πολλαπλότητα δέχεται τουλάχιστον μία μετρική Riemann.

Απόδειξη.
- Για κάθε $p \in M$, θεωρούμε χάρτη (U_p, φ_p) με $\varphi_p : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ με συναρτήσεις συντεταγμένων $\left(x^i\right)$. Τότε ορίζεται μετρική Riemann g_{U_p} στο U που δίνεται από τον πίνακα (δ_{ij}).
- Αφού $(U_p)_{p \in M}$ είναι ανοικτό κάλυμμα της M, τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{\psi_p\}_{p \in M}$ με $\psi_p \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $0 \leq \psi_p \leq 1$, $\mathrm{supp}\psi_p \subseteq U_p$ και $\sum_{p \in M} \psi_p = 1$.
- Ορίζουμε $g : M \to T^2\left(T^*M\right) \in \mathscr{T}^2(M)$ με $g_x = \sum_{p \in M} \psi_p(x) g_{U_p}(x)$.

- Δείξτε ότι g ορίζει πράγματι μετρική Riemann.

$\square$

Παρατήρηση 7. Μια διαφορική πολλαπλότητα επιδέχεται άπειρες μετρικές Riemann. Για παράδειγμα αν (M, g) πολλαπλότητα Riemann, τότε $g_a = ag$ είναι μετρική Riemann της M, για κάθε $a > 0$. Γενικότερα, αν $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ με $f > 0$, τότε $\tilde{g} = fg$ επίσης μετρική Riemann. Τότε λέμε ότι η $\tilde{g}$ είναι **σύμμορφη** της g.

2.3 Pullback Τανυστών

Έστω $F \colon M \to N$ μια $\mathscr{C}^\infty$ απεικόνιση μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων και $T \in \mathscr{T}^k(N)$ ένας k - τανυστικό πεδίο. Ορίζουμε το k - τανυστικό πεδίο $F^*T \in \mathscr{T}^k(M)$ ως εξής : αν $p \in M$ και $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$, τότε

$$F^*T_p\left(v_1, \ldots, v_k\right) = T_{F(p)}\left(d_pF(v_1), \ldots, d_pF(v_k)\right) \tag{7}$$

όπου $d_pF \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ το διαφορικό (ή pushforward) της F στο p.

Παρατήρηση 8. Το F^*T είναι πράγματι $\mathscr{C}^\infty$. Έστω $p \in M$ και $\left(y^i\right)$ συντεταγμένες της N σε ένα ανοικτό V που περιέχει το $F(p)$. Τότε, αν $T = T_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \otimes \cdot \otimes dy^{i_k}$, τότε έχουμε ότι

$$F^*T = \left(T_{i_1,\ldots,i_k} \circ F\right) d\left(y^{i_1} \circ F\right) \otimes \cdots \otimes d\left(y^{i_k} \circ F\right)$$

η οποία είναι C^∞ στο $F^{-1}(V) \ni p$.

2.4 Pullback Μετρική Riemann

Έστω $F \colon M \to N$ smooth immersion και g μια μετρική Riemann στην N. Για κάθε $p \in M$, $d_pF \colon T_pM \to T_{F(p)}$ είναι μονομορφισμός, άρα ορίζεται ισομορφισμός $d_pF \colon T_pM \to d_pF(T_pM)$. Συνεπώς, ορίζεται μετρική Riemann F^*g με τον εξής τρόπο : αν $p \in M$ και $v, w \in T_pM$ τότε

$$F^*g(v, w) = g\left(d_pF(v), d_pF(w)\right).$$

Μάλιστα, η τελευταία σχέση καθιστά την απεικόνιση $d_pF \colon T_pM \to d_pF(T_pM)$ γραμμική ισομετρία.

3 Διάλεξη 03

Ορισμός 5. Έστω $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ δύο πολλαπλότητες Riemann.

(α) Μια αμφιδιαφόριση $F \colon M \to \tilde{M}$ θα λέγεται **ισομετρία** μεταξύ των (M, g) και $(\tilde{M}, \tilde{g})$ αν $F^*\tilde{g} = g$.

(β) Οι $(M,g), (\tilde{M},\tilde{g})$ θα λέγονται **ισομετρικές** αν υπάρχει ισομετρία $F\colon M \to \tilde{M}$.

(γ) Μια $F\colon M \to \tilde{M}$ θα λέγεται **τοπική ισομετρία**, αν για κάθε $p \in M$, υπάρχει $U \subseteq M$ ανοικτή περιοχή του p, τέτοια ώστε $F|_U$ να είναι ισομετρία ανάμεσα στις (ανοικτές) υποπολλαπλότητες $(U, g|_U)$ και $(F(U), \tilde{g}|_{F(U)})$.

(δ) Η (M,g) (με $\dim M = n$) λέγεται **επίπεδη** αν είναι τοπικά ισομετρική με την $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$.

3.1 Υποπολλαπλότητες Riemann

- Έστω (M,g) μια πολλαπλότητα Riemann και $S \subseteq M$ μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M. Τότε, η συνήθης ένθεση $S \xrightarrow{i} M$ είναι ομαλή εμφύτευση, ειδικότερα είναι smooth immersion.
- Τότε, ορίζεται i^*g η pullback μετρική στην S με τον εξής τρόπο : για κάθε $p \in S$ και $v, w \in T_pS$ έχουμε ότι

$$\left(i^*g\right)_p(v,w) = g_p\left(d_p i(v), d_p(i)(w)\right) = g_p(v,w) \tag{8}$$

  όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε κάνει την συνήθη ταύτιση $d_p i(v) \equiv v$, αφού $d_p i$ είναι μονομορφισμός. Η παραπάνω μετρική καλείται **επαγόμενη μετρική** στην S. Με την επαγόμενη μετρική (S, i^*g) η S καλείται **υποπολλαπλότητα Riemann της** M.

Παράδειγμα 2. Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{S}^n$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$, συνεπώς ορίζεται η επαγόμενη μετρική $\mathring{g} = i^*g$, η οποία καλείται **συνηθισμένη μετρική** της $\mathbb{S}^n$.

Παρατήρηση 9. Ένας εύκολο τρόπος να υπολογίζουμε επαγόμενες μετρικές σε συντεταγμένες είναι χρησιμοποιώντας την έννοια της *τοπικής παραμέτρησης*.

- Αν $S \subseteq M$ εμφυτευμένη υποποπολλαπλότητα διάστασης k, τότε μια **ομαλή τοπική παραμέτρηση** της S είναι ομαλή $X\colon U \to M$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό, τέτοια ώστε $X(U) \subseteq S$ ανοικτό (στο S) και $X\colon U \to X(U)$ να είναι αμφιαδιαφόριση.
- Παρατηρήστε ότι $X^{-1}\colon X(U) \to U$ αποτελεί ένα ομαλό χάρτη της S. Αφού $i \circ X = X$, παρατηρήστε ότι μέσω της σχέση $X^*g = X^*\left(i^*g\right)$, επάγεται μια τοπική μορφή της επαγόμενης μετρικής.

Παράδειγμα 3. Έστω $f\colon U \to \mathbb{R} \in C^\infty(U)$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

- Θεωρούμε το **γράφημα** της f

$$\mathrm{Gr}f = \left\{\left(u^1, \ldots, u^n, f\left(u^1, \ldots, u^n\right)\right) \mid \left(u^1, \ldots, u^n\right) \in U\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Τότε, $\mathrm{Gr}f$ είναι ομαλή εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n. Αυτό προκύπτει, αφού η $F\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ με $F(p) = (p, f(p))$ είναι ομαλή εμφύτευση με $F(U) = \mathrm{Gr}f$.
- Παρατηρούμε ότι η F είναι ομαλή τοπική παραμέτρηση του $\mathrm{Gr}f$ με αντίστροφη απεικόνιση $F^{-1}\colon \mathrm{Gr}f \to U$, όπου $F^{-1}(p, f(p)) = p$. Θα γράψουμε την τοπική μορφή της επαγόμενες μετρικής ως προς τον χάρτη $\varphi = F^{-1}$ με συναρτήσεις συντεταγμένων $\left(u^1, \dots, u^n\right)$.
- Έχουμε ότι
$$g_{\mathbb{R}^{n+1}} = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$$
Συνεπώς προκύπτει ότι
$$F^* g_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} F^* dx^i \otimes F^* dx^i = \sum_{i=1}^{n} d\left(x^i \circ F\right) = du^1 \otimes du^1 + \cdots + du^n \otimes du^n + df \otimes df.$$

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε την τοπική παραμέτρηση $X\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^3$ της $\mathbb{S}^2$ στον $\mathbb{R}^3$ με $X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$. Από την παραπάνω γενικότερη περίπτωση, η επαγόμενη μετρική $\mathring{g}$ μπορεί να γραφτεί σε συντεταγμένες με τον εξής τρόπο
$$\mathring{g} = \frac{\left(1 - v^2\right) du^2 + \left(1 - u^2\right) dv^2 + 2uvdudv}{1 - u^2 - v^2}.$$

3.2 Γινόμενα Πολλαπλοτήτων Riemann

Έστω (M_1, g_1), (M_2, g_2) πολλαπλότητα Riemann διάστασης n_1 και n_2 αντίστοιχα.

- Το γινόμενο $M_1 \times M_2$ αποκτά δομή διαφορικής πολλαπλότητας διάστασης $n_1 + n_2$ και μάλιστα είναι γνωστό ότι, για κάθε $p_1 \in M_1$ και $p_2 \in M_2$, η απεικόνιση
$$\alpha\colon T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \to T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2,\ \alpha(v) = \left(d_{(p_1,p_2)}\pi_1(v), d_{(p_1,p_2)}\pi_2(v)\right)$$
είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Συνεπώς μπορούμε να κάνουμε την τάυτιση
$$T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \equiv T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2.$$
- Επομένως, με φυσιολογικό τρόπο ορίζεται μετρική Riemann $g = g_1 \oplus g_2$ στην $M_1 \times M_2$ με τον εξής τρόπο :
$$g\left((v, w), (\tilde{v}, \tilde{w})\right) = g_1(v, \tilde{v}) + g_2(w, \tilde{w}).$$
Αν $\left(g^1_{i,j}\right)$ και $\left(g^2_{i,j}\right)$ οι αντίστοιχοι πίνακες των g_1, g_2 (ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων των M_1 και M_2), τότε ο αντίστοιχος πίνακας της g είναι ο
$$g_{i,j} \begin{pmatrix} \left(g^1_{i,j}\right) & 0 \\ 0 & \left(g^2_{i,j}\right) \end{pmatrix}.$$

3.3 Ορθοκανονικά Πλαίσια

Υπενθύμιση 1. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Μια συλλογή $(E_1, \ldots, E_n)$ με $E_i : U \to TM$ ομαλές, όπου $U \subseteq M$ ανοικτό, λέγεται **πλαίσιο** της TM αν $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ είναι βάση του T_pM, για κάθε $p \in U$

Ορισμός 6. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann διάστασης n. Ένα τοπικό, ομαλό πλαίσιο $(E_1, \ldots, E_n)$ της TM με $E_i : U \to TM$, όπου $U \subseteq M$ ανοικτό, θα λέγεται **ορθοκανονικό** αν

$$g_p(E_i|_p, E_j|_p) = \delta_{ij} \quad \text{για κάθε } p \in U.$$

Πρόταση 5. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann. Τότε, για κάθε $p \in M$, υπάρχει $U \subseteq M$ γειτονιά του p και $(E_1, \ldots, E_n)$ ορθοκανονικό πλαίσιο στο U.

Απόδειξη. Έστω (U, φ) χάρτης γύρω από το p με $x^1, \ldots, x^n$ αντίστοιχες συναρτήσεις συντεταγμένων. Τότε, το $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ είναι τοπικό πλαίσιο της TM στο U. Αν $X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ τότε, με την μέθοδο Gram - Schmidt, επαγωγικά ορίζουμε

$$E_j = \frac{X_j - \sum_{i=1}^{j-1} g(E_i, X_j)}{\left| X_j - \sum_{i=1}^{j-1} g(E_i, X_j) \right|}.$$

Παρατηρήστε ότι $(E_1, \ldots, E_n)$ είναι πράγματι ορθοκανονικό πλαίσιο της TM στο U. $\square$

3.4 Riemannian Submersions

Έστω $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ ένα επί, ομαλό submersion, όπου $\tilde{M}, M$ διαφορικές πολλαπλότητες διάστασης m, n αντίστοιχα.

- Για κάθε $y \in M$, έχουμε ότι $\tilde{M}_y = p^{-1}(y)$ είναι κλειστή, εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του $\tilde{M}$. Αυτό προκύπτει, αφού κάθε $\tilde{M}_y$ είναι κανονικό σύνολο στάθμης.

- Για κάθε $x \in \tilde{M}$ ορίζουμε $V_x = \ker(d_x p)$ και αποδεικνύεται ότι $V_x = \ker(d_x p) = T_x\tilde{M}_{p(x)}$. Το V_x θα καλείται **κάθετος χώρος**.

- Από το θεώρημα σταθερής απεικόνισης, για $x \in \tilde{M}$, μπορούμε να βρούμε $\big(U, (x^i)\big)$ και $\big(V, (y^j)\big)$ ομαλούς χάρτες των $\tilde{M}, M$ αντίστοιχα, με κέντρο το x και $p(x)$ αντίστοιχα, ώστε
$$\hat{p}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^n\right).$$
Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι $\left(\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ είναι μια συλλογή από ομαλές, τοπικές τομές της $T\tilde{M}$, όπου $\left(\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}|_z, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_z\right)$ είναι βάση του V_z, για κάθε $z \in U \cap p^{-1}(V)$. Άρα, $V = \bigsqcup_{x \in \tilde{M}} V_x$ ορίζει μια $m - n$ κατανομή στην $\tilde{M}$, δηλαδή μια υποδέσμη της $T\tilde{M}$.

- Για κάθε $x \in \tilde{M}$, ορίζουμε $H_x = V_x^{\perp}$ που λέγεται **οριζόντιος υπόχωρος**. Τότε, έχουμε ότι $T_x\tilde{M} = V_x \oplus H_x$, για κάθε $x \in \tilde{M}$.
- Από την παραπάνω κατασκευή, για $x \in \tilde{M}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε Gram - Schmidt στο τοπικό πλαίσιο
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$
και προκύπτει ορθοκανονικό, ομαλό, τοπικό πλαίσιο, σε ανοικτό που περιέχει το x, $(E_i)_{i=1}^m$ με
$$\operatorname{span}\{E_1|_z, \ldots, E_{m-n}|_z\} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}|_z, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_z\right\}$$
και $E_{m-n+1}|_z, \ldots, E_m|_z$ βάση του H_z (γιατί ;), για κάθε $z \in U \cap F^{-1}(V)$. Συνεπώς, ορίζεται επίσης $H = V^{\perp} = \bigsqcup_{x\in\tilde{M}} H_x$ υποδέσμη του $T\tilde{M}$ με τάξη n.

Ορισμός 7. Έστω $p\colon (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ ένα επί, ομαλό submersion μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann. Η p θα λέγεται **Riemannian submersion** αν $\tilde{g}(X, Y) = g\left(p_*X, p_*Y\right)$, οποτεδήποτε X, Y είναι οριζόντια.

Παράδειγμα 5. Αν (M_1, g_1) και (M_2, g_2) δύο πολλαπλότητες Riemann, τότε οι προβολές $\pi_1\colon (M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2) \to (M_1, g_1)$ και $\pi_2\colon (M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2) \to (M_2, g_2)$ είναι Riemannian submersions.

Πρόταση 6. Έστω $p\colon (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ ένα επί, ομαλό submersion μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann.

(α) Για κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο $W \in \mathscr{X}(\tilde{M})$ υπάρχουν μοναδικά διανυσματικά πεδία $W^H.W^V$, όπου W^H οριζόντιο και W^V κάθετο, ώστε $W = W^H + W^V$

(β) Για κάθε $X \in \mathscr{X}(M)$ υπάρχει μοναδικό οριζόντιο $\tilde{X} \in \mathscr{X}(\tilde{M})$ το οποίο να είναι p - συσχετισμένο με το X. Το $\tilde{X}$ καλείται **οριζόντια ανύψωση** του X.

Απόδειξη. (α) Από την παραπάνω διαδικασία, για $x \in \tilde{M}$, υπάρχει U_x ανοικτή περιοχή του x, ώστε το W γράφεται ως
$$W = \sum_{i=m-n+1}^{m} \lambda_i E_i^x + \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j E_j^x$$

με $\lambda_i = \tilde{g}\left(W, E_i^x\right) \in \mathscr{C}^\infty(U_x)$. Αφού το $(U_x)_{x\in\mathscr{M}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα της $\tilde{M}$, υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{\psi_x\}_{x\in\tilde{M}}$. Παρατηρήστε ότι $W = W^H + W^V$, όπου

$$W^H = \sum_{x\in\tilde{M}} \psi_x \cdot \left(\sum_{i=m-n+1}^{m} \lambda_i E_i^x\right) \quad \text{και} \quad W^H = \sum_{x\in\tilde{M}} \psi_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{m-n} \lambda_j E_j^x\right)$$

όπου W^H είναι οριζόντιο και W^V είναι κάθετο και η γραφή αυτή είναι μοναδική.

(β) Παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in \tilde{M}$, η $d_xp|_{H_x}\colon H_x \to T_{p(x)}M$ είναι ισομορφισμός. Άρα, επάγεται ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών $dp|_H$ που κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "dp|_H"] \arrow[d, "\pi_{\tilde{M}}"'] & TN \arrow[d, "\pi_M"] \\ \tilde{M} \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

Άρα, κάθε $X \in \mathscr{X}(M)$, επάγει ένα μοναδικά p - συσχετισμένη $\hat{X}$ τομή της H. Αν ορίσουμε

$$\tilde{X} \coloneqq i \circ (dp)^{-1} \circ X \circ p$$

όπου $i\colon H \hookrightarrow T\tilde{M}$ (ομαλή, αφού H είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλοτητα της $T\tilde{M}$), έχουμε το ζητούμενο.

□

Θέωρημα 1. Έστω $p\colon (\tilde{M}, \tilde{g}) \to M$ ένα επί, ομαλό submersion και G ομάδα Lie τέτοια ώστε

- η G να δρα ομαλά με ισομετρίες στην $\tilde{M}$. Δηλαδή, υπάρχει $\vartheta\colon G \times \tilde{M} \to \tilde{M}$, ώστε $\vartheta_\eta\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ ισομετρία, για κάθε $\eta \in G$.
- Η G δρα μεταβατικά στα νήματα της p, δηλαδή για κάθε $y \in M$ και $x_1, x_2 \in \tilde{M}_y$, υπάρχει $\eta \in G$ ώστε $\vartheta_\eta(x_1) = x_2$.
- Για κάθε $\eta \in G$, έχουμε ότι $p = p \circ \vartheta_\eta$.

Τότε, υπάρχει μοναδική μετρική Riemann g στην M, ώστε p να είναι Riemannian submersion.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \tilde{M}$ έχουμε ότι $d_xp\colon H_x \to T_{p(x)}M$ είναι ισομορφισμός.

- Έστω $y \in M$. Θέλουμε να ορίσουμε $g_y\colon T_yM \times T_yM$ εσωτερικό γινόμενο, ώστε $g \equiv (g_y)_{y\in M}$ να ορίζει κατάλληλη μετρική Riemann στην M ώστε p να είναι Riemannian submersion.

- Αν $x \in \tilde{M}_y$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε

$$g_y(v,w) \coloneqq \tilde{g}_x \left(\underbrace{(d_x p)^{-1}(v)}_{\in H_x}, \underbrace{(d_x p)^{-1}(w)}_{\in H_x} \right).$$

- Αν δείξουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλά δοσμένος, τότε θα έχουμε το ζητούμενο. Έστω $x_1, x_2 \in \tilde{M}_y$. Τότε, υπάρχει ϑ_η ισομετρία τέτοια ώστε $\vartheta_\eta(x_1) = x_2$. Επίσης, από την αρχική υπόθεση $p = p \circ \vartheta_\eta$.

- Έχουμε λοιπόν ότι $d_{x_1}p = d_{x_2}p \circ d_{x_1}\vartheta_\eta$. Αν καταφέρναμε να δείξουμε ότι

$$d_{x_1}p|_{H_{x_1}} = d_{x_2}p|_{H_{x_2}} \circ d_{x_1}\vartheta_\eta|_{H_{x_1}}$$

  θα είχαμε το ζητούμενο. Δείχνοντας ότι $d_{x_1}\vartheta_\eta(V_{x_1}) = V_{x_2}$, τότε έχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

- Από τις παραπάνω σχέσεις, για $v, w \in T_yM$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \tilde{g}_{x_1}\Big((d_{x_1}p)^{-1}(v), (d_{x_1}p)^{-1}(w)\Big) \\ = \;& \tilde{g}_{x_1}\Big((d_{x_1}p \circ \vartheta_\eta)^{-1}(v), (d_{x_1}p \circ \vartheta_\eta)^{-1}(w)\Big) \\ = \;& \tilde{g}_{x_1}\Big((d_{x_1}\vartheta_\eta)^{-1} \circ (d_{x_2}p)^{-1}(v), (d_{x_1}\vartheta_\eta)^{-1} \circ (d_{x_2}p)^{-1}(w)\Big) \\ = \;& \tilde{g}_{x_2}\Big((d_{x_2}p)^{-1}(v), (d_{x_2}p)^{-1}(w)\Big) \end{aligned}$$

  όπου η τελευταία σχέση προκύπτει γιατί ϑ_η είναι ισομετρία.

Αφήνεται να δειχθεί ότι g είναι πράγματι μετρική Riemann στην M. □

Εφαρμογή 1 (Μετρική Fubini - Study)**.** Θεωρούμε στον $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ την σχέση

$$x \sim y \Leftrightarrow \; \exists\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \; x = z \cdot y.$$

Ορίζουμε τον n - **μιγαδικό προβολικό χώρο** $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$.

- Ο $\mathbb{CP}^n$ εφοδιάζεται με την τοπολογία πηλίκο που προκύπτει μέσω της κανονικής προβολής $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$.

- Αν $U_i = \left\{ \left[z^1, \ldots, z^n\right] \mid z^i \neq 0 \right\}$ ορίζονται φυσιολογικά χάρτες

$$\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^{2n}, \; \varphi_i\left(\left[z^1, \ldots, z^{n+1}\right]\right) = \left(z^1, \ldots, \hat{z^i}, \ldots, z^{n+1}\right)$$

  που καθιστούν τον $\mathbb{CP}^n$ μια (πραγματική) διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

- Αφού $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}\setminus\{0\}$ είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της $\mathbb{R}^{2n+2}$, τότε ο περιορισμός $p = \pi|_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ είναι ομαλή απεικόνιση, συνεπώς $\mathbb{CP}^n$ είναι μια συμπαγής, διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

- Αν θεωρήσουμε την $U(n+1) = \{A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = I_n\}$ την ομάδα Lie των unitary πινάκων, τότε αυτή δρα μεταβατικά στον $\mathbb{CP}^n$ με τον φυσιολογικό τρόπο :

$$A \cdot \left[z^1, \ldots, z^{n+1}\right] := \left[A \cdot \left[z^1, \ldots, z^{n+1}\right]^t\right].$$

- Αφού η $U(n+1)$ δρα στην $\mathbb{S}^{2n+1}$ μεταβατικά με τον φυσιολογικό τρόπο (γιατί ;), τότε έχουμε ότι για κάθε $A \in U(n+1)$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "A\cdot"'] & \mathbb{CP}^n \arrow[d, "A\cdot"] \\
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r, "p"] & \mathbb{CP}^n
\end{tikzcd}$$

  Από το Equivariant Rank Theorem, η p έχει σταθερή τάξη και αφού είναι επί, τότε είναι ομαλό submersion.

- Θεωρούμε την δράση της $\mathbb{S}^1$ (ομάδα Lie) στην $\mathbb{S}^{2n+1}$ με τον εξής τρόπο :

$$e^{i\vartheta} \cdot \left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) := \left(e^{i\vartheta} \cdot z^1, \ldots, e^{i\vartheta} \cdot z^{n+1}\right)$$

  Για κάθε $\varphi \in \mathbb{S}^1$, τότε $p \circ \varphi = p$ και επίσης είναι σαφές ότι δρα μεταβατικά στα νήματα της p.

- Από το Θεώρημα 1, θεωρώντας την $\mathbb{S}^{2n+1}$ με την επαγόμενη μετρική $\mathring{g}$, επάγεται μοναδική μετρική g_{FS} στον $\mathbb{CP}^n$, που καθιστά την p ένα Riemannian submersion. Η μετρική αυτή λέγεται **μετρική Fubini - Study**.

4 Διάλεξη 04

4.1 Μήκη Καμπυλών

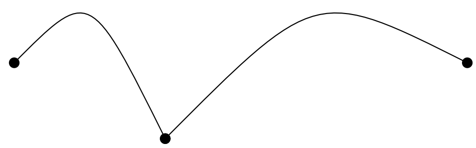
Ορισμός 8. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα. Μια ομαλή απεικόνιση $\gamma\colon I \to M$ θα λέγεται C^∞ - **καμπύλη** στην M, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα.

Παρατήρηση 10. Το I ενδέχεται μην είναι ανοικτό, για παράδειγμα $I = [a, b)$. Στην περίπτωση αυτή, όταν λέμε ότι γ είναι ομαλή, εννοούμε ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή U του a και ομαλή $\tilde{\gamma}\colon U \to M$, ώστε

$$\gamma\Big|_{[a,b)\cap U} = \tilde{\gamma}\Big|_{[a,b)\cap U}.$$

Επίσης, στην περίπτωση αυτή ορίζουμε $\dot\gamma(a) = \dot{\tilde\gamma}(a)$. Προφανώς, ο ορισμός αυτός του $\dot\gamma$ είναι καλά δοσμένος και ανεξάρτητος της επιλογής $\tilde\gamma$.

Ορισμός 9. Μια καμπύλη $\gamma\colon [a,b] \to M$ θα καλείται **κατά τμήματα C^∞ καμπύλη** στην M αν υπάρχει διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, ώστε $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι C^∞ καμπύλη, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$.



Παράδειγμα κατά τμήματα C^∞ καμπύλης

Ορισμός 10. Μια C^∞ καμπύλη $\gamma\colon I \to M$ θα λέγεται **κανονική** αν $\dot\gamma(t) \neq 0$, για κάθε $t \in [a,b]$.

Ορισμός 11. Μια καμπύλη $\gamma\colon [a,b] \to M$ θα λέγεται **κατά τμήματα κανονική** καμπύλη, αν υπάρχει διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, ώστε $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι κανονική, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$.

Ορισμός 12 (μήκος C^∞ καμπύλης)**.** Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann και $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια C^∞ καμπύλη στην M. Ορίζουμε ως **μήκος** της γ να είναι

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|_g \, dt = \int_a^b \left[g_{\gamma(t)} \left(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \right) \right]^{1/2} dt \tag{9}$$

Ορισμός 13. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann και $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια C^∞ καμπύλη στην M. Δηλαδή υπάρχει διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, ώστε $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι C^∞ καμπύλη, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$. Ορίζουμε ως **μήκος** της γ να είναι

$$L_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} L_g \left(\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]} \right).$$

Παρατήρηση 11. Αν $\gamma\colon [a,b] \to (M,g)$ κατά τμήματα C^∞ καμπύλη και $a < c < b$, τότε ισχύει ότι

$$L_g(\gamma) = L_g\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + L_g\left(\gamma|_{[c,d]}\right).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παρατήρηση 12. Έστω $F\colon (M,g) \to \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ ισομετρία μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων Riemann και $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κατα τμήματα C^∞ καμπύλη στην M. Τότε ισχύει ότι $L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(F \circ \gamma)$.

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [a,b]$, γνωρίζουμε ότι $(F \circ \gamma)'(t) = d_\gamma(t) \circ \gamma'(t)$. Από την σχέση και από το γεγονός ότι Fείναι ισομετρία, το ζητούμενο έπεται άμεσα. □

Ορισμός 14. Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια C^∞ καμπύλη στην M. Μια $\tilde{\gamma}\colon [c,d] \to M$ θα λέγεται **αναπαραμέτρηση** της γ αν υπάρχει $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ αμφιδιαφόριση ώστε $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Παρατήρηση 13. Αναπαραμέτρηση κανονικής καμπύλης είναι κανονική.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Ορισμός 15. Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη στην M. Μια $\tilde{\gamma}\colon [c,d] \to M$ θα λέγεται **αναπαραμέτρηση** της γ αν υπάρχει $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ αμφιδιαφόριση ώστε $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Πόρισμα 1. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι η $\tilde{\gamma}$ θα πρέπει να είναι επίσης μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη στην M.

Απόδειξη. Υπάρχει διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, ώστε $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι C^∞ καμπύλη, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$. Τότε, αν $c_i = \varphi^{-1}(a_i)$, τότε παρατηρούμε ότι $\tilde{\gamma}|[c_i, c_{i+1}]$ είναι C^∞ καμπύλη, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$. □

Πρόταση 7. Αν $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κατά τμήματα C^∞ καμπύλη στην M και $\tilde{\gamma}\colon [c,d] \to M$ μια αναπαραμέτρησή της γ, τότε ισχύει ότι $L_g(\gamma) = L_g(\tilde{\gamma})$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που γ είναι C^∞ και έπειτα το ζητούμενο έπεται άμεσα εφαρμόζοντας την αρχική περίπτωση στα υποδιαστήματα της διαμέρισης όπου γ είναι ομαλή.

- Αφού $\tilde{\gamma}$ είναι αναπαραμέτρηση της γ, τότε υπάρχει $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ αμφιαδιαφόριση τέτοια ώστε $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.
- Αφού φ είναι αμφιαδιαφόριση, τότε $\varphi' \neq 0$ στο $[c,d]$ και λόγω της συνέχειας έχουμε ότι $\varphi' > 0$ ή $\varphi' < 0$ στο $[c,d]$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :
  - Αν $\varphi' > 0$, περνόντας για κάθε $t \in [c,d]$ περνόντας σε διαφορικά έχουμε ότι
    $$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$
    Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι
    $$L_g(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \left|\tilde{\gamma}'(t)\right|_g dt = \int_c^d \left|\gamma'(\varphi(t))\right|_g \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|_g dt = L_g(\gamma).$$
  - Αν $\varphi' > 0$, περνόντας για κάθε $t \in [c,d]$ περνόντας σε διαφορικά έχουμε ότι
    $$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$
    Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι
    $$L_g(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \left|\tilde{\gamma}'(t)\right|_g dt = \int_c^d - \left|\gamma'(\varphi(t))\right|_g \cdot \varphi'(t) dt = \int_b^a - \left|\gamma'(t)\right|_g dt = L_g(\gamma).$$

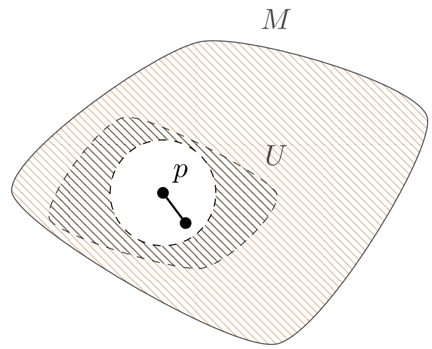
□

Λήμμα 1. Έστω M συνεκτική, διαφορική πολλαπλότητα. Για κάθε $p, q \in M$, υπάρχει $\gamma\colon [0,1] \to M$ κατά τμήματα κανονική καμπύλη στην M ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = q$.

Απόδειξη. Έστω $p \in M$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathscr{X} = \{q \in M \mid \exists\, \gamma\colon [0,1] \to M \text{ κατά τμήματα κανονική τ.ω. } \gamma(0) = p\ \gamma(1) = q\}.$$

(α) Έχουμε ότι $\mathscr{X} \neq \emptyset$. Θεωρούμε ομαλό χάρτη (U, φ) με κέντρο το p (δηλαδή $\varphi(p) = 0$) και $\mathbb{B}(0,\varepsilon) \subseteq \varphi(U)$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{B}(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα tx με $t \in [0,1]$ από το 0 στο x. Αν $\gamma\colon [0,1] \to M$ με $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tx)$, τότε αυτή είναι μια κανονική καμπύλη από το p στο $\varphi^{-1}(x)$. Συνεπώς, $\varphi^{-1}(x) \in \mathscr{X}$.



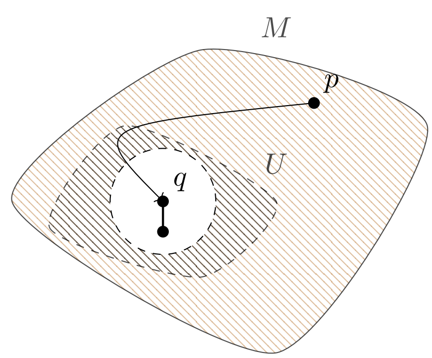
(β) Το $\mathscr{X}$ είναι ανοικτό. Έστω $q \in \mathscr{X}$. Τότε υπάρχει $\gamma_1 \colon [0,1] \to M$ κατά τμήματα κανονική από το p στο q.

(γ) Όπως παραπάνω, θεωρουμε (U, φ) με κέντρο το q (δηλαδή $\varphi(p) = 0$) και $\mathbb{B}(0,\varepsilon) \subseteq \varphi(U)$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{B}(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα tx με $t \in [0,1]$ από το 0 στο x. Αν $\gamma_2 \colon [0,1] \to M$ με $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tx)$, τότε αυτή είναι μια κανονική καμπύλη από το q στο $\varphi^{-1}(x)$.

(δ) Θεωρώντας την καμπύλη

$$\gamma(t) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

τότε αυτή είναι μια κατα τμήματα κανονική καμπύλη από το p στο $\varphi^{-1}(x)$. Άρα, έχουμε ότι $\varphi^{-1}\left(\mathbb{B}(0,\varepsilon)\right) \subseteq \mathscr{X}$. Άρα, $\mathscr{X}$ είναι ανοικτό.



(ε) Με αντίστοιχα επιχειρήματα δείξτε ότι $\mathscr{X}$ είναι κλειστό και από την συνεκτικότητα της M συμπεράνετε ότι $\mathscr{X} = M$.

$\square$

Ορισμός 16. Έστω (M, g) συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Η **απόσταση** δύο σημείων $p, q \in M$ είναι η ποσότητα

$$d_g(p,q) = \inf \{L_g(\gamma) \mid \gamma\colon [a,b] \to M \text{ κατά τμήματα } C^\infty \text{ τέτοια ώστε } \gamma(a) = p \text{ και } \gamma(b) = q\} \tag{10}$$

Παρατήρηση 14. Από το Λήμμα 1, κάθε δύο σημεία ενώνονται με μια κατά τμήμα C^∞ καμπύλη, συνεπώς η απόσταση είναι καλά ορισμένη.

Παρατήρηση 15. Έστω $F\colon (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ ισομετρία μεταξύ δύο συνεκτικών πολλαπλοτήτων Riemann. Για κάθε $p, q \in M$ ισχύει ότι $d_g(p,q) = d_{\tilde{g}}(F(p), F(q))$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 12. □

4.2 Πολλαπλότητες Riemann ως Μετρικοί Χώροι

Κίνητρο 1. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε ότι κάθε συνεκτική πολλαπλότητα Riemann (M, g) εφοφιασμένη με την παραπάνω απόσταση d_g ορίζει μετρικό χώρο. Μάλιστα θα δείξουμε ότι η προκείπτουσα μετρική τοπολογία μέσω της d_g, ταυτίζεται με την δοσμένη τοπολογία της M.

Λήμμα 2. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και g μετρική Riemann στο U. Αν $K \subseteq U$ συμπαγές, τότε υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in K$ να ισχύει

$$c|v|_{g^n_{\mathbb{R}}} \leq |v|_g \leq C|v|_{g^n_{\mathbb{R}}} \tag{11}$$

Απόδειξη.
- Θεωρούμε το σύνολο $L = \left\{(x,v) \in T\mathbb{R}^n \mid |v|_{g^n_{\mathbb{R}}} = 1\right\} \equiv K \times \mathbb{S}^{n-1}$, το οποίο είναι συμπαγές.
- Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi\colon L \to \mathbb{R}$, όπου $\varphi(x,v) = |v|_g$. Είναι άμεσο ότι φ είναι συνεχής, άρα φ επιδέχεται μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- Για κάθε $(x,v) \in L$ έχουμε ότι $|v|_{g_{\mathbb{R}^n}} = 1$, συνεπώς $v \neq 0$ και άρα $\varphi(x,v) > 0$. Άρα, αν c, C η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της φ, προκύπτει ότι c, C είναι θετικές σταθερές. Άρα, για κάθε $(x,v) \in L$ ισχύει ότι
$$c \leq |v|_g \leq C$$
- Τώρα, για κάθε $v \in T_xK$ με $v \neq 0$ έχουμε ότι $|v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \neq 0$, συνεπώς $v/|v|_{g_{\mathbb{R}^n}} \in L$, άρα εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για το $v/|v|_{g_{\mathbb{R}^n}}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Θέωρημα 2. Μια συνεκτική πολλαπλότητα Riemann (M, g) εφοδιασμένη με την απόσταση d_g που ορίζεται από την 10 αποκτά δομή μετρικού χώρου.

Απόδειξη. (α) Είναι σαφές ότι για κάθε $p, q \in M$ ότι $d_g(p,q) = d_g(q,p)$. Επίσης, $d_g(p,p) = 0$, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε το σταθερό μονοπάτι $\gamma \equiv p$ το οποίο έχει μήκος ίσο με το 0.

(β) Θα αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Έστω $p, q, r \in M$. Θα δείξουμε ότι

$$d_g(p,r) \leq d_g(p,q) + d_g(q,r).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του inf, υπάρχουν κατά τμήματα C^∞ καμπύλες $\gamma_1 \colon [0,1] \to M$ και $\gamma_2 \colon [0,1] \to M$ από το p στο q και από το q στο r αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$L_g(\gamma_1) < d_g(p,q) + \varepsilon/2 \quad \text{και} \quad L_g(\gamma_2) < d_g(q,r) + \varepsilon/2$$

Θεωρώντας το γινόμενό τους

$$\gamma(t) = \gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

έχουμε ότι

$$d_g(p,r) \leq L_g(\gamma) = L_g(\gamma_1) + L_g(\gamma_2) < d_g(p,q) + d_g(q,r) + \varepsilon$$

και έχουμε το ζητούμενο.

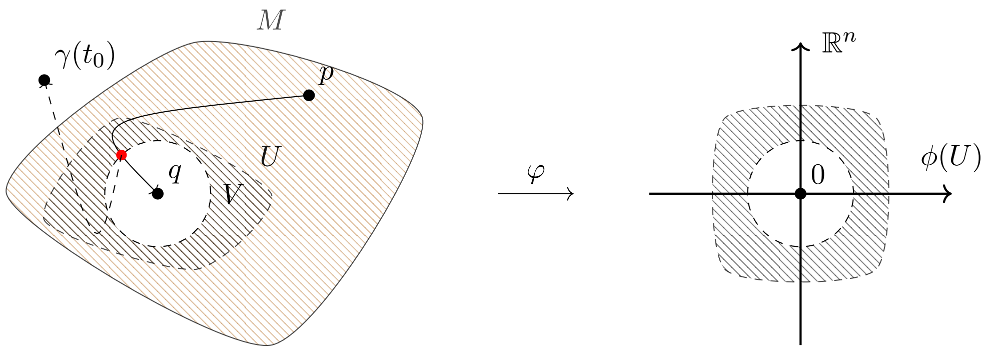
(γ) Θα αποδείξουμε ότι αν $p \neq q$, τότε $d_g(p,q) > 0$. Το αντίστροφο είναι σαφές από το (α). Έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω $p \neq q$ στην M. Αφού M είναι Hausdorff, τότε μπορούμε να βρούμε ομαλό χάρτη (U, φ) με κέντρο το p ώστε $q \notin U$. Αφού $\varphi(p) = 0$, τότε υπάρχει $\overline{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} \subseteq \varphi(U)$ και ορίζουμε $V = \varphi^{-1}\left(\mathbb{B}(0,\varepsilon)\right)$.
- Έχουμε ότι $\varphi\left(\overline{V}\right) = \overline{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} \subseteq \varphi(U)$ συμπαγές, άρα μπορούμε για την $\overline{g} = \left(\varphi^{-1}\right)^* g$ να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.
- Συνεπώς, υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$, ώστε για κάθε $x \in \overline{\mathbb{B}(0,\varepsilon)}$ και $v \in T_x\mathbb{R}^n$ να ισχύει ότι
$$c|v|_{g^n_{\mathbb{R}}} \leq |v|_{\overline{g}} \leq C|v|_{g^n_{\mathbb{R}}}.$$
- Από την τελευταία σχέση, για κάθε κατα τμήματα C^∞ καμπύλη της M που βρίσκεται στο $\overline{V}$ ισχύει η σχέση
$$cL_{g_{\mathbb{R}^n}}\left(\varphi \circ \gamma\right) \leq L_g\left(\gamma\right) \leq L_{g_{\mathbb{R}^n}}\left(\varphi \circ \gamma\right)$$

- Τα σημεία p, q μπορούν να ενωθούν με μια $\gamma\colon [a,b] \to M$ κατά τμήματα, κανονική C^∞ καμπύλη. Θεωρούμε $t_0 = \sup\left\{t \in [a,b] \mid \gamma(t) \in \overline{V}\right\}$. Λόγω συνέχειας, έχουμε ότι $\gamma(t_0) \in \overline{V}$.
- Εφόσον η $\gamma|_{[a,t_0]}$ βρίσκεται στο $\overline{V}$ έχουμε ότι

$$L_g(\gamma) \geq L_g\left(\gamma|_{[a,t_0]}\right) \geq cL_{g_{\mathbb{R}^n}}\left(\varphi \circ \gamma|_{[a,t_0]}\right) \geq \varepsilon c > 0$$

Περνόντας σε inf προκύπτει ότι $d_g(p,q) > \varepsilon c > 0$ και έχουμε το ζητούμενο.



□

Πόρισμα 2. Έστω (M,g) συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Η μετρική τοπολογία του (M,d_g) ταυτίζεται με την τοπολογία της M ως διαφορική πολλαπλότητα.

Απόδειξη. (α) Έστω $U \subseteq M$ ανοικτό με την τοπολογία της πολλαπλότητας και $p \in U$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 είδαμε ότι για κάθε $q \notin U$ προκύπτει ότι $d_g(p,q) \geq \varepsilon c$. Άρα, για κάθε $q \in M$ που ικανοποιεί την σχέση $d_g(p,q) < \varepsilon c$ έχουμε ότι $q \in U$. Άρα, $\mathbb{B}_g(p, \varepsilon c) \subseteq U$. Επομένως U είναι ανοικτό ως προς την μετρική τοπολογία.

(β) Έστω $W \subseteq M$ ανοικτό ως προς την μετρική τοπολογία και $p \in W$.

- Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 2 μπορούμε να βρούμε (U,φ) χάρτη με κέντρο το p και $V \subseteq U$ ώστε $\varphi\left(\overline{V}\right) = \overline{\mathbb{B}(0,r)}$. Άρα, ομοίως μπορούμε να βρούμε σταθερές $c, C > 0$ ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$c|v|_{g^n_{\mathbb{R}}} \leq |v|_g \leq C|v|_{g^n_{\mathbb{R}}}$$

για κάθε $q \in \overline{V}$ και $v \in T_qM$.
- Αφού το W είναι ανοικτό (με την μετρική τοπολογία) υπάρχει αρκούντος μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbb{B}_g(p, \varepsilon C) \subseteq W$.

- Θεωρώντας το $V_\varepsilon = \left\{q \in \overline{V} \mid d_{g_{\mathbb{R}^n}}(p,q) < \varepsilon\right\}$, δείξτε ότι $V_\varepsilon \subseteq \mathbb{B}_g(p, \varepsilon C)$, από την παραπάνω σχέση. Αφού V_ε ανοικτή περιοχή του p (με την τοπολογία της πολλαπλότητας) έχουμε το ζητούμενο.

□

Ορισμός 17. Έστω (M, g) μια συνεκτική πολλαπλότητα Riemann.

- Η M θα λέγεται **πλήρης** αν (M, d_g) είναι πλήρης μετρικός χώρος.
- Ένα $B \subseteq M$ θα λέγεται **φραγμένο** αν υπάρχει $K > 0$ τέτοια ώστε $d_g(x, y) \leq K$, για κάθε $x, y \in B$.
- Η **διάμετρος** της M είναι η ποσότητα

$$\operatorname{diam}(M, g) = \operatorname{diam}(M, d_g) = \sup\left\{d_g(p, q) \mid p, q \in M\right\}.$$

Πόρισμα 3. Κάθε συμπαγής πολλαπλότητα Riemann έχει πεπερασμένη διάμετρο.

5 Διάλεξη 05

5.1 Το πρόβλημα της δεύτερης παραγώγου.

Κίνητρο 2. Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε την έννοια του ευθύγραμμου τμήματος όπως ήδη την γνωρίζουμε στους ευκλείδειους χώρους. Γνωρίζουμε στους ευκλείδειους χώρους (με τη συνήθη μετρική), ότι η καμπύλη ελάχιστου μήκους που ενώνει δύο σημεία είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει. Όμως, σε επιφάνειες, ενέχεται ο κίνδυνος το ευθύγραμμο τμήμα δύο σημεία της επιφάνειας να μην βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στην επιφάνεια. Συνεπώς, για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, γνωρίζοντας ότι κάθε δύο σημεία μιας επιφάνειας ενώνονται με μια κανονική καμπύλη (μάλιστα μπορούμε να την επιλέξουμε και μοναδιαίας ταχύτητας με κατάλληλη αναπαραμέτρηση), θα θέλαμε να εξασφαλίσουμε, για δύο τυχαία σημεία μιας ομαλής επιφάνειας, την ύπαρξη μιας καμπύλης που τα ενώνει ″ όσο πιο ευθύγραμμης ″ κατά το δυνατό γίνεται.

Για αυτή την ζητούμενη καμπύλη γ, από την συνήθη μελέτη μας στην θεωρία καμπυλών και επιφανειών του $\mathbb{R}^3$, ο τρόπος μας να μετράμε την καμπυλότητα της είναι μέσω της ευκλείδειας επιτάχυνσης $\ddot{\gamma}$. Για ένα δεδομένο σημείο $\gamma(t)$, η $\ddot{\gamma}(t)$ έχει μια αντίστοιχη προβολή $\ddot{\gamma}(t)^T$ στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο $\gamma(t)$, της οποία το μέτρο μας δίνει τη λεγόμενη γεωδαισιακή καμπυλότητα κ_g. Για να ικανοποιεί η γ την παραπάνω συνθήκη ″ ευθύτητας ″ θα θέλαμε $\kappa_g = 0$.

Όμως, εδώ προκύπτει εξής πρόβλημα αν προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω ζητούμενα ! Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα και $\gamma \colon I \to M$ καμπύλη στην M. Ενώ γνωρίζουμε ότι ο ορισμός της $\dot{\gamma}$ είναι ανεξάρτητος συντεταγμένων, δεν έχουμε κάποιον φυσικό τρόπο να ορίσουμε την έννοια της *δευτερης παραγώγου* για την γ ! Αν προσπαθήσουμε να παραγωγίσουμε το διανυσματικό πεδίο $\dot{\gamma}(t)$ με τον φυσιολογικό τρόπο

$$\ddot{\gamma}(t_0) = \frac{d\dot{\gamma}}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)}{t}$$

τότε ο παραπάνω κλάσμα δεν είναι καλά ορισμένο αφού $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, ενώ $\dot{\gamma}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$.

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι ένας ενδεχομένος ορισμός μέσω χαρτών δεν θα μπορούσε να είναι ανεξάρτητος του αντίστοιχου χάρτη θεωρώντας την καμπύλη $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ και υπολογίζοντας το $\ddot{\gamma}$ στις συνήθεις αλλά και πολικές συντεταγμένες αντίστοιχα.

5.2 Συνοχές σε Διανυσματικές Δέσμες

Ορισμός 18. Έστω $\pi\colon E \to M$ μια ομαλή διανυσματική δέσμη πάνω από μια διαφορική πολλαπλότητα M. Μια **συνοχή** στην E είναι μια απεικόνιση

$$\nabla\colon \mathscr{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \quad (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma \ ,$$

όπου $\Gamma(E)$ είναι η $C^\infty(M)$ - άλγεβρα των ομαλών τομών της E, με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) Η ∇ είναι $C^\infty(M)$ - γραμμική ως προς X, δηλαδή

$$\nabla_{fX+gY}\sigma = f \cdot \nabla_X \sigma + g \cdot \nabla_Y \sigma, \quad \text{για κάθε } f, g \in C^\infty(M) \tag{12}$$

(β) Η ∇ είναι $\mathbb{R}$ - γραμμική ως προς σ, δηλαδή

$$\nabla_X (a\sigma + b\tilde{\sigma}) = a \cdot \nabla_X \sigma + b \cdot \nabla_X \tilde{\sigma}, \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{R} \tag{13}$$

(γ) Η ∇ ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου, δηλαδή

$$\nabla_X (f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla_X \sigma + X(f) \cdot \sigma, \quad \text{για κάθε } f \in C^\infty(M) \tag{14}$$

Η ποσότητα $\nabla_X \sigma$ λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** της σ στην κατεύθυνση του X.

Παρατήρηση 16. Παρότι ο ορισμός της συνοχής ορίζεται στις ολικές τομές της E, μέσω των επόμενων λημμάτων, θα αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\nabla_X \sigma\Big|_p$ εξαρτάται μόνο από το X_p καθώς και από την τοπική συμπεριφορά του σ σε μια ανοικτή περιοχή του p.

Πρόταση 8. Έστω ∇ συνοχή σε μια δ.δ. $\pi\colon E \to M$ και $p \in M$. Έστω $X, \tilde{X} \in \mathscr{X}(M)$ και $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Gamma(E)$ για τα οποία υπάρχει ανοικτή περιοχή U του p, τέτοια ώστε $X = \tilde{X}$ και $\sigma = \tilde{\sigma}$ στο U. Τότε, ισχύει ότι

$$\nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma}\Big|_p$$

Απόδειξη. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο σκέλη.

(α) Αρχικά θα δείξουμε ότι $\nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla_{\tilde{X}} \sigma\Big|_p$. Από την σχέση 12, αρκεί να δείξουμε ότι αν $X \equiv 0$ στο U, τότε $\nabla_X \sigma\Big|_p = 0$.

- Μπορούμε να θεωρήσουμε $\psi \in C^\infty(M)$ μια bump function, όπου $\psi(p) = 1$ και $\text{supp}\psi \subseteq U$. Τότε, $\psi \cdot X \in \mathscr{X}(M)$.
- Από τον παραπάνω ορισμό της ψ έχουμε ότι $\psi \cdot X = 0$ στην M, συνεπώς ισχύει ότι

$$0 = \nabla_{\psi \cdot X} \sigma\Big|_p = \psi(p) \cdot \nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla_X \sigma\Big|_p.$$

(β) Για το δεύτερο σκέλος θα δείξουμε ότι αν $\sigma = \tilde{\sigma}$ στο U, τότε $\nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla_X \tilde{\sigma}\Big|_p$. Για το δείξουμε αυτό αρκεί, από την σχέση 13, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\sigma = 0$ στο U, τότε $\nabla_X \sigma\Big|_p = 0$.

- Θεωρούμε την ψ που ορίσθηκε παραπάνω. Τότε, έχουμε ότι $f \cdot \sigma = 0$ στην M. Από την σχέση 14 υπολογίζουμε ως εξής :

$$0 = \nabla_X \psi \cdot \sigma\Big|_p = \psi(p) \cdot \nabla_X \sigma\Big|_p + X_p(\psi) \cdot \sigma_p = \nabla_X \sigma\Big|_p$$

Συνδυάζοντας τα (α) και (β) έχουμε άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Πρόταση 9 (Περιορισμός Συνοχής)**.** Έστω $U \subseteq M$ ανοικτό. Τότε, υπάρχει μοναδική συνοχή ∇^U στην διανυσματική δέσμη $\pi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U$, ώστε για κάθε $\tilde{X} \in \mathscr{X}(M)$ και $\tilde{\sigma} \in \Gamma(E)$ να ισχύει ότι

$$\nabla^U_{\tilde{X}|_U} \tilde{\sigma}|_U = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma}\Big|_U \tag{15}$$

Απόδειξη.

- Έστω $X \in \mathscr{X}(U)$ και $\sigma \in \Gamma(E_U)$. Αφού $U \subseteq \overline{U} \subseteq M$ μπορούμε να βρούμε $\psi \in \mathscr{C}^\infty(M)$ μια bump function τέτοια ώστε $\psi|_U \equiv 1$.
- Αν ορίσουμε $\tilde{X} = \psi \cdot X$ και $\tilde{\sigma} = \psi \cdot \sigma$, τότε ορίζουμε $\nabla^U_X \sigma = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\sigma}\Big|_U$ Από την Πρόταση 8 παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη της επέκτασης $\tilde{X}, \tilde{\sigma}$. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι η ∇^U είναι πράγματι συνοχή και μάλιστα ότι ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση.

□

Πρόταση 10. Έστω ∇ συνοχή σε μια δ.δ. $\pi\colon E \to M$, $X, \tilde{X} \in \mathscr{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ και $p \in M$ τέτοιο ώστε $X_p = \tilde{X}_p$. Τότε, ισχύει ότι

$$\nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla_{\tilde{X}} \sigma\Big|_p .$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $X_p = 0$, τότε $\nabla_X \sigma\Big|_p = 0$. Έστω $\big(U, (x^i)\big)$ ομαλός χάρτης της M γύρω από το p. Τότε, μπορούμε να γράψουμε το X στις τοπικές συντεταγμένες του U ως εξής :

$$X = X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Συνεπώς, αφού $X_p = 0$, τότε έχουμε ότι $X^i(p) = 0$. Από την σχέση 12 και από την παραπάνω πρόταση έχουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς :

$$\nabla_X \sigma\Big|_p = \nabla^U_{X|_U} \sigma|_U\Big|_p = \nabla^U_{X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}} \sigma|_U\Big|_p = X^i(p) \cdot \nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sigma|_U\Big|_p = 0.$$

□

Παρατήρηση 17. Αν ∇ μια συνοχή στην $\pi\colon E \to M$, για $v \in T_pM$ μπορούμε να ορίσουμε διανυσματικό πεδίο $X \in \mathscr{X}(M)$ με $v = X_p$. Συνεπώς, από την παραπάνω πρόταση ορίζεται απεικόνιση

$$\nabla\colon T_pM \times \Gamma(E) \to E_p, \quad \nabla_v \sigma = \nabla_X \sigma|_p$$

η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις 12,13,14.

5.3 Αφφινικές Συνοχές

Ορισμός 19. Μια συνοχή $\nabla\colon \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$ στην εφαπτόμενη δέσμη TM θα καλείται **αφφινική συνοχή**.

Παρατήρηση 18. Έστω ∇ αφφινική συνοχή σε μια διαφορική πολλαπλότητα M. Έστω $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ και $\{E_1,\ldots,E_n\}$ τοπικό πλαίσιο της TM σε ένα ανοικτό U της M. Τότε τα X, Y μπορούν να γραφτούν σε τοπικές συντεταγμένες ως εξής :

$$X = X^i \cdot E_i \quad \text{και} \quad Y = Y^j \cdot E_j$$

Θα γράψουμε την $\nabla_X Y$ τοπικά, συναρτήσει του παραπάνω πλαισίου . Έχουμε ότι στο U ισχύει το εξής :

$$\nabla_X Y|_U = \nabla^U_{X^i\cdot E_i} Y^j\cdot E_j = X^i\cdot\nabla^U_{E_i}\left(Y^j\cdot E_j\right) = X^i\cdot Y^j\cdot\nabla^U_{E_i}E_j + X\left(Y^j\right)E_j$$

Αφού $\nabla^U_{E_i}E_j \in \mathscr{X}(U)$, για κάθε i, j, τότε ισχύει ότι

$$\nabla^U_{E_i}E_j = \Gamma^k_{i,j}E_k \tag{16}$$

όπου $\Gamma^k_{i,j}\colon U\to\mathbb{R}$ λείες. Συνεπώς, η παραπάνω μορφή μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\nabla_X Y = \left[X\left(Y^k\right) + X^i\cdot Y^j\cdot\Gamma^k_{i,j}\right]E_k \tag{17}$$

Ορισμός 20. Οι n^3 σε πλήθος συναρτήσεις $\Gamma^k_{i,j}\colon U\to\mathbb{R}$ που ορίσθηκαν από την σχέση 16 λέγονται **σύμβολα Christoffel** της ∇ ως προς το τοπικό πλαίσιο $\{E_1,\ldots,E_n\}$.

Παράδειγμα 6. Αν $X = X^i\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}$ και $Y = Y^j\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}$ δύο διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^n$, παρατηρήστε ότι η σχέση

$$\nabla_X Y = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}$$

ορίζεται αφφινική συνοχή στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι $\Gamma^k_{i,j}\equiv 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] = \mathscr{L}_X Y.$$

όπου $\mathscr{L}_X Y$ η παράγωγος Lie του Y στην κατεύθυνση του X.

5.4 Επαγόμενες Συνοχές σε Υποπολλαπλότητες

Λήμμα 3. Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα, A ένα κλειστό υποσύνολο της M και $A \subseteq U$ ανοικτό υποσύνολο της M. Αν X ομαλό διανυσματικό πεδίο στο A, τότε υπάρχει $\tilde{X} \in \mathscr{X}(X)$ τέτοιο ώστε $\tilde{X}|_A = X$ και $\mathrm{supp}\tilde{X} \subseteq U$.

Απόδειξη.

- Για κάθε $p \in A$ υπάρχει $U_p \subseteq M$ ανοικτό και X_p ομαλό διανυσματικό πεδίο στο U_p ώστε $X_p|_{U_p \cap A} = X|_{U_p \cap A}$.
- Το $\tilde{X} = \{U_p \mid p \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα της M, άρα υπάρχει ομαλή διαμέριση της μονάδας $\{f_p \mid p \in A\} \cup \{f_0\}$ με $\mathrm{supp} f_p \subseteq U_p$, $\mathrm{supp} f_0 \subseteq X \setminus A$ και $\sum_{p \in A} f_p + f_0 = 1$.
- Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο $\tilde{X} = \sum_{p \in A} f_p X_p$ και δείξτε ότι ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

$\square$

Λήμμα 4 (Λήμμα επέκτασης διανυσματικών πεδίων σε υποπολλαπλότητες)**.** Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και $S \subseteq M$ εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Δοσμένου $X \in \mathscr{X}(S)$, δείξτε ότι υπάρχει διανυσματικό πεδίο Y σε γειτονιά του S ώστε $X = Y|_S$. Επιπλέον, δείξτε ότι κάθε τέτοιο διανυσματικό πεδίο μπορεί να επεκταθεί σε όλο το M αν υποθέσουμε ότι S είναι properly εμφυτευμένη.

Απόδειξη.

- Έστω $p \in S$. Τότε, υπάρχει ομαλός χάρτης (U_p, φ_p) ώστε $S \cap U_p$ να είναι k-slice του U_p. Ειδικότερα, $S \cap U_p$ είναι κλειστό υποσύνολο του U_p , συνεπώς $U_p \setminus S$ είναι ανοικτό υποσύνολο του U_p (άρα και του M).
- Έστω $U = \bigcup_{p \in S} U_p$ και από το Λήμμα 3 , αρκεί να δείξουμε ότι S είναι κλειστό υποσύνολο του U.
- Πράγματι, $U \setminus S = \bigcup_{p \in S} U_p \setminus S$ ανοικτό υποσύνολο του U, άρα έχουμε το ζητούμενο. Αν S είναι properly εμφυτευμένη, τότε είναι και κλειστό υποσύνολο του M, άρα από το Λήμμα 3 έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

$\square$

Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Δεδομένης της συνοχής που ορίσθηκε στο Παράδειγμα 6 θα ορίσουμε μια επαγόμενη συνοχή στην TM.

- Έστω $p \in M$. Από το θεώρημα σταθερής τάξης μπορούμε να βρούμε (U, φ) και (V, id_V) ομαλούς χάρτες με κέντρο το p στις M και $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα με $F(U) \subseteq V$ ώστε η φυσιολογική ένθεση i να έχει την παρακάτω αναπαράσταση

$$\hat{i}\left(x^1, \ldots, x^k\right) = \left(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0\right).$$

  Θεωρώντας $T_qM \leq T_q\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ τοπικό πλαίσιο της TM. Τότε, έχουμε ότι $T_q\mathbb{R}^n = T_qM \oplus T_qM^{\perp}$.

- Θεωρήστε την προβολή $\pi_q \colon T_q\mathbb{R}^n \to T_qM$, με $\pi_q(v) \in T_qM$ να είναι η αντίστοιχη συνιστώσα του v στον T_qM.

- Έστω $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Από το Λήμμα 3 και από τον συλλογισμό της αποδείξης της Πρότασης 9 υπάρχουν επεκτάσεις $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\tilde{X}|_M = X$ και $\tilde{Y}|_M = Y$.

- Ορίζουμε $\nabla^{\top} \colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ ως εξής :

$$\nabla^{\top}_X Y|_p = \pi_p\left(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\Big|_p\right). \tag{18}$$

  Θα δείξουμε ότι $\nabla^{\top}$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη επεκτάσεων, και μάλιστα ορίζει μια αφφινική συνοχή στην M. Τότε, η $\nabla^{\top}$ λέγεται **εφαπτομενική συνοχή**.

Λήμμα 5. Ο τελεστής $\nabla^{\top} \colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ που δίνεται από την σχέση 18 είναι καλά ορισμένος και ορίζει αφφινική συνοχή στην M.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

6 Διάλεξη 06

6.1 Αφηρημένα Τανυστικά Γινόμενα

Κίνητρο 3. Στις πρώτες διαλέξεις ορίσαμε την έννοια του τανυστικού γινομένου μεταξύ πλειογραμμικών συναρτήσεων καθώς και δέσμες k - τανυστών. Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε την έννοια της δέσμης k - τανυστών μιας διαφορικής πολλαπλότητας και ο καταλληλότερος τρόπος να γίνει αυτό είναι δίνοντας μια ″ δεύτερη ″ οπτική στο ζήτημα αυτό.

- Έστω $V_1, \ldots, V_k$ πραγματικοί διανυσματικοί. Για το σύνολο $V_1 \times \cdots \times V_k$ μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστοιχο ελεύθερο διανυσματικό χώρο

$$F(V_1 \times \cdots \times V_k) = \bigoplus_{(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k} \mathbb{R}_{(v_1, \ldots, v_k)}$$

όπου $\mathbb{R}_{(v_1,\dots,v_k)}$ είναι ένα αντίτυπο του $\mathbb{R}$. Μέσω της εμφύτευσης $V_1 \times \cdots \times V_k \hookrightarrow F(V_1 \times \cdots \times V_k)$ κάθε στοιχείο του $F(V_1 \times \cdots \times V_k)$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m, \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R},\ x_1, \dots, x_m \in V_1 \times \cdots \times V_k.$$

- Θεωρούμε W τον υπόχωρο του $F(V_1 \times \cdots \times V_k)$ που παράγεται από τα στοιχεία :

$$\begin{aligned}&a(v_1, \dots, v_k) - (v_1, \dots, av_i, \dots, v_k), \quad i = 1, \dots, k\\ &(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_k) - (v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v_i', \dots, v_k), \quad i = 1, \dots, k\end{aligned}$$

Ορισμός 21. Το **τανυστικό γινόμενο** των $V_1, \dots, V_k$ ορίζεται να είναι ο χώρος πηλίκο

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k = F(V_1 \times \cdots \times V_k)/W.$$

Παρατήρηση 19. Συμβολίζουμε με $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = [(v_1, \dots, v_k)]$ τα οποία στοιχεία καλούνται **στοιχειώδεις τανυστές**. Από τον τρόπο ορισμού τους είναι σαφές ότι

$$\begin{aligned}&a(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = (v_1 \otimes \cdots \otimes av_i \otimes \cdots \otimes v_k), \quad i = 1, \dots, k\\ &v_1 \otimes \cdots \otimes v_i + v_i' \otimes \cdots \otimes v_k = v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k - v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_k, \quad i = 1, \dots, k\end{aligned}$$

Πρόταση 11 (Βάση του $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$)**.** Έστω $V_1, \dots, V_k$ δ.χ. διάστασης $n_1, \dots, n_k$ αντίστοιχα. Έστω $\left\{E_j^i\right\}$ βάσεις των $V_1, \dots, V_k$ με $i = 1, \dots, k$ και $j = 1, \dots, n_i$. Τότε, μια βάση του $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ είναι

$$\mathscr{B} = \left\{E_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes E_{i_k}^k \mid i_j \in \{1, \dots, n_j\},\ j \in \{1, \dots, k\}\ \right\} \tag{19}$$

Απόδειξη. Άσκηση $\square$

Θέωρημα 3. Έστω $\mathscr{L}(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$ ο διανυσματικός χώρος των $\mathbb{R}$ - πλειογραμμικών συναρτήσεων. Τότε, ισχύει ότι

$$\mathscr{L}(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R}) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*.$$

Απόδειξη. Αν $\left\{E^i_j\right\}$ βάσεις των $V_1, \ldots, V_k$ με $i = 1, \ldots, k$ και $j = 1, \ldots, n_i$, τότε έστω $\left\{\varepsilon^j_i\right\}$ $i = 1, \ldots, k$ και $j = 1, \ldots, n_i$ οι δϋικές βάσεις των $V_1^*, \ldots, V_k^*$ αντίστοιχα. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi\colon V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \to \mathscr{L}\left(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R}\right), \quad \Phi\left(e_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes E_k^{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{i_j}.$$

Δείξτε ότι η Φ είναι γραμμικός ισομορφισμός. □

Παρατήρηση 20. Για κάθε διανυσματικό χώρο V ισχύει ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $V \cong V^{**}$. Μέσω αυτής της παρατήρησης και από το Θεώρημα 3, για κάθε $V_1, \ldots, V_k$ δ.χ. πεπερασμένης διάστασης ισχύει ότι

$$\mathscr{L}\left(V_1^*, \ldots, V_k^*; \mathbb{R}\right) \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$$

Σημείωση 1. Για λόγους απλότητας, ″ παραβιάζοντας ″ τους συμβολισμούς της Διάλεξης 01, θα συμβολίζουμε για δοθέν διανυσματικό χώρο V με

$$T^k(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k \text{ φορές}} \equiv \mathscr{L}\left(V, \ldots, V; \mathbb{R}\right)$$

και με

$$T_\ell(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{\ell \text{ φορές}} \equiv \mathscr{L}\left(V^*, \ldots, V^*; \mathbb{R}\right)$$

Τα στοιχεία του $T^k(V)$ λέγονται k **- συναλλοίωτοι τανυστές**, ενώ τα στοιχεία του $T_\ell(V)$ λέγονται ℓ **- ανταλλοίωτοι τανυστές**.

6.2 (k, ℓ) - Τανυστές

Ορισμός 22. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Συμβολίζουμε με

$$T^k_\ell(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{\ell-\text{φορές}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k-\text{φορές}}$$

τα στοιχεία του οποίου καλούνται (k, ℓ) **- τανυστές**.

Παρατήρηση 21. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις και θεωρήματα είναι σαφές ότι ο δ.χ. $T^k_\ell(V)$ είναι ισόμορφος με τον δ.χ. το πλειογραμμικών απεικονίσεων

$$T\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell \text{ φορές}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ φορές}} \to \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση 22. Παρατηρήστε ότι $T_0^0(V) = \mathbb{R}$, $T_0^1(V) = V^*$, $T_1^0(V) = V$, $T_1^1(V) = V \otimes V^*$ και $T_1^2(V) = V \otimes V \otimes V^*$.

Πρόταση 12 (Βάση του $T_\ell^k(V)$)**.** Έστω V διανυσματικός χώρος, $E_1, \ldots, E_n$ βάση του V και $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ η αντίστοιχη δϋική βάση του V^*. Τότε κάθε στοιχείο $T \in T_\ell^k(V)$ γράφεται μοναδική στην εξής μορφή

$$T = T_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_\ell} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_\ell} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}$$

όπου

$$T_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_\ell} = T\left(\varepsilon^{j_1}, \ldots, \varepsilon^{j_\ell}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}\right).$$

Ορισμός 23. Έστω V διανυσματικός χώρος. Αν $T \in T_\ell^k(V)$ και $G \in T_q^p(V)$, τότε το **τανυστικό γινόμενο** των F, G ορίζεται να είναι ο $(k+p, \ell+q)$ - τανυστής

$$\begin{aligned} & F \otimes G\Big(\omega^1, \ldots, \omega^{\ell+q}, X_1, \ldots, X_{k+p}\Big) \\ = \;& F\Big(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\Big) \cdot G\Big(\omega^{\ell+1}, \ldots, \omega^{\ell+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}\Big) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 23 (Εσωτερικό γινόμενο στο $T_\ell^k(V)$)**.** Έστω (V, g) χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, έχουμε δει ότι επάγονται μουσικοί ισομορφισμοί

$$g^\flat \colon V \to V^* \quad \text{και} \quad g^\sharp \colon V^* \to V$$

Συνεπώς, επάγεται εσωτερικό γινόμενο στον V^* με το εξής τρόπος : για κάθε $\omega, \eta \in V^*$ ορίζουμε

$$\langle \omega, \eta \rangle = \Big\langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \Big\rangle.$$

Από τα παραπάνω ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο εσωτερικό γινόμενο στο $T_\ell^k(V)$ ως εξής

$$\begin{aligned} & \Big\langle X_1 \otimes \cdots \otimes X_\ell \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k, Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_\ell \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^k \Big\rangle \\ = \;& \prod_{j=1}^{\ell} \langle X_j, Y_j \rangle \cdot \prod_{j=1}^{k} \left\langle \omega^j, \eta^j \right\rangle \end{aligned}$$

6.3 Contractions

Ορισμός 24 (Contraction)**.** Έστω V διανυσματικός χώρος, $k, \ell \geq 0$ και $0 \leq a \leq \ell$ και $0 \leq b \leq k$. Ένα **contraction** ως προς a, b είναι μια απεικόνιση $c^a_b \colon T^k_\ell(V) \to T^{k-1}_{\ell-1}(V)$ με

$$c^a_b\left(X_1 \otimes \cdots \otimes X_\ell \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k\right) = \omega^b(X_a) \cdot X_1 \otimes \cdots \otimes \hat{X}_a \otimes \cdots \otimes X_\ell \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\omega^b} \otimes \cdots \otimes \omega^k.$$

Πρόταση 13. Έστω V διανυσματικός χώρος, $E_1, \ldots, E_n$ βάση του V και $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ η αντίστοιχη δϋική βάση του V^*. Τότε, το παραπάνω contraction γράφεται ως εξής :

$$\begin{aligned} & c^a_b\left(T^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_\ell} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}\right) \\ = \;& T^{j_1,\ldots,j_{a-1},m,j_{a+1},\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_{b-1},m,i_{b+1},\ldots,i_k} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{E_{j_a}} \otimes \cdots \otimes E_{j_\ell} \otimes \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\varepsilon^{i_b}} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}. \end{aligned}$$

όπου με τον τελευταίο συμβολισμό εννοούμε άθροιση ως προς $m = 1, \ldots, n$.

Παράδειγμα 7. Έστω $T \in T^2_0(V) = T^2(V)$ και $X, Y \in T^0_1(V) = V$, τότε δείξτε ότι (χρησιμοποιώντας κάποια βάση του V) ότι $c^1_1 \circ c^1_1 (T \otimes X \otimes Y) = T(X, Y)$.

6.4 Δέσμες (k, ℓ) - τανυστών

Ορισμός 25. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα. Η **δέσμη των** (k, ℓ) τανυστών είναι το σύνολο

$$T^k_\ell(M) = \bigsqcup_{p \in M} T^k_\ell(T_p(M)).$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι μέσω της προβολής $\pi \colon T^k_\ell(M) \to M$, το σύνολο $T^k_\ell(M)$ αποκτά δομή ομαλής διανυσματικής δέσμης.

Παρατήρηση 24 (Τομές (k, ℓ) τανυστικών δεσμών)**.** Έστω M διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Για κάθε (U, φ) ομαλό χάρτη της M με $x^1, \ldots, x^n$ συναρτήσεις συντεταγμένων κάθε $F \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$ γράφεται στην μορφή

$$F = F^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}.$$

όπου $F^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} \colon U \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^\infty(U)$ με

$$F^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} = F\left(dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_\ell}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right).$$

Θα δούμε ότι κάθε $F \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$ μπορεί να ταυτιστεί με μια $\mathscr{C}^\infty(M)$ - πλειογραμμική απεικόνιση

$$F \colon \mathscr{X}^*(M) \times \cdots \mathscr{X}^*(M) \times \mathscr{X}(M) \times \cdots \mathscr{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M).$$

7 Διάλεξη 07

7.1 Τομές (k,ℓ) τανυστικών δεσμών

Παρατήρηση 25. Έστω $F \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση

$$\tilde{F}\colon \underbrace{\mathscr{X}^*(M) \times \cdots \mathscr{X}^*(M)}_{\ell-\text{φορές}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \mathscr{X}(M)}_{k-\text{φορές}} \to \mathscr{C}^\infty(M)$$

με τον εξής τρόπο :

$$\tilde{F}\left(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\right)\Big|_p := F_p\left(\omega^1|_p, \ldots, \omega^\ell|_p, X_1|_p, \ldots, X_k|_p\right) \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι $\mathscr{C}^\infty(M)$ - πλειογραμμική. Εδω προκύπτει προκύπτει το εξής ερώτημα. Ισχύει το αντίστροφο ; Δηλαδή, αν $T\colon \underbrace{\mathscr{X}^*(M) \times \cdots \mathscr{X}^*(M)}_{\ell-\text{φορές}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \mathscr{X}(M)}_{k-\text{φορές}} \to \mathscr{C}^\infty(M)$ είναι μια $\mathscr{C}^\infty(M)$ - πλειογραμμική απεικόνιση, επάγεται $F \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$ τέτοια ώστε $\tilde{F} = T$;

Πρόταση 14. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και

$$T\colon \underbrace{\mathscr{X}^*(M) \times \cdots \mathscr{X}^*(M)}_{\ell-\text{φορές}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \mathscr{X}(M)}_{k-\text{φορές}} \to \mathscr{C}^\infty(M)$$

είναι μια $\mathscr{C}^\infty(M)$ - πλειογραμμική απεικόνιση. Τότε, με τους παραπάνω συμβολισμούς, υπάρχει $F \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$ τέτοια ώστε $\tilde{F} = T$.

Απόδειξη.

- Για κάθε $p \in M$ ορίζουμε $\mathbb{R}$ - πλειογραμμική F_p με τον εξής τρόπο :

  $$F_p\colon T^*_pM \times \cdots \times T^*_pM \times T_pM \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$$

  με

  $$F_p\left(\eta^1, \ldots, \eta^\ell, v_1, \ldots, v_k\right) = T\left(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\right)\Big|_p$$

  όπου $\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k$ επεκτάσεις των $\eta^1, \ldots, \eta^\ell, v_1, \ldots, v_k$.

- Αν δείξουμε ότι η F είναι καλά ορισμένη έχουμε το ζητούμενο. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη επεκτάσεων. Αρχικά θα δείξουμε το εξής : αν $\omega^i = \widetilde{\omega^i}$ και $X_j = \widetilde{X_j}$ σε κάποιο ανοικτό γύρω από το p, τότε έχουμε ότι

  $$T\left(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\right)\Big|_p = T\left(\widetilde{\omega^1}, \ldots, \widetilde{\omega^\ell}, \widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_k}\right)\Big|_p.$$

- Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\omega^i = 0$ $X_j = 0$ στο U, τότε

$$T\left(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\right)\Big|_p = 0.$$

Αυτό επιγχάνεται με παραπλήσιο τρόπο, όπως στην Πρόταση 8.

- Όπως, στην απόδειξη της Πρότασης 10 δείξτε ότι αν $\omega^i|_p = \widetilde{\omega^i}|_p$ και $X_j|_p = \widetilde{X_j}|_p$, τότε ισχύει ότι

$$T\left(\omega^1, \ldots, \omega^\ell, X_1, \ldots, X_k\right)\Big|_p = T\left(\widetilde{\omega^1}, \ldots, \widetilde{\omega^\ell}, \widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_k}\right)\Big|_p.$$

$\square$

Πρόταση 15. Κάθε διαφορική πολλαπλότητα δέχεται αφφινική συνοχή.

Απόδειξη.

- Έστω $\{U_a, \varphi_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ ένας ομαλός άτλας μιας διαφορικής πολλαπλότητας M. Από το Παράδειγμα 6, για κάθε $a \in \mathscr{A}$, ορίζεται συνοχή $\nabla^a \colon \mathscr{X}(U_a)\times\mathscr{X}(U_a) \to \mathscr{X}(U)$.

- Υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{\psi_a\}_{a\in\mathscr{A}}$ συμβατή με το κάλυμμα $\{U_a\}_{a\in\mathscr{A}}$. Θεωρούμε την

$$\nabla\colon \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M), \quad \nabla_X Y = \sum_{a\in\mathscr{A}} \psi_a \cdot \nabla^a_{X|_{U_a}} Y|_{U_a}.$$

- Αφήνεται σαν άσκηση στο αναγνώστη να δείξει ότι η ∇ ορίζει αφφινική συνοχή στην M.

$\square$

Παρατήρηση 26. Μια αφφινική συνοχή $\nabla\colon \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ [1] δεν μπορεί εν γένει να είναι μια τομή της $T^2_1(M)$, αφού ενδέχεται να μην είναι γραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή.

Πρόταση 16. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ∇^1, ∇^2 αφφινικές συνοχές στην M. Ορίζουμε

$$D\colon \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M), \quad D(X,Y) = \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y$$

Τότε, ισχύει ότι $D \in \Gamma\left(T^2_1(M)\right)$.

[1] Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια διγραμμική απεικόνιση $V\times V \to V$ είναι μια απεικόνιση $V^*\times V\times V \to \mathbb{R}$ ταυτίζοντας $V \cong V^{**}$.

Απόδειξη. Άσκηση για τον αναγνώστη. □

Πρόταση 17. Έστω ∇ μια αφφινική συνοχή στην M. Αν $\mathscr{A}(TM)$ είναι το σύνολο των αφφινικών συνοχών της M τότε

$$\mathscr{A}(TM) = \left\{\nabla + D \mid D \in \Gamma\left(T_1^2(M)\right)\right\}.$$

Απόδειξη.

- Η μια σχέση περιέχεσθαι είναι άμεση από την Πρόταση 16, αφού κάθε $\tilde{\nabla}$ αφφινική συνοχή γράφεται $\tilde{\nabla} = \left(\tilde{\nabla} - \nabla\right) + \nabla$.
- Για την αντίστροφη σχέση περιέχεσθαι έστω $D \in \Gamma\left(T_1^2(M)\right)$. Είναι άμεσο ότι $\nabla + D$ είναι $\mathscr{C}^\infty(M)$ - γραμμική ως προς X και $\mathbb{R}$ - γραμμική ως προς Y.
- Έστω $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, τότε ισχύει ότι

  $$D(X, fY) + \nabla_X(fY) = fD(X,Y) + X(f)Y + f\nabla_X Y = X(f)Y + f\cdot(D(X,Y) + \nabla_X Y)$$

  άρα ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz.

□

7.2 Επέκταση αφφινικής συνοχής σε κάθε δέσμη $T_\ell^k(M)$

Πρόταση 18. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ∇ αφφινική συνοχή. Η ∇ καθορίζει μονοσήμαντα οικογένεια συνοχών $\nabla\colon \mathscr{X}(M) \times \Gamma\left(T_\ell^k(M)\right) \to \Gamma\left(T_\ell^k(M)\right)$ σε κάθε δέσμη $T_\ell^k(M)$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες.

(α) Η επαγόμενη $\nabla\colon \mathscr{X}(M) \times \Gamma\left(T_1^0(M)\right) \to \Gamma\left(T_1^0(M)\right)$ (όπου $\Gamma\left(T_1^0(M)\right) = \mathscr{X}(M)$) να ταυτίζεται με την αρχική ∇.

(β) Για κάθε $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, ικανοποιείται η σχέση $\nabla_X(f) = X(f)$. [2]

(γ) Ικανοποιείται ο κανόνας του Leibniz ως προς τανυστικό γινόμενο :

$$\nabla_X\left(T \otimes S\right) = \left(\nabla_X T\right) \otimes S + T \otimes \left(\nabla_X S\right)$$

(δ) Η ∇ μετατίθεται με τα contractions, δηλαδή για κάθε $c\colon \Gamma\left(T_\ell^k(M)\right) \to \Gamma\left(T_{\ell-1}^{k-1}(M)\right)$ contraction ισχύει η σχέση

$$\nabla_X \circ c(T) = c \circ \nabla_X T.$$

[2] Έχουμε ότι $T_0^0(M) = M \times \mathbb{R}^n$. Μπορεί να δείξει κανείς ότι $\Gamma\left(T_0^0(M)\right) = \mathscr{C}^\infty(M)$, συνεπώς η έκφραση $\nabla_X(f) \in \mathscr{C}^\infty$ έχει νόημα.

Επιπλεόν,

i. Για κάθε $\omega \in \mathscr{X}^*(M)$ και $X, V \in \mathscr{X}(M)$ ικανοποιείται η σχέση

$$\nabla_X [\omega(V)] = (\nabla_X \omega)(V) + \omega(\nabla_X V).$$

ii. Για κάθε $T \in \Gamma\left(T^k_\ell(M)\right)$, $\omega^1, \dots, \omega^\ell \in \mathscr{X}^*(M)$ και $V_1, \dots, V_k \in \mathscr{X}(M)$, τότε

$$\begin{aligned} & \nabla_X \left[T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right)\right] \\ = \quad & (\nabla_X T)\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right) \\ + \quad & \sum_{i=1}^{\ell} T\left(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right) \\ + \quad & \sum_{i=1}^{\ell} T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, \nabla_X V^i, \dots, V_k\right) \end{aligned}$$

Απόδειξη. • Αρχικά θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες i. και ii. αν υποθέσουμε την ύπαρξη της οικογένεια συνοχών που ικανοποιούν τα (α) - (δ).

i. Έστω $\omega \in \mathscr{X}^*(M)$ και $X, V \in \mathscr{X}(M)$. Η $\omega(V)$ μπορεί να γραφτεί ως $c^1_1(\omega \otimes V) = \omega(V)$, για το contraction c^1_1. Τότε, από τις (γ) και (δ) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \nabla_X [\omega(V)] = \nabla_X \circ c^1_1(\omega \otimes V) = c^1_1 \circ \nabla_X (\omega \otimes V) \\ = \quad & c^1_1 \circ [\nabla_X(\omega) \otimes V + \omega \otimes \nabla_X V] \\ = \quad & (\nabla_X \omega)(V) + \omega(\nabla_X V) \end{aligned}$$

ii. Θα δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $T \in \Gamma\left(T^1_1(M)\right)$ και οι υπόλοιπες σχέσεις προκύπτουν με ανάλογο τρόπο. Έστω $T = Y \otimes \eta \in \Gamma\left(T^1_1(M)\right)$ απλός τανυστής και $\omega \in \mathscr{X}^*(M)$ και $X, V \in \mathscr{X}(M)$. Τότε, έχουμε ότι

$$T(\omega, V) = c \circ c\,(V \otimes Y \otimes \eta \otimes \omega)$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \nabla_X (T(\omega, V)) = c \circ \circ \nabla_X (V \otimes T \otimes \omega) \\ = \quad & c \circ c\,[\nabla_X V \otimes T \otimes \otimes + V \otimes \nabla_X T \otimes \omega + V \otimes T \otimes \nabla_X \omega] \\ = \quad & T(\omega, \nabla_X V) + (\nabla_X T)(\omega, V) + T(\nabla_X \omega, V) \end{aligned}$$

• Μέσω των ιδιοτήτων i.,ii. θα δείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα των ζητούμενων συνοχών.

- Έστω $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Για $X \in \mathscr{X}(M)$ ορίζουμε $\nabla_X f = X(f)$. Δείξτε ότι ορίζεται συνοχή στην $T_0^0(M) = M \times \mathbb{R}^n$.

- Έστω $\omega \in \mathscr{X}^*(M)$. Για κάθε $V \in \mathscr{X}(M)$ ορίζουμε

$$[\nabla_X \omega](V) \coloneqq \nabla_X(\omega(V)) - \omega(\nabla_X V) = X(\omega(V)) - \omega(\nabla_X V).$$

  Δείξτε ότι ορίζεται συνοχή στην $T_0^1(M) = T^*M$.

- Έστω $T \in \Gamma\left(T_\ell^k(M)\right)$, $\omega^1, \dots, \omega^\ell \in \mathscr{X}^*(M)$ και $V_1, \dots, V_k \in \mathscr{X}(M)$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X T)\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right) \\
\coloneqq\ & \nabla_X\left[T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right)\right] \\
-\ & \sum_{i=1}^{\ell} T\left(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right) \\
-\ & \sum_{i=1}^{\ell} T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, \nabla_X V^i, \dots, V_k\right)
\end{aligned}$$

- Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι ο παραπάνω τύπος ορίζει συνοχής στην $T_\ell^k(M)$ και ότι ικανοποιούνται τα (α) - (δ).

□

7.3 Ολική Συναλλοίωτη Παράγωγος

Πρόταση 19. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ∇ αφφινική συνοχή στην TM. Αν $T \in T_\ell^k(M)$ ορίζουμε

$$\nabla T \colon \underbrace{\mathscr{X}^*(M) \times \cdots \mathscr{X}^*(M)}_{\ell-\text{φορές}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \mathscr{X}(M)}_{(k+1)-\text{φορές}} \to \mathscr{C}^\infty(M)$$

που ορίζεται με τον εξής τρόπο : αν $\omega^1, \dots, \omega^\ell \in \mathscr{X}^*(M)$ και $V_1, \dots, V_k, X \in \mathscr{X}(M)$ ορίζουμε

$$\nabla T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k, X\right) = \nabla_X T\left(\omega^1, \dots, \omega^\ell, V_1, \dots, V_k\right)$$

Τότε, ισχύει ότι $\nabla T \in \Gamma\left(T_\ell^{(k+1)}(M)\right)$. Η ∇T καλείται **ολική συναλλοίωτη παράγωγος** της T.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Σημείωση 2. Έστω $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Τότε, έχουμε ότι $\nabla f \in \mathscr{X}^*(M)$. Επομένως, $\nabla^2 f \in \Gamma\left(T_0^2(M)\right)$. Άρα, έχουμε ότι

$$\nabla^k f = \underbrace{\nabla\left(\nabla\left(\cdots(\nabla f)\cdots\right)\right)}_{k} \in \Gamma\left(T_0^k(M)\right)$$

8 Διάλεξη 08

8.1 Διανυσματικά Πεδία Κατά Μήκος Καμπύλης

Ορισμός 26. Έστω $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη. Μια $\mathscr{C}^\infty$ - απεικόνιση $V\colon I \to TM$ θα λέγεται **διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της** γ, αν $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, για κάθε $t \in I$. Συμβολίζουμε με

$$\mathscr{X}(\gamma) = \{V\colon I \to TM \mid \ V \text{ διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της } \gamma\}$$

Αντίστοιχα, έχουμε (k,ℓ) - τανυστές κατά μήκος της γ $T\colon I \to T_\ell^k(M)$ με $T(t) \in T_\ell^k\left(T_\gamma(t)M\right)$.

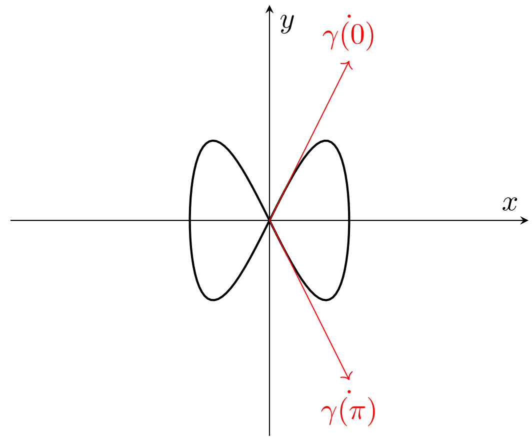
Παράδειγμα 8. Αν $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη, τότε προφανώς $\dot\gamma$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ, αφού $\dot\gamma(t) \in T_\gamma(t)$.

Παράδειγμα 9. Έστω $\tilde V \in \mathscr{X}(M)$. Τότε, το $V = \tilde V \circ \gamma$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ. Κάθε τέτοιο θα ανήκει σε μια ειδική κατηγορία δ.π. κατά μήκος της γ που λέγονται *επεκτάσιμα*.

Ορισμός 27. Έστω $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη και $V \in \mathscr{X}(\gamma)$. Το V θα λέγεται **επεκτάσιμο** αν υπάρχει $U \subseteq M$ ανοικτή περιοχή της $\gamma(I)$ και $\tilde V \in \mathscr{X}(U)$ τ.ω. $V = \tilde V \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "V"'] & U \arrow[d, "\tilde V"] \\ & TM \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 10. Υπάρχουν $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ που δεν είναι επεκτάσιμα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ την καμπύλη "οκτάρι" (figure eight curve), με $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$, τότε $\gamma(0) = \gamma(\pi) = (0,0)$, ενώ $\dot\gamma(0) = (1,2) \neq (-1,2) = \dot\gamma(\pi)$. Αν υπήρχε $\tilde V \in \mathscr{X}(U)$ τ.ω. $\tilde V \circ \gamma = \dot\gamma$, τότε από τις προηγούμενες παρατηρήσεις θα καταλήξουμε σε άτοπο.



8.2 Συνναλοίωτη Παράγωγος Κατά Μήκος Καμπύλης

Θέωρημα 4. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα, ∇ αφφινική συνοχή της M και $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη. Τότε, υπάρχει μοναδικός τελεστής

$$D_t\colon \mathscr{X}(\gamma) \to \mathscr{X}(\gamma)$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) *Γραμμικότητα*: Για κάθε $V, W \in \mathscr{X}(\gamma)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$D_t(aV + bW) = aD_t(V) + bD_t(W)$$

(β) *Leibniz* : Για κάθε $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ και $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ ισχύει ότι

$$D_t(fV) = f' \cdot V + f \cdot D_t(V)$$

(γ) Αν $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ είναι επεκτάσιμο, για κάθε επέκταση $\tilde{V}$ του V ισχύει ότι

$$D_t(V)(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}.$$

Το διανυσματικό πεδίο D_tV λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του V κατά μήκος της γ. Σημειώνουμε ότι D_t μπορεί να επεκταθεί και σε δέσμες τανυστών κάθε τάξη με ανάλογο τρόπο.

Απόδειξη.

- Αρχικά θα δείξουμε την μοναδικότητα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $D_t\colon \mathscr{X}(\gamma) \to \mathscr{X}(\gamma)$, ο οποίος να ικανοποιεί τα (α),(β),(γ).
- Έστω $V \in \mathscr{X}(\gamma)$. Το D_tV εξαρτάται μόνο από την τοπική συμπεριφορά του V. Πράγματι, έστω $t_0 \in I$ και υποθέτουμε ότι $V \equiv 0$, σε ένα διάστημα $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

- Θεωρούμε $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ τ.ω. $f(t) > 0$ στο $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ και $f(t) = 0$ αλλιώς. Αφού $f \cdot V = 0$, από το (α), ισχύει ότι $D_t(f \cdot V) = 0$. Τώρα, από την ιδιότητα (β), ισχύει ότι

$$0 = D_t(f \cdot V)(t) = \dot{f}(t)V(t_0) + f(t)D_tV(t)$$

Άρα, έχουμε ότι $D_t(V)(t)$ στο $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

- Για να ολοκληρώσουμε το σκέλος της μοναδικότητας θα δείξουμε ότι τοπικά, δεδομένου $V \in \mathscr{X}(\gamma)$, ο $D_tV(t)$ εκφράζεται μέσω ενός κλειστού τύπου που εξαρτάται μόνο από V και την γ.

- Έστω $t_0 \in I$ και (U, φ) χάρτης τ.ω. $\gamma(t_0) \in U$. Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq U$. Τότε, έχουμε ότι

$$V(t) = V^i(t)\partial_i|_{\gamma(t)} \quad \text{και} \quad \gamma(t) = \gamma^j(t)\partial_j|_{\gamma(t)}$$

Συνδυάζοντας το πρώτο σκέλος, καθώς και τις ιδιότητες (α),(β),(γ), έχουμε ότι

$$D_tV(t) = \left[\dot{V}^k(t) + V^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma^k_{i,j}(\gamma(t))\right]\partial_k|_{\gamma(t)}. \tag{20}$$

- Για το υπαρξιακό σκέλος, αν η $\gamma(I)$ μπορεί να καλυφθεί από χάρτη (U, φ), τότε ορίζουμε D_tV με βάση την σχέση 20 και αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι ικανοποιεί τις ιδιότητα (α) - (γ).

- Στην περίπτωση που $\gamma(I)$ καλύπτεται από πολλαπλούς χάρτες ορίζουμε τοπικά την D_tV με βάση τον τύπο 20 και λόγω της τοπικής μοναδικότητας οι ορισμοί συμπτύπτουν, οποτεδήποτε οι χάρτες επικαλύπτονται.

$\square$

Πόρισμα 4. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα, ∇ αφφινική συνοχή, $p \in M$ και $v \in T_pM$ τ.ω. υπάρχει $\gamma\colon I \to M$ $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη τ.ω. $\gamma(t_0) = p$ και $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Αν $Y, \tilde{Y} \in \mathscr{X}(M)$ τ.ω. $Y \circ \gamma = \tilde{Y} \circ \gamma$, τότε

$$\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$$

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, θεωρώντας τα επεκτάσιμα δ.π. $V(t) = Y \circ \gamma(t)$ και $\tilde{V}(t) = \tilde{Y} \circ \gamma(t)$. $\square$

8.3 Γεωδαισιακές

Ορισμός 28. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα, ∇ αφφινική συνοχή της M και $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη. Η γ θα λέγεται **γεωδαισιακή** (ως προς την ∇) αν $D_t\dot{\gamma} \equiv 0$.

Παρατήρηση 27. Έστω $\gamma\colon I \to M$ μια $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει χάρτης (U, φ) τ.ω. $\gamma(I) \subseteq U$, δηλαδή γράφεται στην μορφή

$$\varphi \circ \gamma = \left(\gamma^1, \ldots, \gamma^n\right) \quad \text{και} \quad \dot{\gamma}(t)] = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i|_{\gamma(t)}$$

Τότε, από το Θεώρημα 4, έχουμε ότι γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t) \cdot \dot{\gamma}^j(t) \cdot \Gamma^k_{i,j}(\gamma(t)) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in I,\ k = 1, \ldots, n \tag{21}$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται **γεωδαιδιακή εξίσωση**

9 Διάλεξη 11

9.1 Pullback Συνοχή

Υπενθύμιση 2. Έστω $F\colon M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων και $X \in \mathscr{X}(M)$. Εν γένει δεν διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός $Y \in \mathscr{X}(N)$ το οποίο να είναι F - συσχετισμένο, δηλαδή να ισχύει ότι

$$Y_{F(p)} = d_p(X_p), \quad \text{για κάθε } p \in M$$

Στην περίπτωση που F είναι αμφιαφόριση, για ένα $X \in \mathscr{X}(M)$ ορίζεται μοναδική F - συσχετισμένο με το X διανυσματικό πεδίο $F_*X \in \mathscr{X}(N)$, το οποίο ορίζεται με τον εξής τρόπο

$$F_*X_q = d_{F^{-1}(q)}\left(X_{F^{-1}(q)}\right) \in T_qN, \quad \text{για κάθε } q \in N.$$

Λήμμα 6. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $F\colon M \to N$ αμφιδιαφόριση. Αν $\tilde{\nabla}$ μια αφφινική συνοχή της N, τότε η απεικόνιση

$$\nabla \coloneqq F^*\tilde{\nabla}\colon \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M), \quad \left(F^*\tilde{\nabla}\right)_X Y = \left(F^{-1}\right)_* \left(\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y\right) \tag{22}$$

ορίζει αφφινική συνοχή στην M.

Απόδειξη. Η $\mathscr{C}^\infty$ - γραμμικότητα ως προς X και η $\mathbb{R}$ - γραμμικότητα ως προς Y αποδεικνύονται άμεσα. Θα δείξουμε τον κανόνα του Leibniz. Έστω $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ και $f \in \mathscr{C}^\infty$. Τότε

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= \left(F^{-1}\right)_* \left(\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*(fY)\right) = \left(F^{-1}\right)_* \left[\tilde{\nabla}_{F_*X} \left(f \circ F^{-1}\right) \cdot F_*Y\right] \\ &= \left(F^{-1}\right)_* \left[f \circ F^{-1} \cdot \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y + F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) F_*Y\right] \\ &= f \circ \nabla_X Y + X(f)Y \end{aligned}$$

□

Πρόταση 20 (Ιδιότητες Pullback Συνοχής)**.** Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $F\colon M \to N$ αμφιαδιαφόριση,

- $\gamma\colon I \to M$ ομαλή, $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$
- $V \in \mathscr{X}(\gamma)$ και $F_* V \in \mathscr{X}(\tilde{\gamma})$ με $F_* V(t) = d_{\gamma(t)}\left(V(t)\right)$.
- $\tilde{\nabla}$ αφφινική συνοχή στην N και ∇ η αντίστοιχη pullback αφφινική συνοχή στην M.

Ισχύουν τα παρακάτω.

(α) $F_*\left(D_t V\right)(t) = \tilde{D}\left(F_* V\right)(t)$, όπου $\tilde{D}$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος της N κατά μήκος της $\tilde{\gamma}$.

(β) Αν γ είναι γεωδαισίακή, τότε $\tilde{\gamma}$ είναι γεωδαιασιακή.

(γ) $F_*\left(P^{\gamma}_{t_0,t_1}(v)\right) = P^{\tilde{\gamma}}_{t_0,t_1}\left(F_* v\right)$, για κάθε $v \in T_{\gamma(t_0)}M$.

Απόδειξη. (α)

- Ορίζουμε $\hat{D}\colon \mathscr{X}(N) \to \mathscr{X}(N)$ με τον εξής τρόπο :

$$\hat{D}_t(W) = F_*\left(D_t\left[\left(F^{-1}\right)_* W\right]\right)$$

- Από την μοναδικότητα της συνναλοίωτης παραγώγου $\tilde{D}_t$ κατά μήκος της $\tilde{\gamma}$, από τον ορισμό της $\hat{D}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{D}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α),(β),(γ).
- Τα (α),(β) αφήνονται ως άσκηση. Για την ιδιότητα (γ), αρκεί να δείξουμε ότι $F_*(D_t V) = \tilde{D}_t F_* V$ στην περίπτωση, όπου V είναι επεκτάσιμο.
- Υποθέτουμε ότι V επεκτείνεται, την οποία επέκταση καταχρηστικά συμβολίζουμε επίσης με V. Τότε, έχουμε ότι

$$F_*\left(D_t V(t)\right) = F_*\left(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V\Big|_{\gamma(t)}\right) = F_*\left[(F^{-1})_*\left(\tilde{\nabla}_{F_*(\dot{\gamma}(t))} F_* V\Big|_{F\circ\gamma(t)}\right)\right]$$
$$= \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}'(t)} F_* V\Big|_{\tilde{\gamma}(t)}$$

□

9.2 Μετρικές Συνοχές

Παρατήρηση 28. Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Μέσω της σχέση 18 ορίζεται αφφινική συνοχή στην M. Έστω $g = i^* g_{\mathbb{R}^n}$, η επαγόμενη μετρική μέσω της $i\colon M \to \mathbb{R}^n$ την οποία την συμβολίζουμε με $g = \langle , \rangle$. Τότε, για κάθε $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες :

$$X\left(\langle Y, Z\rangle\right) = \left\langle \nabla^{\top}_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \nabla^{\top}_X Z\right\rangle \tag{23}$$

και

$$\nabla^{\top}_X Y - \nabla^{\top}_Y X = [X, Y] \tag{24}$$

Ορισμός 29. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και ∇ μια αφφινική συνοχή στην M. Αν για κάθε $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ ισχύει η σχέση 23, τότε η ∇ λέμε ότι είναι **μετρική συνοχή** ή **συμβατή** με την μετρική g.

Πρόταση 21 (Ιδιότητες Μετρικών Συνοχών)**.** Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann.

(α) Η ∇ είναι μετρική συνοχή στην (M, g) αν και μόνο αν $\nabla g = 0$ (ολική παράγωγος της $g \in \mathscr{T}_0^2(M)$).

(β) Έστω $\gamma \colon I \to M$ ομαλή καμπύλη, $V, W \in \mathscr{X}(\gamma)$ και D_t η συναλλοίωτη παράγωγος της M κατά μήκος της γ (ως προς την συνοχή ∇). Τότε

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle\bigg|_t = \langle D_t V(t), W(t)\rangle + \langle V(t), D_t W(t)\rangle\,.$$

Ειδικότερα, αν V, W είναι παράλληλα κατά μήκος της γ, τότε $\langle V, W\rangle$ είναι σταθερή.

(δ) Η παράλληλη μεταφορά $P^{\gamma}_{t_0,t_1} \colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ είναι γραμμική ισομετρία.

(ε) Αν $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ορθοκανονική βάση του $T_{\gamma(t_0)}M$, τότε αυτή επεκτείνεται σε ορθοκανονικό πλαίσιο $\{E_i(t)\}$ κατά μήκος της γ.

Απόδειξη. (α) Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 18.

(β) Αποδείξτε το πρώτα στην περίπτωση όπου V, W είναι επεκτάσιμα.
Τα (γ),(δ),(ε) έπονται άμεσα δεδομένων των (α) και (β). □

Πόρισμα 5. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann, ∇ μετρική συνοχή στην M και $\gamma \colon I \to M$ ομαλή καμπύλη.

(α) Η συνάρτηση $|\dot{\gamma}(t)|$ είναι σταθερή αν και μόνο αν $D_t\dot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$, για κάθε $t \in I$.

(β) Αν $\dot{\gamma}$ είναι γεωδαισιακή, τότε $|\dot{\gamma}(t)|$ είναι σταθερή.

Ερώτημα 1. Έστω ∇ μετρική συνοχή μιας (M, g) πολλαπλότητας Riemann και $A \in \mathscr{T}_1^3(M)$. Αν $\tilde{\nabla} = \nabla + A$, ποια σχέση πρέπει να ικανοποιεί ο A ώστε $\tilde{\nabla}$ να είναι μετρική συνοχή ;

9.3 Στρέψη Συνοχής - Συμμετρικές Συνοχές

Λήμμα 7. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ∇ αφφινική συνοχή στην M και

$$T^{\nabla}\colon \mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M),\quad T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Ορισμός 30. Έστω M διαφορική πολλαπλότητα και ∇ αφφινική συνοχή στην M. Η ∇ καλείται **συμμετρική** αν $T^{\nabla}=0$.

10 Διάλεξη 12

10.1 Συνοχή Levi - Civita

Κίνητρο 4. Θεωρούμε την πολλαπλότητα Riemann $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$. Για λόγους απλότητας συμβολίζουμε $g_{\mathbb{R}^n}=\langle,\rangle$. Για κάθε $X,Y\in\mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ορίσει τη συνήθη συνοχή

$$\overline{\nabla}_X Y = X\left(Y^k\right)\partial_k = X^i\partial_i\left(Y^k\right)\partial_k$$

όπου $X=X^i\partial_i$ και $Y=Y^j\partial_j$ [3]

(α) *Η ∇ είναι μετρική.* Έστω $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$X\left(\langle Y,Z\rangle\right)=X\left(Y^kZ^k\right)=X^i\partial_i\left(Y^k\right)Z^k+X^i\partial_i\left(Z^k\right)Y^k=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle\,.$$

(β) *Η $\overline{\nabla}$ είναι συμμετρική.* Ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί στο Παράδειγμα 6.

Εκτός της $\overline{\nabla}$ υπάρχουν άλλες αφφινικής συνοχές στην M που να είναι μετρικές και συμμετρικές ; Και αν ναι, μπορεί να ισχύει κάτι τέτοιο σε μια τυχαία πολλαπλότητα Riemann ; Δηλαδή, αν (M,g) πολλαπλότητα Riemann, τότε υπάρχει **μοναδική** αφφινική συνοχή, συμβατή με το g και συμμετρική ;

Θέωρημα 5 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann)**.** Έστω (M,g) μια πολλαπλότητα Riemann. Υπάρχει μοναδική αφφινική συνοχή στην M, η οποία να είναι μετρική και συμμετρική. Η συνοχή αυτή λέγεται **Levi - Civita** συνοχή της M.

Σκιαγράφηση της Απόδειξης. Αρχικά θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του θεωρήματος.

[3] Με ∂_i συμβολίζουμε τα διανυσματικά πεδία $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$.

(α) Θα υποθέσουμε την ύπαρξη μια μετρικής και συμμετρική συνοχής στην TM και θα δείξουμε ότι πρέπει να ικανοποιείται μια συγκεκριμένη σχέση (Koszul's formula), από όπου η μοναδικότητα έπεται άμεσα.

(β) Μέσω του τύπου του Koszul, εφαρμόζοντάς τον σε συντεταγμένες θα δείξουμε ότι τα σύμβολα Christoffel (ως προς ∂_i, για σταθεροποιημένο χάρτη) ικανοποιούν την σχέση

$$\Gamma_{i,j}^{k} = g^{k\ell}\left[\partial_i(g_{i\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})\right]$$

όπου $(g^{\mu\nu})$ ο αντίστροφος πίνακας του $(g_{\mu\nu})$ (πίνακας της μετρικής ως προς ∂_i).

(γ) Για χάρτη (U, φ) και $X = X^i\partial_i$ και $Y = Y^j\partial_j$ ορίζουμε

$$\nabla_X^U Y = \left[X\left(Y^k\right) - X^i Y^j \Gamma_{i,j}^k\right]\partial_k$$

όπου $\Gamma_{i,j}^k$ ορίζονται μέσω της παραπάνω σχέσης. Αφού έχουμε ορίσει τοπικά συνοχές, για κάθε $p \in M$ ορίζουμε

$$\nabla_X Y = \nabla_{X|_U}^U Y|_U$$

όπου (U, φ) είναι χάρτης γύρω από το p. Από την μοναδικότητα, η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη.

(δ) Θα δείξουμε ότι η ∇ είναι πράγματι μετρική και συμμετρική συνοχή.

$\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ∇ μετρική και συμμετρική, αφφινική συνοχή στην M. Έστω $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$. Τότε, αφού ∇ είναι μετρική, ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}
X(\langle Y, Z\rangle) &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
Y(\langle Z, X\rangle) &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\
Z(\langle X, Y\rangle) &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle
\end{aligned}$$

Αφού η συνοχή είναι συμμετρική, τότε οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής :

$$\begin{aligned}
X(\langle Y, Z\rangle) &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle \\
Y(\langle Z, X\rangle) &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle \\
Z(\langle X, Y\rangle) &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle
\end{aligned}$$

Αν $(1)+(2)-(3)$, τότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}[&X(\langle Y,Z\rangle) + Y(\langle Z,X\rangle) - Z(\langle X,Y\rangle) \\ &- \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle]\end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος καλείται *τύπος του Koszul.* Αν ∇^1, ∇^2 δύο μετρικές και συμμετρικές συνοχής στην TM, θα πρέπει να ικανοποιούν τον παραπάνω τύπο, ο οποίος εξαρτάται μόνο από το $\langle , \rangle$. Συνεπώς, για κάθε $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ ισχύει το εξής :

$$\left\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z \right\rangle = 0, \quad \text{για κάθε } Z \in \mathscr{X}(M).$$

Άρα, για $Z = \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y$ προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Έστω (U, φ) ένας $\mathscr{C}^\infty$ - χάρτης της M. Έχουμε ότι

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_\ell\rangle = \frac{1}{2}\left[\partial_i(g_{j\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})\right]$$

Αφού $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^m_{i,j}\partial_m$, τότε προκύπτει ότι

$$\Gamma^m_{i,j}\cdot g_{m\ell} = \frac{1}{2}\left[\partial_i(g_{j\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})\right]$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^m_{i,j}\cdot \underbrace{g_{m\ell}\cdot g^{\ell k}}_{\delta^m_k} = \frac{g^{\ell k}}{2}\left[\partial_i(g_{j\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})\right]$$

(γ) Για κάθε χάρτη (U, φ) και $X = X^i\partial_i$ και $Y = Y^j\partial_j$ ορίζουμε

$$\nabla^U_X Y = \left[X\left(Y^k\right) - X^i Y^j \Gamma^k_{i,j}\right]\partial_k$$

όπου $\Gamma^k_{i,j}$ ορίζονται μέσω της παραπάνω σχέσης. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η παραπάνω σχέση ορίζει μια μετρική και συμμετρική συνοχή στην TU (με την επαγόμενη μετρική Riemann), χρησιμοποιώντας την σχέση $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$.

(δ) Για κάθε $p \in M$ και (U, φ) χάρτη γύρω από το p ορίζουμε

$$\nabla_X Y = \nabla^U_{X|_U} Y|_U$$

Από την μοναδικότητα, στο βήμα (α), η ∇ είναι καλά ορισμένη σε τομές χαρτών που περιέχουν το p, άρα είναι η ζητούμενη συνοχή.

□

Πρόταση 22. Έστω $F\colon (M,g) \to (N,h)$ μια ισομετρία μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann. Αν ∇^g, ∇^h οι αντίστοιχες Levi - Civita συνοχές των M και N αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι

$$F^*\left(\nabla^h\right) = \nabla^g.$$

Απόδειξη. Από την μοναδικότητα του παραπάνω θεωρήματος, αρκεί να δείξουμε ότι $F^*\left(\nabla^h\right)$ είναι μετρική και συμμετρική. Αφού F είναι ισομετρία, για κάθε $Y, Z \in \mathscr{X}(M)$, ισχύει ότι

$$\langle Y_p, Z_p\rangle = \langle d_pF(Y_p), d_pF(Z_p)\rangle = \left\langle F_*(Y)_{F(p)}, F_*(Z)_{F(p)}\right\rangle.$$

(α) *Η $F^*\left(\nabla^h\right)$ είναι μετρική.* Έστω $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ και $p \in M$

$$\begin{aligned} & X\left(\langle Y, Z\rangle\right) = X\left(\langle F_*(Y), F_*(Z)\rangle \circ F\right) = F_*X\left(\langle F_*(Y), F_*(Z)\rangle\right) \\ = \quad & \left\langle \nabla^h_{F_*X} F_*(Y), F_*(Z)\right\rangle + \left\langle F_*(Y), \nabla^h_{F_*X} F_*(Z)\right\rangle \\ = \quad & \langle F^*\left(\nabla^g\right)_X Y, Z\rangle + \langle Y, F^*\left(\nabla^g\right)_X Z\rangle \end{aligned}$$

(β) *Η $F^*\left(\nabla^h\right)$ είναι συμμετρική.* $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & F^*\left(\nabla^h\right)_X Y - F^*\left(\nabla^h\right)_Y X = \left(F^{-1}\right)_*\left(\nabla^h_{F_*X} F_*Y\right) - \left(F^{-1}\right)_*\left(\nabla^h_{F_*Y} F_*X\right) \\ = \quad & \left(F^{-1}\right)_*\left(\nabla^h_{F_*X} F_*Y - \nabla^h_{F_*Y} F_*X\right) = \left(F^{-1}\right)_*\left([F_*X, F_*Y] = [X.Y]\right. \end{aligned}$$

□

11 Διάλεξη 13

11.1 Ιδιότητες Levi Civita συνοχής

Πόρισμα 6. Έστω $F\colon (M,g) \to \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ τοπική ισομετρία. Αν γ είναι γεωδαιδιακή της M (ως προς την L.C. συνοχή), τότε $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{D}_t$ η συναλλοίωτη παράγωγος της $\tilde{M}$ κατά μήκος της $\tilde{\gamma}$, ως προς την $\tilde{\nabla}$ (L.C. συνοχή). Θα δείξουμε ότι $\tilde{D}_t\dot{\tilde{\gamma}} = 0$.

Έστω $t_0 \in I$. Αφού F είναι τοπική ισομετρία, υπάρχουν χάρτες $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ και $\left(V, \left(y^j\right)\right.$, ώστε $F\colon U \to V$ να είναι ισομετρία. Θεωρώντας τους περιορισμούς των συνοχών στο U και V αντίστοιχα έχουμε ότι

$$\nabla^U = \varphi^*\left(\tilde{\nabla}^V\right)$$

Από την Πρόταση 20 το ζητούμενο έπεται άμεσα. □

Πρόταση 23.

11.2 Εκθετική Απεικόνιση

Υπενθύμιση 3. Αν (M,g) πολλαπλότητα Riemann έχουμε δείξει ότι για κάθε $p \in M$ και $v \in T_pM$, υπάρχει μοναδική *μεγιστική* γεωδαισιακή γ_v τέτοια ώστε $\gamma_v(0) = p$ και $\dot{\gamma_V}(0) = v$.

Ορισμός 31. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε ως **πεδίο ορισμού εκθετικής απεικόνισης** το $\mathscr{E} \subseteq TM$ που ορίζεται ως εξής

$$\mathscr{E} = \{V \in TM \mid \ \gamma_V \text{ ορίζεται σε διάστημα που περιέχεται το } [0,1]\} \tag{25}$$

Η **εκθετική απεικόνιση** είναι η απεικόνιση $\exp\colon \mathscr{E} \to M$ που ορίζεται ως

$$\exp(V) = \gamma_V(1).$$

Για κάθε $p \in M$, συμβολίζουμε με $\mathscr{E}_p = \mathscr{E} \cap T_pM$ και με $\exp_p$ το περιορισμό της $\exp$ στο $\mathscr{E}_p$.

Λήμμα 8 (Rescaling Lemma)**.** Για κάθε $V \in TM$ και $c, t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct) \tag{26}$$

όποτεδήποτε κάποιο από τα δύο μέλη ορίζεται.

Απόδειξη. Αν δείξουμε τη ζητούμενη σχέση οποτεδήποτε το $\gamma_V(ct)$ ορίζεται, έχουμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει οποτεδήποτε η αρίστερη σχέση ορίζεται αντικαθιστώντας το V με cV, το t με ct και το c με $1/c$. Προφανώς, για $c = 0$ η ζητούμενη σχέση ισχύει πάντα, από τον ορισμό των μεγιστικών γεωδαισιακών.

- Έστω $V \in T_pM$. Για λόγους απλότητας συμβολίζουμε γ_V με γ, όπου $\gamma\colon I \to M$. Αν $\tilde{\gamma}\colon c^{-1}I \to M$ με $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(ct)$, θα δείξουμε ότι $\tilde{\gamma}$ είναι γεωδαισιακή με $\tilde{\gamma}(0) = p$ και $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = cV$. Αφού γεωδαισιακές ταυτίζονται στα κοινά διαστήματα που ορίζονται, θα έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω $t_0 \in c^{-1}I$. Θεωρούμε χάρτη (U,φ) γύρω από το $\gamma(ct_0)$. Τότε, η γ γράφεται σε συντεταγμένες
$$\varphi \circ \gamma = \left(\gamma^1, \ldots, \gamma^n\right)$$
και η $\tilde{\gamma}$ γράφεται σε συντεγμένες
$$\varphi \circ \tilde{\gamma}(t) = \left(\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^n\right) = \left(\gamma^1(ct), \ldots, \gamma^n(ct)\right)$$
Συνεπώς, ισχύει ότι
$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i|_{\gamma(t)} \quad \text{και} \quad \dot{\tilde{\gamma}} = c\dot{\gamma}^i(ct)\partial_i|_{\gamma(ct)}.$$

- Αν $D_t, \tilde{D}_t$ οι συναλλοίωτες παράγωγοι της M κατά μήκος της γ και $\tilde{\gamma}$ αντίστοιχα, τότε υπολογίζουμε ως εξής

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_t\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right)(t_0) = \left[\ddot{\tilde{\gamma}}^k(t_0) + \Gamma^k_{i,j}\left(\tilde{\gamma}\left(t_0\right)\right)\cdot \dot{\tilde{\gamma}}^i(t_0)\cdot \dot{\tilde{\gamma}}^j(t_0)\right]\partial_k \\ = & \left[c^2\ddot{\gamma}^k(ct_0) + c^2\Gamma^k_{i,j}\left(\gamma\left(ct_0\right)\right)\cdot\dot{\gamma}^i(ct_0)\cdot\dot{\gamma}^j(ct_0)\right]\partial_k \\ = & \; c^2 D_t\left(\dot{\gamma}\right)(ct_0) = 0 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $\tilde{\gamma}$ είναι γεωδαισιακή. Είναι άμεσο ότι $\tilde{\gamma}(0) = p$ και $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = cV$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

12 Διάλεξη 14

12.1 Ιδιότητες Εκθετικής Απεικόνισης

Πρόταση 24 (Ιδιότητες Εκθετικής Απεικόνισης)**.** (α) Το $\mathscr{E}$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του TM και $\mathscr{E}_p$ είναι αστρόμορφο ως προς το 0.

(β) Για κάθε $V \in TM$ έχουμε ότι $\gamma_V(t) = \exp(tV)$.

(γ) Η εκθετική απεικόνιση είναι διαφορίσιμη.

(δ) Για κάθε $p \in M$, η απεικόνιση $d_0\left(\exp_p\right) : T_0\left(\mathscr{E}_p\right) \cong T_pM \to T_pM$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι $\mathscr{E}$ είναι ανοικτό. Για να αποδειχθεί το ζητούμενο αποτέλεσμα θα χρειαστεί να επαναφέρουμε στην μνήμη μας το τρόπο απόδειξης ύπαρξης και μοναδικότητας γεωδαισιακών.

- Είχαμε δει ότι γύρω από χάρτη (U, φ) η ύπαρξη γεωδαιδιακής γ με $\gamma(0) = p = \left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right)$ και $\dot{\gamma}(0) = V$, με $V = V^i\partial_i$ είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου

$$G(x,v) = v^k\frac{\partial}{\partial x^k} - v^iv^j\Gamma^k_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial v^k}$$

θεωρώντας συντεταγμένες στο $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$, που προκύπτουν από την χάρτη (U, φ). Πράγματι, αν γ γεωδαισιακή της M που ικανοποιεί τις ζητούμενες αρχικές συνθήκες, τότε $\tilde{\gamma} = (\gamma, \dot{\gamma})$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του G με $\tilde{\gamma}(0) = (p, V)$. Αντίστροφα, αν $(x(t), v(t))$ ολοκληρωτική καμπύλη του G, τότε η $\gamma = \pi\left(x(t), v(t)\right) = x(t)$ είναι μια γεωδαισιακή της M που ικανοποιεί τις ζητούμενες αρχικές συνθήκες.

- Για να δείξουμε ότι $\mathscr{E}$ είναι ανοικτό θα αναχθούμε στην ροή του G. Όμως, το πρόβλημα είναι ότι το G έχει ορισθεί τοπικά. Μπορούμε να ορίσουμε το G στο ολικό χώρο TM ; Ναι ! Θα το ορίζουμε το G με ένα διαφορικό τρόπο, ολικά, καταλήγοντας ότι τοπικά ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Το G αυτό θα καλείται **γεωδαισιακό διανυσματικό πεδίο**.
- Ορίζουμε

$$G\colon \mathscr{C}^\infty(TM) \to \mathscr{C}^\infty(TM),\ G(f)(p,V) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f\left(\gamma_V(t), \dot{\gamma}_V\right).$$

  Με χρήση συντεταγμένων δείξτε ότι ικανοποιείται η ζητούμενη εξίσωση.
- Από το θεμελιώδες θεώρημα των ροών, υπάρχει ανοικτή γειτονιά $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R} \times TM$ του $\{0\} \times TM$ και ομαλή απεικόνιση $\vartheta\colon \mathscr{D} \to TM$ ώστε κάθε καμπύλη $\vartheta^{(p,v)}(t) = \vartheta(t,(p,v))$ να είμαι μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη του G που ορίζεται σε ένα ανοικτό δίαστημα $\mathscr{D}^{(p,v)}$ που περιέχει το 0.
- Έστω $(p,V) \in \mathscr{E}$. Τότε, η γ_V ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το $[0,1]$. Αφού $\tilde{\gamma} = (\gamma_V, \dot{\gamma}_V)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του G, όπου η γ_V ορίζεται, τότε $\vartheta^{(p,V)} = \tilde{\gamma}$ στο κοινό πεδίο ορισμού τους. Άρα, έχουμε ότι $(p,V) \in \mathscr{D}_1$, με

$$\mathscr{D}_1 = \{(q,w) \in TM \mid (1,(p,w)) \in \mathscr{D}\} \subseteq TM$$

  το οποίο είναι ανοικτό από το θεμελιώδες θεώρημα των ροών.
- Συνεπώς, υπάρχει ανοικτή γειτονία του (p,V), ώστε $\vartheta^{(q,W)}$ να ορίζεται στο 1, επομένως και η αντίστοιχη γ_W ορίζεται στο 1. Άρα, $\mathscr{E}$ είναι ανοικτό.

(β) Έστω $V \in T_pM$. Από το Λήμμα 8, προκύπτει ότι

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp(tV)$$

Αφού $[0,1]$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της γ_V, η δεύτερη ισότητα διασφαλίζει ότι το 1 ανήκει στο πεδίο ορισμού της γ_{tV}, για κάθε $t \in [0,1]$, συνεπώς έχουμε ότι $tV \in \mathscr{E}_p$. Επομένως, το $\mathscr{E}_p$ είναι αστρόμορφο ως προς το 0.

(γ) Από το θεμελιώδες θεώρημα των ροών, γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\varphi_1\colon \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_{-1},\ \varphi_1(p,V) = \vartheta(1,(p,V))$$

είναι διαφορίσιμη. Για $(p,V) \in \mathscr{E}$, παρατηρούμε ότι

$$\exp(p,V) = \gamma_V(1) = \mathrm{pr}_1 \circ \vartheta_1(p,V).$$

Άρα, είναι σαφές ότι η exp είναι διαφορίσιμη.

(δ) Θεωρούμε τον περιορισμό $\exp_p \colon \mathscr{E}_p \to M$. Αφού $\mathscr{E}_p \subseteq T_pM$ ανοικτό, τότε $T_0\left(\mathscr{E}_p\right) = T_0(T_pM)$. Έστω $V \in T_0(T_pM) \equiv T_pM$. Θεωρούμε καμπύλη

$$\tau \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pM, \quad \tau(t) = tV.$$

Έχουμε ότι

$$d_0\left(\exp_p\right)(V) = d_0\left(\exp_p\right)(\dot{\tau}(0)) = \left(\exp_p \circ \tau\right)'(0) = (\gamma_V)'(0) = V.$$

□

Πόρισμα 7. Έστω $(p, V) \in \mathscr{E}$. Τότε, υπάρχει ανοικτή γειτονία $V \subseteq T_pM$ το 0 και ανοικτή περιοχή $U \subseteq M$ του p, ώστε η απεικόνιση $\exp_p|_V \colon V \to U$ να είναι αμφιαφόριση.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από το σκέλος (δ) της Πρότασης 24 και το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης. □

Πρόταση 25. Έστω (M, g) και $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ δύο πολλαπλότητες Riemann και $F \colon M \to \tilde{M}$ μια τοπική ισομετρία. Για κάθε $p \in M$, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_p \arrow[r, "d_pF"] \arrow[d, "\exp_p"'] & \widetilde{\mathscr{E}}_{\varphi(p)} \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\
M \arrow[r, "F"] & \tilde{M}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι η $d_pF \colon \mathscr{E}_p \to \widetilde{\mathscr{E}}_{\varphi(p)}$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι για κάθε $V \in \mathscr{E}_p$, τότε $d_pF(V) \in \widetilde{\mathscr{E}}_{\varphi(p)}$. Αφού $V \in \mathscr{E}_p$, τότε γ_V ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το $[0, 1]$. Από το Πόρισμα 6, έχουμε ότι $\gamma_{d_pF(V)} = F_*(\gamma_V)$, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. Για κάθε $V \in \mathscr{E}_p$ θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\exp_{F(p)} \circ d_pF(V) = F \circ \exp_p(V) \Leftrightarrow \gamma_{d_p(V)}(1) = F_*(\gamma_V)(1)$$

και οποία ισχύει από την παραπάνω ισότητα. □

Πρόταση 26. Έστω (M, g) και $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ δύο πολλαπλότητες Riemann, όπου M συνεκτική. Αν $F, G \colon M \to \tilde{M}$ τοπικές ισομετρίες, για τις οποίες υπάρχει $p \in M$ τέτοιο ώστε

$$F(p) = G(p) \quad \text{και} \quad d_pF = d_pG$$

τότε $F \equiv G$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathscr{A} = \{q \in M \mid F(q) = G(q) \text{ και } d_qF = d_qG\} \neq \emptyset$$

Για να δείξουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathscr{A}$ είναι clopen.

(α) Έστω $q \in \mathscr{A}$. Από την Πρόταση 25 ισχύει ότι

$$F \circ \exp_q = \exp_{F(q)} \circ d_qF = \exp_{G(q)} \circ d_qG = G \circ \exp_q$$

Από το Πόρισμα 7, υπάρχει U ανοικτή περιοχή του q και V ανοικτή περιοχή του V ώστε $\exp_p |V$ να είναι αμφιδιαφόριση. Συνεπώς $F = G$ στο U και προφανώς $dF = dG$ στο TU.

(β) Αφού M είναι συνεκτική και F τοπική ισομετρία, έχουμε ότι και $F(M)$ ανοικτό και συνεκτικό. Συνεπώς, το $F(M)$ με την επαγόμενη μετρική είναι μια συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Έχουμε δείξει ότι οι μετρικές τοπολογίες που επάγονται από τις μετρικές Riemann ταυτίζονται με τις αρχικές τοπολογίες. Με ακολουθιακό επιχείρημα είναι άμεσο ότι $\mathscr{A}$ είναι κλειστό.

□

13 Διάλεξη 15

13.1 Κανονικές Περιοχές και Κανονικές Συντεταγμένες

Ορισμός 32. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $p \in M$. Μια περιοχή U του p λέγεται **κανονική** αν είναι αμφιδιαφορική εικόνα μέσω της $\exp_p$ ενός αστρόμορφου ανοικτού υποσυνόλου του $\mathscr{E}_p$ που περιέχει το 0.

Παρατήρηση 29. Το Λήμμα 8 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη κανονική περιοχής του p, για κάθε $p \in M$.

Παρατήρηση 30. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $p \in M$. Θεωρούμε ορθοκανονική βάση $\{b_1, \dots, b_n\}$ του T_pM ως προς το g. Τότε, υπάρχει αμφιδιαφόριση

$$L \colon \mathbb{R}^n \to T_pM,\ L\left(v^1, \dots, v^n\right) = v^i b_i$$

Από το Λήμμα 8, μπορούμε να βρούμε $V \subseteq T_pM$ ανοικτή περιοχή του 0 και $U \subseteq M$ ανοικτή περιοχή του p ώστε $\exp_p \colon V \to U$ να είναι αμφιδιαφόριση. Τότε, επάγεται ομαλός χάρτης

$$\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi = L^{-1} \circ \left(\exp_p |_V\right)^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L^{-1}"] & L^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n \\ U \arrow[u, "\left(\exp_p|_V\right)^{-1}"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Προφανώς, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί για οποιαδήποτε κανονική περιοχή γύρω από το p. Οι συντεταγμένες αυτές θα λέγονται **κανονικές** γύρω από το p.

Παρατήρηση 31. Έστω $\left(U, \left(x^i\right)\right)$ οι κανονικές συντεταγμένες που κατασκεύαστηκαν μέσω της ορθοκανονική βάσης $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του T_pM. Τότε, ισχύει ότι $\partial_i|_p = b_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\partial_i|_p = d_0\left(\varphi^{-1}\right)(\partial_i|_0) = d_0\left(\exp_p\right) \circ (d_0 L)(\partial_i|_0)$$

Μέσω του παρακάτω μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "L"'] & T_0\mathbb{R}^n \arrow[d, "d_0 L"] \\ T_pM \arrow[r, "\cong"] & T_0\left(T_pM\right) \end{tikzcd}$$

και από το γεγονός ότι $d_0\left(\exp_p\right) = \mathrm{id}_{T_pM}$, τότε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Πρόταση 27 (Ιδιότητες των Κανονικών Συντεταγμένων)**.** Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann, (U, φ) κανονικές συνταγμένες γύρω από το $p \in M$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) $\varphi(p) = 0$

(β) Αν $A = (g_{ij})$ ο πίνακας της μετρικής g στο U (ως προς το πλαίσιο $\{\partial_i\}$), τότε $g_{ij}(p) = d_{ij}$.

(γ) Έστω $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$ και γ_v μεγιστική γεωδεσιακή με $\gamma_v(0) = p$ και $\dot{\gamma_v}(0) = v$. Τότε, η γ_v αναπαρίσταται ως προς τις κανονικές συντεταγμένες

$$\gamma_v(t) = \left(tv^1, \ldots, tv^n\right)$$

για $t \in I$, όπου I είναι κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0 και $\gamma(I) \subseteq U$.

(δ) $\Gamma^k_{i,j}(p) = 0$, για κάθε $i, j, k = 1, \ldots, n$

(ε) $\partial_k|_p\,(g_{ij})$, για κάθε $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τον ορισμό της φ.

(β) Άμεσο μέσω της παρατήρησης 31.

(γ) Άμεσο από τον ορισμός της φ και το Λήμμα 8.

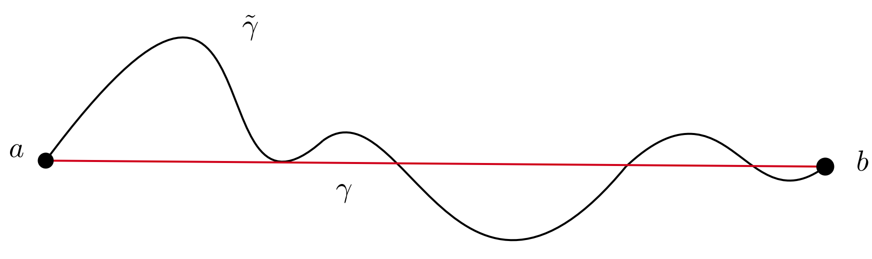
(δ) Για κάθε $v = v^i \partial_i|_p \in T_pM$, μέσω του (γ), θεωρώντας την γεωδαισιακή εξίσωση για την γ_v έχουμε ότι
$$v^i v^j \Gamma^k_{i,j}(p) = 0$$
Θεωρώντας $v = \partial_\ell$, από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι $\Gamma^k_{\ell\ell}(p) = 0$, για κάθε k. Τώρα, εφαρμόζοντας τα προηγούμενα για $v = \partial_a + \partial_b$ και $v = \partial_a - \partial_b$, οποτεδήποτε $a \neq b$ έχουμε ότι $\Gamma^k_{ab}(p) = 0$, για κάθε k.

(ε) Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5 (β).

□

Ορισμός 33. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann. Η (M, g) λέγεται **γεωδαισιακά πλήρης** αν για κάθε $p \in M$ η $\exp_p$ ορίζεται σε όλο το T_pM. Ισοδύναμα, για κάθε $v \in TM$ η γ_V ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Ορισμός 34. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $\gamma\colon [a, b] \to M$ μια κατά τμήματα $\mathscr{C}^\infty$, κανονική καμπύλη. Η γ θα λέγεται **ελαχιστοποιούσα** αν για κάθε $\tilde{\gamma}\colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \to M$ κατά τμήματα $\mathscr{C}^\infty$, κανονική καμπύλη ισχύει ότι $L_g(\gamma) \leq L_g(\tilde{\gamma})$.



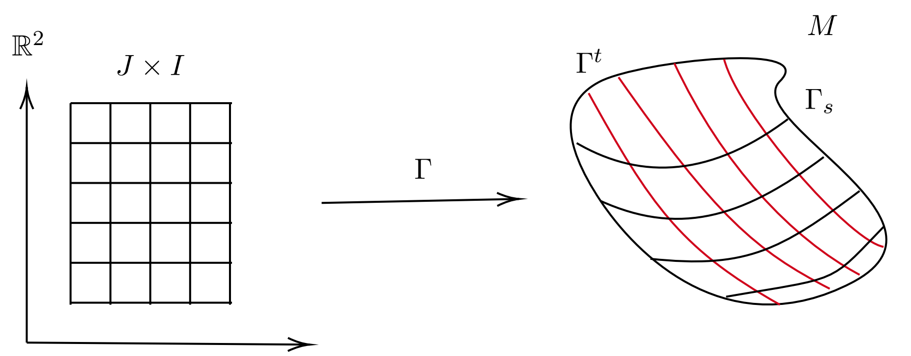
13.2 Μονοπαραμετρικές Οικογένειες Καμπυλών

Ορισμός 35. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $I, J \subseteq \mathbb{R}$ διαστήματα. Κάθε (συνεχής) $\Gamma\colon J \times I \to M$ λέγεται **μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών**.

- Για κάθε $s \in J$ οι καμπύλες $\Gamma_s\colon I \to M$ με $\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ λέγονται **κύριες**.
- Για κάθε $t \in I$ οι καμπύλες $\Gamma^t\colon J \to M$ με $\Gamma^t(s) = \Gamma(s,t)$ λέγονται **εγκάρσιες**.

Παρατήρηση 32. Αν μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $\Gamma\colon J \times I \to M$ είναι $\mathscr{C}^\infty$ συμβολίζουμε με

$$\partial_t\Gamma(s,t) = (\Gamma_s)'(t) \in T_{\Gamma(s,t)}M \quad \text{και} \quad \partial_s\Gamma(s,t) = \left(\Gamma^t\right)'(s) \in T_{\Gamma(s,t)}M$$



Ορισμός 36. Έστω $\Gamma\colon J \times I \to M$ μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών. Μια (συνεχής) απεικόνιση $V\colon J \to I \times TM$ λέγεται **διανυσματικό πεδίο κατά μήκος** της Γ αν $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}$.

Παράδειγμα 11. Τα $\partial_s\Gamma$ και $\partial_t\Gamma$ που ορίσθηκαν παραπάνω είναι διανυσματικά πεδία κατά μήκος της Γ.

Ορισμός 37. Έστω $\Gamma\colon J \times I \to M$ μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών. Η Γ θα λέγεται κατά τμήματα $\mathscr{C}^\infty$

- Αν $I = [a,b]$ και επιδέχεται διαμέριση $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
- Ισχύει ότι $\Gamma|_{J\times[a_{i-1},a_i]}$ είναι $\mathscr{C}^\infty$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
- Για κάθε $s \in J$ η καμπύλη Γ_s είναι κ.τ. κανονική $\mathscr{C}^\infty$ - καμπύλη.

Παρατήρηση 33. Αν Γ είναι κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$, τότε οι εγκάρσιες καμπύλες είναι $\mathscr{C}^\infty$, ενώ οι κύριες καμπύλες είναι κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλες. Συνεπώς, τα δ.π. $\partial_s\Gamma, \partial_t\Gamma$ είναι $\mathscr{C}^\infty$ σε κάθε $J \times [a_{i-1}, a_i]$, αλλά ενδεχομένως ασυνεχή στα (s, a_i).

Ορισμός 38.

- Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κ.τ. κανονική $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλη. Μια κ.τ. C^∞ - π.ο.κ. $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$ λέγεται **μεταβολή** (variation) της γ αν $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$, για κάθε $t \in [a,b]$.
- Επιπλεόν, η Γ θα λέγεται **proper** αν σταθεροποιεί τα άκρα, δηλαδή $\Gamma(s,a) = \gamma(a)$ και $\Gamma(s,b) = \gamma(b)$, για κάθε $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Ορισμός 39. Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κ.τ. κανονική $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλη και $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$ μεταβολή της γ. Το (κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$) διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της Γ :

$$V(t) = \partial_s\Gamma(0,t) = \left(\Gamma^t\right)'(0)$$

λέγεται **πεδίο μεταβολής** της Γ.

Παρατήρηση 34. Αν Γ είναι proper variation της γ, τότε $V(a) = 0$ και $V(b) = 0$.

Λήμμα 9. Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κ.τ. κανονική $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλη και $V\colon [a,b] \to M$ ένα (κ.τ.) δ.π. κατά μήκος της γ. Τότε, υπάρχει $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b]$ μεταβολή της γ τ.ω. το V να είναι πεδίο μεταβολής της Γ.

Επιπλέον, αν $V(a) = 0$ και $V(b)$ μπορούμε να επιλέξουμε το Γ να είναι proper.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\Gamma(s,t) = \gamma_{V(t)}(s) = \exp_{\gamma(t)}\left(s \cdot V(t)\right)$$

Λόγω της συμπάγειας του $[a,b]$, υπάρχει διάστημα $(-\varepsilon,\varepsilon)$ τ.ω. η παραπάνω έκφραση να έχει νόημα για κάθε $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Τότε, για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε ότι

$$\partial_s\Gamma(0,t) = \left(\gamma_{V(t)}\right)'(0) = V(t).$$

Από την τελευταία σχέση και αφού $V(t)$ είναι (κ.τ.) δ.π. της γ έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 35. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann.

- Έστω $\Gamma\colon J \times [a,b] \to M$ μια κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ - π.ο.κ. και $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ μια παραμέτρηση του $[a,b]$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες του Ορισμού 37.

- Τότε, Γ_s είναι $\mathscr{C}^\infty$ στα διαστήματα $[a_{i-1}, a_i]$, για κάθε $s \in J$ και Γ_t είναι C^∞ στο J, για κάθε $t \in [a, b]$. Συνεπώς, στα προηγούμενα διαστήματα μπορούν να ορισθούν οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι D_t, D_s των Γ_s και Γ_t αντίστοιχα.

- Στο $J \times [a_{i-1}, a_i]$, όπου Γ είναι $\mathscr{C}^\infty$, με $D_t\left(\partial_s \Gamma\right)(s_0, t_0)$ συμβολίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο του $\partial_s \Gamma(s_0, t) = \left(\Gamma^{(t)}\right)'(s_0)$ κατά μήκος της καμπύλης Γ_{s_0} στο t_0. Ομοίως, για το $D_s \partial_t \Gamma$.

Λήμμα 10. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $\Gamma\colon J \times [a, b] \to M$ μια κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ - π.ο.κ. Σε κάθε $J \times [a_{i-1}, a_i]$, όπου Γ είναι $\mathscr{C}^\infty$ ισχύει ότι

$$D_t\left(\partial_s \Gamma\right)(s, t) = D_s\left(\partial_t \Gamma\right)(s, t).$$

Απόδειξη. Έστω $(s_0, t_0) \in J \times [a_{i-1}, a_i]$ και $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ συντεταγμένες γύρω από το $\Gamma(s_0, t_0)$. Τότε, η Γ σε συνεταγμένες γράφεται

$$\Gamma = \left(\Gamma^1, \ldots, \Gamma^n\right)$$

- Θεωρούμε $V \subseteq J \times [a_i, a_{i+1}]$ με $(s_0, t_0) \in V$ τ.ω. $\Gamma(V) \subseteq U$. Τότε, έχουμε ότι

$$\partial_s \Gamma = \frac{\partial \Gamma^i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{και} \quad \partial_s \Gamma = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

  Συνεπώς, έχουμε ότι

$$D_t \partial_s \Gamma = \left(\frac{\partial^2 \Gamma^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial \Gamma^i}{\partial t} \frac{\partial \Gamma^i}{\partial s} \Gamma^k_{i,j}\right) \partial_k \quad \text{και} \quad D_s \partial_t \Gamma = \left(\frac{\partial^2 \Gamma^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \Gamma^i}{\partial s} \frac{\partial \Gamma^i}{\partial t} \Gamma^k_{i,j}\right)$$

  Από το θεώρημα μεικτών παραγώγων και χρησιμοποιώντας ότι η συνοχή Levi - Civita είναι συμμετρική (δηλαδή $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

□

14 Διάλεξη 16

14.1 Πρώτος Τύπος Μεταβολής Μήκους

Λήμμα 11. Έστω $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to \mathbb{R}$ μια $\mathscr{C}^\infty$ απεικόνιση. Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{d}{ds}\left(\int_a^b f(s, t) dt\right)\bigg|_{s=0} = \int_a^b \partial f(0, t) dt.$$

Απόδειξη. Έστω $F\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ με $F(s) = \int_a^b f(s,t)dt$. Υποθέτουμε ότι $s \in (0, \varepsilon/2)$. Τότε, έχουμε ότι

$$\left| \frac{F(s) - F(0)}{s} - \int_a^b \partial\partial_s f(0,t)dt \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{f(s,t) - f(0,t)}{s} - \partial_s f(0,t) \right) dt \right|$$

Για κάθε $(s,t) \in (0,\varepsilon/2) \times [a,b]$, από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $0 \le s_t \le s$ ώστε

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(s) - F(0)}{s} - \int_a^b \partial_s f(0,t)dt \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{f(s,t) - f(0,t)}{s} - \partial_s f(0,t) \right) dt \right| \\ = \quad & \int_a^b \left(\partial f(s_t,t) - \partial f(0,t) \right) dt = \int_a^b \int_0^{s_t} \partial^2 f(u,t) du dt \le (b-a) \cdot s_t \cdot \max_{[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]\times[a,b]} \partial^2 f(u,t) \\ \le \quad & \le C \cdot s \end{aligned}$$

□

Θέωρημα 6 (Πρώτος Τύπος Μεταβολής Μήκους)**.** Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann και $\gamma\colon [a,b] \to M$ μια κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας.

- Έστω $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ μια μεταβολή της Γ και V το αντίστοιχο πεδίο μεταβολής της.
- Αν $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ μια διαμέριση του $[a,b]$ τ.ω. $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι $\mathscr{C}^\infty$, τότε συμβολίζουμε $\Delta\dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}\left(a_i^+\right) - \dot{\gamma}\left(a_i^-\right)$.

Τότε, ισχύει ότι

$$\frac{d}{ds}\left(L_g\left(\Gamma_s\right) \right)\Big|_{s=0} = \int_a^b \langle V(t), D_t\dot{\gamma} \rangle \, dt - \sum_{i=1}^{n-1} \langle V(a_i), \Delta\dot{\gamma}_i \rangle + \langle V(b), \dot{\gamma}(b) \rangle - \langle V(a), \dot{\gamma}(a) \rangle$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $T(s,t) = \partial_t \Gamma(s,t)$ και $S(s,t) = \partial_s \Gamma(s,t)$. Τότε, έχουμε ότι

$$L_g\left(\Gamma_s\right) = \sum_{i=0}^{n-1} L_g\left(\Gamma_s\Big|_{[a_i,a_{i+1}]} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle T(s,t), T(s,t) \rangle^{1/2} \, dt$$

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} L_g\left(\Gamma_s\Big|_{[a_i,a_{i+1}]} \right) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\langle T(s,t), T(s,t) \rangle^{1/2} \right) \Big|_{s=0} dt \\ = \quad & \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{|T(0,t)|} \langle D_s T(0,t), T(0,t) \rangle \, dt \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 10 και από το γεγονός ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{|T(0,t)|} \langle D_s T(0,t), T(0,t)\rangle \, dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{|T(0,t)|} \langle D_t S(0,t), \gamma(t)\rangle \, dt \\
= \quad & \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{d}{dt} \left[\langle V(t), \dot\gamma(t)\rangle \right] - \langle V(t), D_t\dot\gamma(t)\rangle \right) dt \\
= \quad & \left\langle V(a_{i+1}), \dot\gamma(a_{i+1}^-) \right\rangle - \left\langle V(a_{i+1}), \dot\gamma(a_{i+1}^+) \right\rangle - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle V(t), D_t\dot\gamma(t)\rangle \, dt
\end{aligned}$$

□

Θέωρημα 7. Σε μια πολλαπλότητα Riemann κάθε ελαχιστοποιούσα καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας είναι γεωδαισιακή.

Απόδειξη.

- Έστω $\gamma\colon [a,b] \to M$ κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ και ελαχιστοποιούσα. Θεωρούμε διαμέριση $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ ώστε $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ να είναι $\mathscr{C}^\infty$, για κάθε $i = 0,\ldots,n-1$.

- Για κάθε $\Gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to M$ κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ proper μεταβολή της γ, από κριτήριο πρώτης παραγώγου, ισχύει ότι
$$\frac{d}{ds}\left(L_g(\Gamma_s)\right)|_{s=0} = 0.$$

- Θα δείξουμε ότι $D_t\dot\gamma = 0$ στο $[a_i, a_{i+1}]$, για κάθε $i = 0,\ldots,n-1$, δηλαδή ότι γ είναι μια ″ σπασμένη ″ γεωδαιασική. Έστω $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Έστω $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ μια bump function για την οποία ισχύει
$$\varphi(t) > 0, \quad t \in (a_i, a_{i+1}) \quad \text{και} \quad \varphi(t) = 0 \text{ αλλιώς.}$$
και θεωρούμε $V = \varphi\cdot D_t\dot\gamma \in \mathscr{X}(\gamma)$. Από το Λήμμα 9, έστω proper $\Gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to M$ μεταβολή της γ με αντίστοιχο πεδίο μεταβολής το V. Από το Θεώρημα 6 και την παραπάνω παρατήρηση ισχύει ότι
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle V(t), D_t\dot\gamma(t)\rangle = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(t)\cdot|D_t\dot\gamma(t)|^2\, dt = 0$$
όπου λόγω συνέχειας προκύπτει ότι $D_t\dot\gamma = 0$ στο $[a_i, a_{i+1}]$.

- Θα δείξουμε ότι $\Delta\dot\gamma_i = 0$, για κάθε $i = 1,\ldots,n-1$, δηλαδή η γ δεν έχει ″ γωνίες″. Υποθέτουμε ότι $\gamma(a_i) \neq \gamma(a_j)$, για κάθε $i \neq j$ (αλλιώς τροποποιούμε κατάλληλα την αρχική διαμέριση). Έστω $i \in \{0,\ldots,n-1\}$.

- Αφού M είναι Hausdorff, θεωρούμε χάρτη (U,φ) με $\gamma(a_i)\in U$, αλλά $\gamma(a_j)\notin U$, για κάθε $j\neq i$. Έτσι θεωρούμε $\tilde{V}\in\mathscr{X}(M)$ με $V(\gamma(a_i))=\Delta\dot{\gamma}_i$ και $\mathrm{supp}\tilde{V}\subseteq U$. Θεωρούμε το $V=\tilde{V}\circ\gamma$.

- Από το Λήμμα 9, έστω proper $\Gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$ μεταβολή της γ με αντίστοιχο πεδίο μεταβολής το V. Από το Θεώρημα 6, όπως παραπάνω, προκύπτει ότι

$$-\langle V(a_i),\Delta\dot{\gamma}_i\rangle=0\Rightarrow|\Delta\dot{\gamma}_i|^2=0$$

  συνεπώς $\Delta\dot{\gamma}_i=0$.

- Μέσω της παραπάνω παρατήρησης δείξαμε ότι γ είναι $\mathscr{C}^1$. Μέσω της γεωδαισιακής εξίσωσης

$$\ddot{\gamma}^k=-\dot{\gamma}^i\cdot\dot{\gamma}^j\cdot\Gamma_{i,j}^k$$

  προκύπτει ότι γ είναι $\mathscr{C}^2$ και συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο προκύπτει ότι γ είναι $\mathscr{C}^\infty$ και έχουμε δείξει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Ορισμός 40. Έστω $\gamma\colon[a,b]\to M$ με $p=\gamma(a)$ και $q=\gamma(b)$. Έστω

$$L_g\colon\left\{\tilde{\gamma}\colon[\tilde{a},\tilde{b}]\to M\ |\ \tilde{\gamma}\text{ κ.τ. }\mathscr{C}^\infty,\text{ κανονική},\ \tilde{\gamma}(\tilde{a})=p,\ \tilde{\gamma}(\tilde{b})=q\right\}\to\mathbb{R},\ \tilde{\gamma}\mapsto L_g(\tilde{\gamma})$$

Η γ θα λέγεται **κρίσιμο σημείο** της L_g αν για κάθε proper μεταβολή Γ της γ ισχύει ότι

$$\frac{d}{ds}\left(L_g(\Gamma_s)\right)|_{s=0}=0$$

Πόρισμα 8. Μια κ.τ. $\mathscr{C}^\infty$ καμπύλη γ είναι κρίσιμο σημείο της L_g αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή.

Απόδειξη. Ο ευθύς ισχυρισμός προκύπτει μέσω της παραπάνω απόδειξης χωρίς καμία τροποίηση. Για τον αντίστροφο ισχύει το ζητούμενο προκύπτει άμεσα, αφού Γ είναι proper, $D_t\dot{\gamma}=0$ και $\Delta\dot{\gamma}_i=0$, για κάθε i, αφού γ είναι $\mathscr{C}^\infty$. □

14.2 Γεωδαισιακές Μπάλες

Ορισμός 41. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann.

(α) Αν για κάποιο $\varepsilon>0$, ισχύει ότι $\mathbb{B}(0,\varepsilon)\subseteq T_pM$ και η $\exp_p\colon\mathbb{B}(0,\varepsilon)\to\exp_p(\mathbb{B}(0,\varepsilon))$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε το $\exp_p(\mathbb{B}(0,\varepsilon))\subseteq M$ λέγεται **γεωδαισιακή μπάλα** του M.

(β) Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό $V \subseteq T_pM$ τ.ω. $\overline{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} \subseteq V$ και $\exp_p \colon V \to \exp_p(V)$ αμφιδιαφόριση. Το σύνολο $\exp_p\left(\overline{\mathbb{B}(0,\varepsilon)}\right)$ λέγεται **κλειστή γεωδαισιακή μπάλα** και το $\exp_p\left(\partial\mathbb{B}(0,\varepsilon)\right)$ λέγεται **γεωδαισιακή σφαίρα**.

(γ) Έστω $U = \exp_p(V)$ κανονική περιοχή του p. Ορίζουμε

$$r \colon U \to \mathbb{R}, \quad r(q) = \left|\exp_p^{-1}(q)\right|_{g_p}$$

Παρατήρηση 36. (α) Η απεικόνιση $r \colon U \to \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{C}^\infty$ στο $U \setminus \{p\}$, αφού $\exp_p(0) = p$.

(β) Αν $x^1, \ldots, x^n$ οι κανονικές συντεταγμένες του U και $q \in U$ παρατηρήστε ότι

$$\exp_p^{-1}(q) = x^i(q)\partial_i|_p$$

Τότε, έχουμε ότι

$$r(q) = \left(\sum_{i=1}^n \left(x^i(q)\right)^2\right)^{1/2}.$$

15 Διάλεξη 17

15.1 Ακτινικό Διανυσματικό Πεδίο

Παρατήρηση 37. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$ και $U = \exp_p(V)$ μια κανονική περιοχή του p. Ορίζουμε στο $V \setminus \{0\}$ διανυσματικό πεδίο ∂_r, όπου για κάθε $v \in V \setminus \{0\}$ και $f \in \mathscr{C}^\infty\left(V \setminus \{0\}\right)$

$$\partial_r|_v(f) = \frac{d}{dt} f\left(t \cdot \frac{v}{\|v\|}\right)\bigg|_{t=\|v\|}$$

Αν θεωρήσουμε $\left\{u^1, \ldots, u^n\right\}$ συντεταγμένες στο T_pM, τότε το ∂_r εκφράζεται σε συντεταγμένες ως εξής

$$\partial_r = \frac{u^i}{\sqrt{\left(u^1\right)^2 + \cdots + \left(u^n\right)^2}} \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Ορισμός 42. Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$ και $U = \exp_p(V)$ μια κανονική περιοχή του p. Στο $U \setminus \{p\}$ ορίζουμε το **ακτινικό διανυσματικό πεδίο**

$$\partial_r = \exp_*\left(\partial_r\right)$$

όπου $\partial_r \in \mathscr{X}\left(V \setminus \{0\}\right)$ (στο δεξί μέλος) είναι το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο που ορίσθηκε στην παραπάνω παρατήρηση.

Παρατήρηση 38. Στις αντίστοιχες κανονικές συντεταγμένες $\{x^1, \ldots, x^n\}$ το ακτινικό διανυσματικό πεδίο γράφεται ως εξής :

$$\partial_r|_q = \frac{x^i(q)}{r(q)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$$

15.2 Λήμμα του Gauss

Παρατήρηση 39.

- Έστω Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$ και $U = \exp_p(V)$ κανονική περιοχή. Έστω $\partial_\delta(0) \subseteq V$ σφαίρα και $W = \exp_p(\partial_\delta(0))$ η αντίστοιχη γεωδαισιακή σφαίρα.

- Αφού $\partial_\delta(0) \subseteq V$ είναι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα και $\exp_p$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε W είναι επίσης εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα του U (άρα και της M). Συνεπώς, μπορούμε θα θεωρήσουμε τον $T_qW \leq T_qM$, για κάθε $q \in W$.

- Σε κανονικές συντεταγμένες $\{x^1, \ldots, x^n\}$ έχουμε ότι

$$W = \left\{q \in U \mid \left(x^1(q)\right)^2 + \cdots + \left(x^n(q)\right)^2 = \delta^2\right\} = \{q \in U \mid r(q) = \delta\}$$

Παρατήρηση 40. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$ και $U = \exp_p(V)$ κανονική περιοχή. Για κάθε $q \in U\{p\}$, σε κανονικές συντεταγμένες, αν συμβολίσουμε $b = r(q)$, ισχύει ότι

$$\partial_r|_q = \frac{q^i}{b} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$$

Έστω $v = \left(q^i/b\right) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ και γ_v η αντίστοιχη μεγιστική γεωδαισιακή, η οποία σε συντεταγμένες γράφεται

$$\gamma_V(t) = \left(\frac{q^1 t}{b}, \ldots, \frac{q^n t}{b}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $\gamma_V(b) = q$ και $\dot{\gamma_V}(b) = \partial_r|_q$. Η γ_V έχει σταθερή ταχύτητα, ως γεωδαισιακή, και μάλιστα

$$|\dot{\gamma}_V(0)|_g = |v|_g = \frac{1}{b}\sqrt{(q^1)^2 + \cdots + (q^n)^2} = 1.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\partial_r|_q$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Παρατήρηση 41. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το Λήμμα του Gauss, δηλαδή να δείξουμε ότι το ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\partial_r \in \mathscr{X}(U \setminus \{p\})$ είναι κάθετο σε οποιαδήποτε γεωδαισιακή σφαίρα.

- Πιο αυστηρά, έστω $W = \exp_p(\partial_\delta)$ και $q \in W$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\langle w, \partial_r|_q \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } w \in T_q W$$

Από την Παρατήρηση 39, αφού $b = r(q) = \delta$, έχουμε ότι $W = \exp_p(\partial_b)$. Συνεπώς, για να δείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $q \in U \setminus \{0\}$ ισχύει ότι

$$\langle w, \partial_r|_q \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } w \in T_b\left(\exp_p(\partial_b(0))\right)$$

Θέωρημα 8 (Λήμμα του Gauss)**.** Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann, $p \in M$ και U μια γεωδαισιακή μπάλα γύρω από το p. Τότε, το ∂_r είναι ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο, κάθετο σε κάθε γεωδαιασιακή σφαίρα.

Απόδειξη. Έστω $q \in U \setminus \{p\}$, b, v όπως στην Παρατήρηση 39 και $W = \exp_p(\partial_b(0))$.

- Έστω $w \in T_q W$. Θα δείξουμε ότι $\langle w, \partial_r|_q \rangle = 0$. Έστω $\sigma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to W$ $\mathscr{C}^\infty$ τ.ω. $\sigma(0) = q$ και $\dot\sigma(0) = w$, η οποία σε κανονικές συντεταγμένες έχει την μορφή

$$\sigma(s) = \left(\sigma^1(s), \ldots, \sigma^n(s)\right)$$

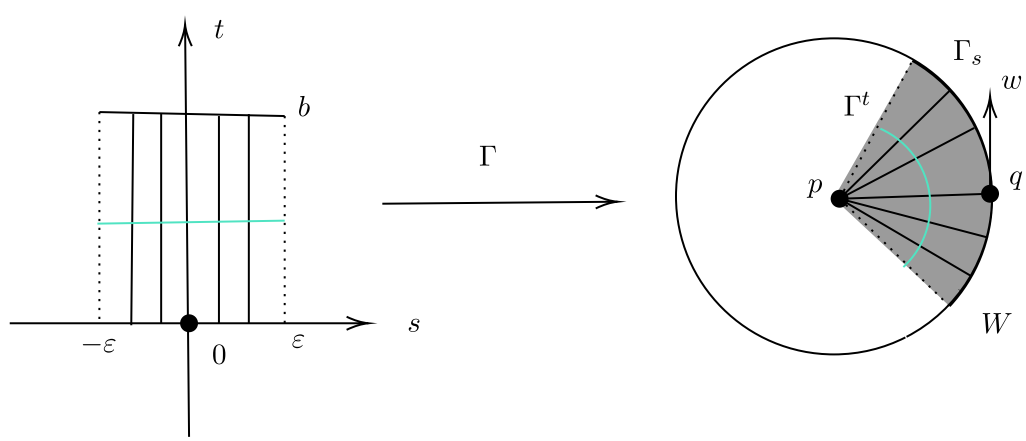
Αφού $\sigma(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq W$ έχουμε ότι

$$\left(\sigma^1(s)\right)^2 + \cdots + \left(\sigma^n(s)\right)^2 = b^2.$$

- Ορίζουμε μεταβολή της γ (σε κανονικές συντεταγμένες) ως εξής :

$$\Gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, b] \to U, \quad \Gamma(s,t) = \left(\frac{t}{b} \cdot \sigma^1(s), \ldots, \frac{t}{b} \cdot \sigma^n(s)\right)$$

Η Γ περιγράφεται μέσω του παρακάτω σχήματος



- Για κάθε $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, η Γ_s είναι γεωδαισιακή με $(\Gamma_s)'(0) = \big(\sigma^i(s)/b\big)\,\partial_i|_p$ και μέσω των κανονικών συντεγμένων και από το γεγονός ότι η σ βρίσκεται στην W, έχουμε ότι $(\Gamma_s)'(0)$ είναι μοναδιαίο. Αφού Γ_s είναι σταθερού μέτρο, τότε συμπεραίνουμε ότι Γ_s είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

- Έστω $T = \partial_t\Gamma$ και $S = \partial_s\Gamma$. Τότε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} S(0,0) &= \frac{d}{ds}\left(\Gamma_s(0)\right)\bigg|_{s=0} = 0 \\ S(0,b) &= \frac{d}{ds}\left(\Gamma_s(b)\right)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{ds}\sigma(s)\bigg|_{s=0} = w \\ T(0,0) &= \frac{d}{dt}\left(\Gamma^t(0)\right)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\gamma_v(t)\right)\bigg|_{t=0} = v \\ T(0,b) &= \frac{d}{dt}\left(\Gamma^t(0)\right)\bigg|_{t=b} = \frac{d}{dt}\left(\gamma_v(t)\right)\bigg|_{t=b} = \partial_r|_q \end{aligned}$$

  Συνεπώς, $\langle w, \partial_r|_q\rangle = 0$ αν και μόνο αν $\langle T(0,b), S(0,b)\rangle = 0$.

- Αν δείξουμε ότι η απεικόνιση $h(t) = \langle T(0,t), S(0,t)\rangle$ είναι σταθερή, αφού $h(0) = 0$ από τις παραπάνω παρατηρήσεις, τότε $h(b) = 0$ δηλαδή το ζητούμενο.

- Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} & \dot{h}(t) = \frac{d}{dt}\left\langle T(0,t), S(0,t)\right\rangle = \left\langle D_tT(0,t), S(0,t)\right\rangle + \left\langle T(0,t), D_tS(0,t)\right\rangle \\ = \quad & \underbrace{\left\langle D_t\dot{\gamma_v}(t), S(0,b)\right\rangle}_{0} + \left\langle \gamma_v(t), D_sT(0,t)\right\rangle = \left\langle \gamma_v(t), D_s\dot{\gamma_v}(t)\right\rangle \\ = \quad & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\langle T(s,t), T(s,t)\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}(1) = 0 \end{aligned}$$

□

Ορισμός 43. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Μέσω των μουσικών ισομορφισμών ορίζουμε ως gradient του f το διανυσματικό πεδίο $\operatorname{grad}(f) := (df)^\sharp$. Το $\operatorname{grad}(f)$ χαρακτηρίζεται από την σχέση

$$df|_p(w) = \langle \operatorname{grad}(f)|_p, w\rangle\,, \quad \text{για κάθε } p \in M\ w \in T_pM$$

Ορισμός 44. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Το $p \in M$ θα λέγεται **κανονικό σημείο** της f αν $df|_p \neq 0$, ενώ σε διαφορετική περίπτωση λέγεται **κρίσιμο σημείο**. Ένα $f^{-1}(c)$ θα λέγεται **κανονικό σύνολο στάθμης** αν κάθε σημείο του $f^{-1}(c)$ είναι κανονικό.

Παρατήρηση 42. Αποδεικνύεται ότι κάθε κανονικό σύνολο στάθμης $f^{-1}(c) \subseteq M$ είναι μια ομαλή εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια (εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα συνδιάστασης 1).

Λήμμα 12. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Αν $\mathscr{R}$ το σύνολο των κανονικών σημείων της f και $M_c = f^{-1}(c) \cap \mathscr{R}$, τότε M_c $M_c \subseteq M$ είναι μια ομαλή εμφυτευμένη υπερεπιφάνεια και $\mathrm{grad}(f)$ κάθετο στην M_c.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Λήμμα 13. Έστω (M, g) πολλαπλότητα Riemann και $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Έστω $X \in \mathscr{X}(M)$ ένα πουθενά μηδενικό διανυσματικό πεδίο. Τότε, $X = \mathrm{grad}(f)$ αν και μόνο αν $Xf = |X|_g^2$ και X είναι κάθετο στα σύνολα M_c.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Πόρισμα 9. Έστω U γεωδαισιακή μπάλα με κέντρο το $p \in M$ και r, ∂_r η ακτινική συνάρτηση απόστασης και το ακτινικό διανυσματικό πεδίο αντίστοιχα. Τότε, $\mathrm{grad}(r) = \partial_r$ στο $U \setminus \{p\}$.

Απόδειξη. Από τα παραπάνω Λήμματα, αρκεί να δείξουμε ότι ∂_r είναι κάθετο στα σύνολα στάθμης του r και $\partial_r(r) = |\partial_r|_g^2$. Το πρώτο προκύπτει άμεσα, αφού οι γεωδαισιακές σφαίρες είναι τα σύνολα στάθμης του r, άρα από το Λήμμα του Gauss έχουμε το ζητούμενο. Για το δεύτερο σκέλος, υπολογίζοντας σε κανονικές συνταγμένες προκύπτει ότι $\partial_r(r) = 1 = |\partial_r|_g^2$, όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει μέσω της παρατήρησης 40. □