Ανάλυση 1

Ιάσονας Ασκούνης

2023

Περιεχόμενα

1 Μέτρα

1.1 σ-Αλγεβρες

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.Η οικογένεια $\mathcal{F}$ καλείται ***άλγεβρα υποσυνόλων του X*** *αν ικανοποιεί τις εξής 3 ιδιότητες:*

- *Η $\mathcal{F}$ είναι μη κενή.*
- *Για κάθε $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.*
- *Για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$.*

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.Η οικογένεια $\mathcal{F}$ καλείται ***σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X*** *αν ικανοποιεί τις εξής 3 ιδιότητες:*

- *Η $\mathcal{F}$ είναι μη κενή.*
- *Για κάθε $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.*
- *Για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ ισχύει ότι: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.*

Παρατηρήσεις .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.

1. *Αν η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα ή σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X τότε*

$$\emptyset, X \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη:

Αρχικά αφού η $\mathcal{F}$ είναι μη κενή έπεται ότι υπάρχει $A \in \mathcal{F}$.

Αφού όμως και $A^c \in \mathcal{F}$ λόγω της κλειστότητας της $\mathcal{F}$ ως προς τα συμπληρώματα έπεται τελικά ότι και

$$X = A \cup A^c \in \mathcal{F}.$$

Επομένως και $X^c = \emptyset \in \mathcal{F}$.

2. *Αν η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα τότε είναι και άλγεβρα.*

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε την 3η ιδιότητα που ικανοποιεί μια άλγεβρα.

Έστω επομένως $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ και θεωρούμε και την ακολουθία συνόλων $(B_n)_{n\geq 1}$ που ορίζεται ως εξής:

$$B_k = \begin{cases} A_k, 1 \leq k \leq n \\ \emptyset, k \geq n+1 \end{cases} \tag{1}$$

και τότε παρατηρούμε ότι αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

3. *Αν η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα τότε για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ ισχύει ότι*

$$A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη:

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $A^c, B^c \in \mathcal{F}$ και η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις και συμπληρώματα έπεται ότι

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}.$$

Επίσης αφού η $\mathcal{F}$ είναι και κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές έπεται ότι

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}.$$

4. *Αν η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X τότε για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ ισχύει ότι*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη:

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c.$$

5. *Αν η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα κλειστή ως προς τις ξένες αριθμήσιμες ενώσεις,τότε είναι και σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις.

Έστω επομένως $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ και ορίζουμε την ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ που ορίζεται ως εξής

$$A_1 = B_1$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Η $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$ που είναι ξένα ανά 2 και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

Παραδείγματα 1.

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και θεωρούμε και τις οικογένειες υποσυνόλων του X:

- $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, X\}$
- $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(X)$
- $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathcal{P}(X) : A : \text{ αριθμήσιμο ή } A^c : \text{αριθμήσιμο}\}$.

Εύκολα ελέγχεται ότι αυτές είναι σ-άλγεβρες υποσυνόλων του X και αν το X είναι αριθμήσιμο τότε $\mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(X)$.

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω και $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X.

Τότε η

$$\bigcap_{i\in I} F_i$$

είναι επίσης σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και έστω και $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Ορίζουμε την ***παραγόμενη σ-άλγεβρα απο την*** *$\mathcal{A}$ να είναι η οικογένεια*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \text{ σ-άλγεβρα και } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$$

και αυτή είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{A}$.

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(X)$.

1. *Αν $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \implies \sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$.*
2. *Αν $\mathcal{A}_1 \subset \sigma(\mathcal{A}_2) \implies \sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$.*

Απόδειξη.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι αν* $\mathcal{F}_0$ *είναι μια σ-άλγεβρα όπου* $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}_0$ *τότε θα έχουμε ότι και*

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{F}_0.$$

Επομένως τελικά

$$\mathcal{A}_1 \subset \bigcap\{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \text{ σ-άλγεβρα}, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}\} = \sigma(\mathcal{A}_2).$$

Όμως η $\sigma(\mathcal{A}_2)$ *είναι σ-άλγεβρα και αφού η* $\sigma(\mathcal{A}_1)$ *είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{A}_1$ *έπεται τελικά ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2).$$

2. *Η* $\sigma(\mathcal{A}_2)$ *είναι σ-άλγεβρα και αφού η* $\sigma(\mathcal{A}_1)$ *είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{A}_1$ *έπεται τελικά ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2).$$

Ορισμός .

Έστω X *μετρικός χώρος ή πιο γενικά τοπολογικός χώρος και θεωρούμε και την οικογένεια* $\mathcal{T} = \{U \subset X : U \text{ ανοιχτό}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Ορίζουμε $\mathcal{B}(X)$ *την* ***Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X*** *να είναι η παραγόμενη σ-άλγεβρα απο την οικογένεια* $\mathcal{T}$*,δηλαδή*

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$$

Παρατηρήσεις .

Έστω X *τοπολογικός χώρος.*

1. *Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του* X *είναι Borel.*

2. *Κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι Borel.*

3. *Κάθε G_δ υποσύνολο του X είναι Borel.*

4. *Κάθε F_σ υποσύνολο του X είναι Borel.*

5. *Κάθε $G_{\delta\sigma}$ και $F_{\sigma\delta}$ υποσύνολο του X είναι Borel.*

Πρόταση .

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ παράγεται απο τις ακόλουθες οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$:

- $E_1 = \{(a,b) : a < b \in \mathbb{R}\}$
- $E_2 = \{[a,b] : a < b \in \mathbb{R}\}$
- $E_3 = \{(a,b] : a < b \in \mathbb{R}\}$
- $E_4 = \{[a,b) : a < b \in \mathbb{R}\}$
- $E_5 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$
- $E_6 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$
- $E_7 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$
- $E_8 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$.

Απόδειξη.

Αρχικά είναι προφανές ότι για κάθε $k = 1, \ldots, 8$ ισχύει ότι

$$E_k \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

*και άρα απο την **Πρόταση 2.2** έχουμε τελικά ότι*

$$\sigma(E_k) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Επομένως μένει να αποδείξουμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots, 8$ *ισχύει ότι*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(E_k).$$

Μάλιστα αν θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathcal{T} = \{U \subset X : U : \text{ανοιχτό}\}$ *τότε απο την* ***Πρόταση 2.2*** *έχουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε* $k = 1, \ldots, 8$ *ισχύει*

$$\mathcal{T} \subset \sigma(E_k).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για την

$$\mathcal{T} \subset \sigma(E_1)$$

αφού κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ *γνωρίζουμε ότι γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων και η* $\sigma(E_1)$ *είναι* σ*-άλγεβρα έπεται άμεσα το ζητούμενο.*
Τώρα για την

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(E_1) \subset \sigma(E_2)$$

απο την ***Πρόταση 2.2*** *αρκεί να αποδείξουμε ότι*

$$E_1 \subset \sigma(E_2).$$

Έστω επομένως $I_1 = (a, b) \in E_1$ *και τότε αφού*

$$I_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

και κάθε $J_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in E_2 \subset \sigma(E_2)$ *έπεται τελικά ότι* $I_1 \in \sigma(E_2)$ *και άρα έχουμε το ζητούμενο.*
Χρησιμοποιώντας τώρα παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύουμε εύκολα ότι για $k = 3, 4$ *ισχύει*

$$E_1 \subset \sigma(E_k) \implies \sigma(E_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(E_k).$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$E_1 \subset \sigma(E_5)$$

και με παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύοντα και τα υπολοίποντα.

Έστω επομένως $I_1 = (a, b) \in E_1$ *και τότε παρατηρούμε ότι*

$$\begin{aligned} I_1 &= (a, +\infty) \setminus [b, +\infty) = (a, +\infty) \cap [b, +\infty)^c \\ &= (a, +\infty) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(b - \frac{1}{n}, +\infty \right) \right)^c . \end{aligned}$$

Αφού όμως η $\sigma(E_5)$ *είναι σ-άλγεβρα και κάθε* $J_n = \left(b - \frac{1}{n}, +\infty\right) \in E_5 \subset \sigma(E_5)$ *έπεται τελικά ότι* $I_1 \in \sigma(E_5)$.

Παρατηρήσεις .

Αν στους ορισμούς των E_i *της* ***Πρότασης 3*** *αντικαταστήσουμε το* $\mathbb{R}$ *με* $\mathbb{Q}$ *τότε πάλι ισχύει το ίδιο συμπέρασμα.*

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο και έστω και* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *μια σ-άλγεβρα.Το ζεύγος* $(X, \mathcal{F})$ *καλείται* ***μετρήσιμος χώρος***.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ *δύο μετρήσιμοι χώροι.Μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *καλείται* ***μετρήσιμη-***$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ *αν για κάθε* $A \in \mathcal{G} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο,*$(Y, \mathcal{G})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to Y$ *συνάρτηση.*

Με $\sigma(f)$ *συμβολίζουμε την μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* X *που κάνει την* f *μετρήσιμη.*

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο,*$(Y, \mathcal{G})$ *μετρήσιμος χώρος και έστω* $f : X \to Y$ *συνάρτηση.Τότε* $\sigma(f) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}\}$.

Απόδειξη.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}\}$$

είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X *που κάνει την* f *μετρήσιμη και τότε λόγω του ορισμού της* $\sigma(f)$ *θα έχουμε ότι*

$$\sigma(f) = \mathcal{A}.$$

Αρχικά για το ότι είναι σ-άλγεβρα παρατηρούμε ότι

- *Η* $\mathcal{A}$ *είναι μη κενή γιατί* $\emptyset \in \mathcal{A}$.

- *Επίσης αν* $B \in \mathcal{A}$ *τότε έχουμε ότι* $B = f^{-1}(A), A \in \mathcal{G}$ *και αφού τώρα*

$$B^c = X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(A^c)$$

  και $A^c \in \mathcal{G}$ *λόγω του ότι η* $\mathcal{G}$ *είναι σ-άλγεβρα,έχουμε τελικά ότι* $B^c \in \mathcal{A}$.

- *Τέλος παρατηρούμε ότι αφού αν πάρουμε μια ακολουθία* $(B_n) = (f^{-1}(A_n)), A_n \in \mathcal{G}$ *τότε αφού*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

  και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$ *γιατί η* $\mathcal{G}$ *είναι σ-άλγεβρα,έπεται τελικά ότι* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$.
  Επίσης παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ *είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* X *που κάνει την* f *μετρήσιμη γιατί για κάθε για κάθε* $A \in \mathcal{G}$ *έχουμε κατά προφανή τρόπο ότι* $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. *Τέλος εύκολα αποδεικνύουμε ότι αυτή είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα με αυτήν την ιδιότητα.*

Λήμμα.

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος,*$Y \neq \emptyset$ *σύνολο και* $f : X \to Y$ *συνάρτηση.Τότε η οικογένεια* $\mathcal{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ *είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* Y.

Απόδειξη.

Πράγματι η $\mathcal{B}$ *είναι σ-άλγεβρα γιατί :*

- *Έχουμε ότι* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F} \implies \emptyset \in \mathcal{B}$.

- *Αν* $B \in \mathcal{B}$ *τότε*

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

  γιατί η $\mathcal{F}$ *είναι σ-άλγεβρα και* $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

- *Αν* $(B_n) \subset \mathcal{B}$ *τότε παρατηρούμε ότι*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

γιατί για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$ και η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο,$(Y, \mathcal{G})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Αν $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ με $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$ τότε

$$\sigma(f) = \sigma(\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}).$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$S = \sigma(\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\})$$

τότε παρατηρούμε αφού $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$ έπεται ότι

$$S \subset \sigma(f) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}\}.$$

Ορίζουμε τώρα την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in S\}$$

*και παρατηρούε ότι απο το **Λήμμα 1** έχουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα και αφού επίσης $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ έχουμε τελικά απο **Πρόταση 2.2** ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G} \subset \mathcal{C}.$$

Τελικά για κάθε $A \in \mathcal{G}$ έχουμε ότι $f^{-1}(A) \in S$ και άρα

$$\sigma(f) \subset S$$

και έτσι έχουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$,$(Y_i, \mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων και* $f_i : X \to Y_i, i \in I$ *μια οικογένεια συνάρτησεων.Ορίζουμε* $\sigma((f_i)_{i\in I})$ *να είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* X *που κάνει όλες τις* f_i *μετρήσιμες.*

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$,$(Y_i, \mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων και* $f_i : X \to Y_i, i \in I$ *μια οικογένεια συνάρτησεων.Τότε*

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma(\{f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{G}_i\}) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(f_i)\right).$$

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$,$(Y_i, \mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων και* $f_i : X \to Y_i, i \in I$ *μια οικογένεια συνάρτησεων,όπου* I *είναι αριθμήσιμο.*

Τότε

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma\left(\left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{G}_i\right\}\right).$$

Απόδειξη.

Αρχικά θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{G}_i\right\}\right)$$

και παρατηρούμε ότι για την

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) \subset \mathcal{F}$$

έχουμε ότι αν πάρουμε $i_0 \in I$ *και* $A \in \mathcal{G}_{i_0}$ *τότε έχουμε ότι*

$$f_{i_0}^{-1}(A) = f_{i_0}^{-1}(A) \cap \left(\bigcap_{i\neq i_0} f_i^{-1}(Y_i)\right) \in \left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{G}_i\right\} \subset \mathcal{F}.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\{f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{G}_i\} \subset \mathcal{F}$$

και άρα απο την ***Πρόταση 2.2*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\{f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{G}_i\}) = \sigma((f_i)_{i\in I}) \subset \mathcal{F}.$$

Για τον αντίστροφο τώρα εγκλεισμό παρατηρούμε ότι αν πάρουμε

$$B = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i), A_i \in G_i$$

τότε αφού κάθε $B_i = f_i^{-1}(A_i) \in \sigma((f_i)_{i\in I})$ *και κάθε σ-άλεγβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές έπεται ότι και* $B \in \sigma((f_i)_{i\in I})$ *και άρα*

$$\left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{G}_i\right\} \subset \sigma((f_i)_{i\in I}).$$

Τελικά απο ***Πρόταση 2.2*** *έχουμε ότι*

$$\sigma\left(\left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{G}_i\right\}\right) = \mathcal{F} \subset \sigma((f_i)_{i\in I})$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$,$(Y_i, \mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων,*$f_i : X \to Y_i, i \in I$ *μια οικογένεια συνάρτησεων και* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ *μια ακολουθία υποσυνόλων του* Y *με* $\sigma(\mathcal{A}_i) = \mathcal{G}_i$ *για κάθε* $i \in I$*.Τότε*

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma(\{f_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \mathcal{A}_i\}.$$

Επιπλέον αν το I *είναι αριθμήσιμο ή το* I *είναι πεπερασμένο και για κάθε* $i \in I$ *υπάρχει* *ακολουθία* (A_n^i) *απο την* $\mathcal{A}_i$ *όπου* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i = Y_i$ *τότε*

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma\left(\left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_i\right\}\right).$$

Ορισμός .

Έστω $(X_i)_{i\in I}$ *οικογένεια συνόλων.Τότε για κάθε* $i_0 \in I$ *ορίζουμε την* i_0*-προβολή να είναι η συνάρτηση*

$$\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}, \pi_{i_0}(x) = x_{i_0}.$$

Ορισμός .

Έστω $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *οικογένεια μετρήσιμων χώρων.Ορίζουμε την* ***σ-άλγεβρα γινόμενο*** *στο* $\prod_{i\in I} X_i$ *ως*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma((\pi_i)_{i\in I}) = \sigma(\{\pi_i(A) : i \in I, A \in \mathcal{F}_i\}).$$

Πόρισμα.

Έστω $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *οικογένεια μετρήσιμων χώρων και* $\mathcal{A}_i \subset X_i$ *με* $\sigma(\mathcal{A}_i) = F_i$ *για κάθε* $i \in I$. *Τότε*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\{\pi_i(A) : i \in I, A \in \mathcal{A}_i\})$$

Πόρισμα.

Έστω $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *οικογένεια μετρήσιμων χώρων με το* I *να είναι αριθμήσιμο ή πεπερασμένο και για κάθε* $i \in I$ *υπάρχει ακολουθία συνόλων* (A_n^i) *απο την* $\mathcal{F}_i$ *με* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i = X_i$. *Τότε*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{F}_i = \sigma\left(\left\{\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{F}_i\right\}\right)$$

Πρόταση .

Έστω $n \in \mathbb{N}$ *και έστω και* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *μετρικοί χώροι.Εφοδιάζουμε τον* $\prod_{i=1}^{n} X_i$ *με μετρική γινόμενο.*

Τότε

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) \subset \mathcal{B}(X).$$

Αν επιπλέον κάθε X_i *είναι διαχωρίσιμος τότε*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}(X).$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$\mathcal{T} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathcal{T}_i \right\}$$

όπου κάθε $\mathcal{T}_i$ *είναι η τοπολογία στον χώρο* X_i *τότε έχουμε ότι*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) = \sigma(\mathcal{T}).$$

Αφού όμως

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(X)$$

όπου $\mathcal{T}(X)$ *είναι η επαγόμενη τοπολογία στον χώρο γινόμενο,έπεται απο την* ***Πρόταση 2.1*** *ότι*

$$\sigma(\mathcal{T}) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) \subset \sigma(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{B}(X).$$

Αν τώρα για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *έχουμε ότι ο* X_i *είναι διαχωρίσιμος,τότε υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό* $D_i \subset X_i$.

Επίσης αν θεωρήσουμε το

$$D = \prod_{i=1}^{n} D_i$$

τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτό είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \{B(x, q) : x \in D, q \in \mathbb{Q}\}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(X)$$

γιατί αν αρχικά πάρουμε $x \in D$ *και* $q \in \mathbb{Q}$ *και θεωρήσουμε και την ανοιχτή μπάλα* $B(x, q)$ *τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι ανοιχτό σύνολο και άρα* $B(x, q) \in \mathcal{B}(X)$.
Επομένως

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(X)$$

και τελικά απο την ***Πρόταση 2.2*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(X).$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αφήνεται ως άσκηση.

Τώρα παρατηρούμε ότι για κάθε $x = (x_i)_{i=1}^n \in D$ *και κάθε* $q \in \mathbb{Q}$ *υπάρχουν* $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ *τέτοια ώστε*

$$\prod_{i=1}^{n} B_{X_i}(x_i, q_i) \subset B(x, q)$$

$$\implies \mathcal{H} \subset \left\{ \prod_{i=1}^{n} B_{X_i}(x_i, q_i) : x_i \in D_i, q_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Τελικά απο την ***Πρόταση 2.1*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(X) \subset \sigma\left(\left\{ \prod_{i=1}^{n} B_{X_i}(x_i, q_i) : x_i \in D_i, q_i \in \mathbb{Q} \right\} \right) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ορισμός .

Έστω X *μη κενό σύνολο και* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *μια οικογένεια υποσυνόλων του* X. *Η οικογένεια* $\mathcal{E}$ *καλείται* ***elementary*** *αν ικανοποιεί τις εξής τρείς ιδιότητες:*

- $\emptyset \in \mathcal{E}$.
- *Για κάθε* $A, B \in \mathcal{E} : A \cap B \in \mathcal{E}$.
- *Για κάθε* $A \in \mathcal{E}$ *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *και* $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$ *ξένα ανά δύο σύνολα τέτοια ώστε*
$$A^c = \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Πρόταση .

Έστω X *μη κενό σύνολο και* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *μια elementary οικογένεια.*
Ορίζουμε

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} A_i : k \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathcal{E} \text{ ξένα ανά δύο} \right\}.$$

Τότε η $\mathcal{A}$ *είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη.

Παρατηρούμε αρχικά ότι για $k = 1$ *και* $A_1 = \emptyset$ *αφού* $A_1 \in \mathcal{E}$ *απο τον ορισμό της elementary οικογένειας, έπεται ότι*

$$A_1 = \emptyset \in \mathcal{A}.$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *τότε* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ *και έπειτα επαγωγικά αποδεικνύεται εύκολα ότι η* $\mathcal{A}$ *είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομες.*
Έστω επομένως $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχουν* $k, m \in \mathbb{N}$ *αλλά και* $\{A_i^1\}_{i=1}^{k}, \{A_j^2\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{E}$ *πεπερασμένες οικογένειες ξένες ανα δύο συνόλων τέτοιες ώστε*

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^1 \quad \text{και} \quad A_2 = \bigcup_{j=1}^{m} A_j^2.$$

Τότε έχουμε ότι

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^1 \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j^2 \right) = \bigcup_{(i,j) \in [k] \times [m]} (A_i^1 \cap A_j^2).$$

Όμως για κάθε $(i,j) \in [k] \times [m]$ *ισχύει ότι*

$$A_i^1 \cap A_j^2 \in \mathcal{E}$$

γιατί η $\mathcal{E}$ *είναι elementary και επίσης η οικογένεια των* $\{A_i^1 \cap A_j^2\}_{(i,j) \in [k] \times [m]}$ *αποτελείται απο ξένα ανά δύο σύνολα. Έπεται έτσι η κλειστότητα της* $\mathcal{A}$ *για πεπερασμένες τομές.*

Τέλος θα αποδείξουμε ότι την κλειστότητα της $\mathcal{A}$ *ως προς τα συμπληρώματα.*

Έστω $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ *όπου* $\{A_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathcal{E}$ *ξένα ανά δύο, τότε παρατηρούμε ότι αφού η* $\mathcal{E}$ *είναι elementary και για κάθε* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *έχουμε ότι* $A_i \in \mathcal{E}$ *έπεται ότι για κάθε* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *υπάρχει* $l_i \in \mathbb{N}$ *και* $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{l_i}^i \in \mathcal{E}$ *ξένα ανά δύο τέτοια ώστε*

$$A_i^c = \bigcup_{m=1}^{l_i} A_k^i.$$

Έχουμε ότι

$$A^c = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{l_i} A_m^i = \bigcup_{(m_1, m_2, \ldots, m_k) \in \prod_{i=1}^{k} [l_i]} \bigcap_{i=1}^{k} A_{m_i}^i \in \mathcal{A}$$

Αφού η $\mathcal{E}$ *είναι elementary και άρα κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και η οικογένεια*

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{k} A_{m_i}^i : (m_1, m_2, \ldots, m_k) \in \prod_{i=1}^{k} [l_i] \right\}$$

αποτελείται απο ξένα ανά δύο σύνολα.

1.2 Μέτρα

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$. Το μ καλείται ***μέτρο*** *(ή σ-προσθετικό μέτρο) αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Αν $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία απο την $\mathcal{F}$ με ξένα ανα δύο σύνολα,τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

και τότε η τριάδα $(X, \mathcal{F}, \mu)$ καλείται ***χώρος μέτρου****.*

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$.Το μ καλείται ***πεπερασμένα προσθετικό μέτρο*** *αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Αν $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία απο την $\mathcal{F}$ με ξένα ανα δύο σύνολα,τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και τότε :

1. *Αν $\mu(X) < \infty$,τότε το μ καλείται* ***πεπερασμένο*** *μέτρο.*
2. *Αν $\mu(X) = 1$,τότε το μ καλείται* ***μέτρο πιθανότητας****.*
3. *Αν υπάρχει ακολουθία $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,τότε το μ καλείται* ***σ-πεπερασμένο****.*

4. *Αν για κάθε* $E \in \mathcal{F}$ *με* $\mu(E) = \infty$ *υπάρχει* $F \in \mathcal{F}$ *με* $F \subset E$ *και* $0 < \mu(F) < \infty$*,τότε το* μ *καλείται* ***ημιπεπερασμένο***.

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Για καθε* $A, B \subset \mathcal{F}$ *με* $A \subset B$ *και* $\mu(B) < \infty$ *ισχύει*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

2. ***Μονοτονία:***

   Για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ *με* $A \subset B$ *ισχύει* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. ***Υποαθροιστικότητα:***

   Για κάθε $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *ισχύει ότι*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

4. *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

5. *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων και* $\mu(A_1) < \infty$ *τότε*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη.

1. *Παρατηρήστε οτι* $B = (B \setminus A) \cup A$ *και χρησιμοποιώντας την πεπερασμένη προσθετικότητα του μέτρου έχουμε ότι*

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A).$$

Αφού όμως $\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$ *μπορούμε να αφαιρέσουμε κατά μέλη απο την παραπάνω σχέση το* $\mu(A)$ *και έχουμε το ζητούμενο.*

2. *Αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε* $A, B \in \mathcal{F}$ *με* $A \subset B$ *τότε αφού* $B = (B \setminus A) \cup A$ *και τα* $A \setminus B, B$ *είναι ξένα έπεται απο την πεπερασμένη προσθετικότητα του μέτρου ότι*

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$$

3. *Έστω* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *μια ακολουθία συνόλων και τότε ορίζουμε την ακολουθία* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *που ορίζεται ώς εξής*

$$B_1 = A_1 \quad \textit{και} \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad , n \in \mathbb{N}$$

Τότε έχουμε ότι η $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *και τα* B_n *είναι ξένα ανά δύο.*

Είναι άμεσο ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

και άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την μονοτονία του μέτρου και το γεγονός ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $B_n \subset A_n$.

4. *Έστω ότι* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία απο την* $\mathcal{F}$ *και ορίζουμε την ακολουθία* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *ως εξής*

$$B_1 = A_1 \quad \textit{και} \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \quad n \in \mathbb{N}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και παρατηρούμε ότι η* $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο* *συνόλων απο την $\mathcal{F}$ με*

$$A_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και άρα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

5. *Έστω ότι $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του X και τότε ορίζουμε την ακολουθία συνόλων $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου ορίζεται ώς εξής*

$$B_1 = A_1 \quad \text{και} \quad B_n = A_1 \setminus A_n \quad n \in \mathbb{N}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τότε έχουμε ότι η $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{F}$ με

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Επομένως απο την ιδιότητα 3. που αποδείξαμε παραπάνω έχουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

αφού $\mu(A_1) < \infty$ και άρα

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $E \in \mathcal{F}$ και $\mu(E) = 0$ τότε το E καλείται ***null-set*** *και ορίζουμε*

$$Null := \{E \in \mathcal{F} : \mu(E) = 0\}.$$

το σύνολο όλων αυτών.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου.Το* μ *καλείται* ***πλήρες*** *αν για κάθε* $A \in Null$ *και* $E \subset A$ *ισχύει ότι* $E \in \mathcal{F}$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου. Μια πρόταση* $P(x)$ *θα λέμε ότι ισχύει* ***μ-σχεδόν παντού*** *αν υπάρχει* $E \in Null$ *τέτοιο ώστε*

$$\{x \in X : \eta\ P(x)\ \delta\epsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota\} \subset E.$$

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου.Ορίζουμε*

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{A \cup F : A \in \mathcal{F} \ \ \text{και υπάρχει} \ \ E \in Null \ \ \text{με} \ \ F \subset E\}.$$

Τότε το $\widetilde{\mathcal{F}}$ *είναι σ-άλγεβρα με* $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ *και επιπλέον υπάρχει μοναδικό* $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$ *πλήρες μέτρο που είναι επέκταση του* μ*,δηλαδή* $\widetilde{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η $\widetilde{\mathcal{F}}$ *είναι σ-άλγεβρα:*

- *Αρχικά παρατηρούμε ότι* $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ *όπου* $\emptyset \in \mathcal{F}$ *και* $\emptyset \subset \emptyset \in Null$ *και άρα* $\emptyset \in \widetilde{\mathcal{F}}$.
- *Έστω* $B \in \widetilde{\mathcal{F}}$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχει* $A \in \mathcal{F}$ *αλλά και* $E \in Null$ *όπου* $A \cap F = \emptyset, F \subset E$ *τέτοια ώστε*

$$B = A \cup F.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$B^c = (E \cup A)^c \cap (E \setminus F) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

όπου $(E \cup A)^c \in \mathcal{F}$ *αφού η* $\mathcal{F}$ *είναι σ-άλγεβρα και* $E, A \in \mathcal{F}$, *επίσης* $E \setminus F \subset E \in Null$.

- *Έστω* $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{F}}^{\mathbb{N}}$ *άρα για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχουν* $A_n \in \mathcal{F}$, $F_n \subset X$ *και* $E_n \in Null$ *με* $F_n \subset E_n$ *τέτοια ώστε*

$$B_n = A_n \cup F_n.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

γιατί

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in Null$$

αφού απο την υποπροσθετικότητα του μέτρου έχουμε ότι

$$0 \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0 \implies \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = 0$$

και άρα τελικά η $\widetilde{\mathcal{F}}$ *είναι σ-άλγεβρα.*

Μάλιστα ισχύει ότι $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ *γιατί αν πάρουμε* $A \in \mathcal{F}$ *τότε έχουμε ότι* $A = A \cup \emptyset$ *όπου* $\emptyset \subseteq \emptyset \in Null$ *και άρα* $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Ορίζουμε τώρα $\widetilde{\mu} : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0, +\infty]$ *με*

$$\widetilde{\mu}(A \cup F) := \mu(A) \quad A \cup F \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

και αρχικά θα αποδείξουμε ότι το μ *είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.*

Έστω επομένως $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ *και* $F_1, F_2 \subset X$ *για τα οποία υπάρχουν* $E_1, E_2 \in Null$ *με* $F_1 \subset E_1, F_2 \subset E_2$ *και*

$$A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$A_1 \triangle A_2 \subset F_1 \cup F_2 \subset E_1 \cup E_2 \in Null$$

γιατί αν πάρουμε $x \in A_1 \triangle A_2$ *τότε έχουμε ότι είτε* $x \in A_1 \setminus A_2$ *είτε* $x \in A_2 \setminus A_2$ *και αν* $x \in A_1 \setminus A_2$ *τότε έχουμε ότι*

$$x \in A_1 \subset A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2 \implies x \in A_2 \cup F_2.$$

Όμως $x \notin A_2$ *και άρα* $x \in F_2 \subset F_1 \cup F_2$.

Όμοια αποδεικνύεται αν $x \in A_2 \setminus A_1$.

Τελικά έχουμε ότι

$$\mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) = 0 \implies \mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_2 \setminus A_1) = 0.$$

Τότε όμως αφού

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

και αφού και τα τρία σύνολα στην παραπάνω ανάλυση είναι ξένα ανά δύο, έπεται ότι

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

απο όπου και έπεται ότι

$$\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

γιατί για $i = 1, 2$

$$\mu(A_i) \leq \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$$

και

$$\mu(A_i) \geq \mu(A_1 \cap A_2)$$

λόγω της μονοτονίας του μέτρου μ.

Τελικά

$$\widetilde{\mu}(A_1 \cup F_1) = \mu(A_1) = \mu(A_2) = \widetilde{\mu}(A_2 \cup F_2)$$

και άρα το $\widetilde{\mu}$ είναι καλά ορισμένο.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το $\widetilde{\mu}$ είναι μέτρο:

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \widetilde{\mathcal{F}}$ έχουμε ότι $\widetilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ αφού το μ είναι μέτρο.

Έστω τώρα ότι $(B_n) \subset \widetilde{\mathcal{F}}^{\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων, τότε έχουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες συνόλων $(A_n) \subset \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ και $(F_n) \subset \mathcal{P}(X)$ τέτοιες ώστε να υπάρχει ακολουθία $(E_n) \subset Null$ με $F_n \subset E_n$ και έχουμε οτι $B_n = A_n \cup F_n$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε όμως αφού τα B_n είναι ξένα άνα δύο και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $A_n \subset B_n$ έπεται ότι και τα A_n είναι ξένα ανά δύο και άρα

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(A_n \cup F_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(B_n)$$

και άρα το $\widetilde{\mu}$ είναι μέτρο.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\widetilde{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Πράγματι αν πάρουμε $A \in \mathcal{F}$ τότε έχουμε ότι

$$A = A \cup \emptyset$$

όπου $\emptyset \subseteq \emptyset \in Null$ *και άρα*

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(A).$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το $\widetilde{\mu}$ *είναι πλήρες μέτρο:*

Έστω $B \in \widetilde{\mathcal{F}}$ *με* $\widetilde{\mu}(B) = 0$ *και έστω και* $C \subset B$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχουν* $A \in \mathcal{F}$ *και* $F \subset X$ *αλλά και* $E \in \ Null$ *με* $F \subset E$ *και*

$$B = A \cup F.$$

Τέλος θα αποδείξουμε την μοναδικότητα του μέτρου $\widetilde{\mu}$*:*

Έστω επομένως ότι μ' *είναι ένα άλλο πλήρες μέτρο στην* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *που είναι επέκταση του* μ *και παρατηρούμε ότι αν πάρουμε* $A \in \mathcal{F}, F \subset X$ *για τα οποία υπάρχει* $E \in \ Null$ *όπου* $F \subset E$ *και* $A \cap E = \emptyset$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mu'(A \cup F) = \mu'(A) + \mu'(F)$$

απο την πεπερασμένη προσθετικότητα του μέτρου μ'*.*

Αφού όμως

$$\mu'(F) \leq \mu'(E) = \mu(E) = 0$$

έπεται τελικά ότι

$$\mu'(A \cup F) = \mu'(A) = \mu(A) = \widetilde{\mu}(A \cup F)$$

γιατί $A \in \mathcal{F}$ *και το* μ' *είναι επέκταση του* μ*.*

Επομένως το $\widetilde{\mu}$ *είναι το μοναδικό πλήρες μέτρο στην* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *που επεκτείνει το* μ*.*

1.3 Εξωτερικά μέτρα

Ορισμός .

Έστω X *μη κενό σύνολο και* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$*. Το* μ^* *καλείται* ***εξωτερικό μέτρο*** *αν ικανοποιεί τις εξής τρείς ιδιότητες:*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$

- *Για κάθε* $A, B \subset X$ *με* $A \subseteq B$ *ισχύει* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

- *Για κάθε ακολουθία* $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ *ισχύει ότι*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Πρόταση .

Έστω X *μη κενό σύνολο και* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *με* $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ *και* $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *με* $\rho(\emptyset) = 0$.
Ορίζουμε $\mu_\rho^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *όπου*

$$\mu_\rho^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : (E_n) \subset \mathcal{E}^{\mathbb{N}},\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}, \quad A \subseteq X.$$

Τότε το μ_ρ^* *είναι εξωτερικό μέτρο.*

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $A = \emptyset$ *τότε έχουμε ότι* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *όπου* $A_n = \emptyset \in \mathcal{E}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και άρα*

$$0 \leq \mu_\rho^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) = 0$$

αφού $\rho(\emptyset) = 0$ *απο υπόθεση. Τελικά* $\mu_\rho^*(\emptyset) = \mu_\rho^*(A) = 0$ *και άρα έχουμε την πρώτη ιδιότητα του εξωτερικού μέτρου.*
Έστω τώρα $A, B \subset X$ *με* $A \subset B$ *και τότε αν πάρουμε μια κάλυψη* $(E_n) \subset \mathcal{E}$ *του* B*,τότε αυτή είναι και κάλυψη του* A *και άρα*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : (E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}\,, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\} \subset \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) : (E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}\,, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}.$$

Τελικά απο τις βασικές ιδιότητες του infimum ενός συνόλου έχουμε ότι $\mu_\rho^*(A) \leq \mu_\rho^*(B)$.

Τώρα έστω (A_n) *μια ακολουθία υποσυνόλων του* X *και θα αποδείξουμε την υποπροσθετικότητα της* μ_ρ^*.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_\rho^*(A_n) < \infty$$

αν είναι άπειρο δεν έχουμε κάτι να δείξουμε, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι* $\mu_\rho^*(A_n) < \infty$. *Έστω* $\varepsilon > 0$ *τότε παρατηρούμε απο τον* ϵ*-χαρακτηρισμό του infimum έχουμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει κάλυψη* $(E_j^n)_j \subset \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ *του* A_n *με*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j^n) < \mu_\rho^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^n$$

και άρα έχουμε ότι

$$\mu_\rho^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_\rho^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\rho^*(A_n) + \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ *ήταν τυχόν έπεται ότι αφήνοντας* $\varepsilon \to 0^+$ *έχουμε ότι*

$$\mu_\rho^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\rho^*(A_n)$$

και άρα το μ_ρ^* *είναι εξωτερικό μέτρο.*

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο και* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *εξωτερικό μέτρο.Ένα* $A \subset X$ *θα καλείται* μ^**-μετρήσιμο αν για κάθε* $E \subset X$ *ισχύει*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Συμβολίζουμε το σύνολο των μ^**-μετρήσιμων συνόλων με* $\mathcal{F}_{\mu^*}$*,δηλαδή*

$$\mathcal{F}_{\mu^*} = \{A \subset X : A \ \ \mu^*\text{-μετρήσιμο}\}.$$

Παρατηρήσεις .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο και* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *εξωτερικό μέτρο.*

1. *Για να αποδείξουμε ότι ένα* A *είναι* μ^**-μετρήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε* $E \subset X$ *ισχύει*

   $$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \tag{2}$$

   γιατί αν πάρουμε τυχόντα $A, E \subset X$ *ισχύει ότι* $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ *και άρα απο την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού* μ^* *έπεται ότι*

   $$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

   γιατί τότε απο τις δύο ανισότητες θα έχουμε το ζητούμενο.
   Μάλιστα αρκεί να αποδείξουμε την (2) για τα $E \subset X$ *με* $\mu(E) < \infty$*,γιατί αν* $\mu(E) = \infty$ *η (2) ισχυέι κατά τετριμμένο τρόπο.*

2. *Αν* $A \subset X$ *με* $\mu^*(A) = 0$*,τοτε* $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *: γιατί αν πάρουμε τυχόν* $E \subset X$ *τότε απο την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι*

   $$\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0 \implies \mu^*(E \cap A) = 0$$

και άρα

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Επομένως απο την παρατήρηση παραπάνω έχουμε ότι $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.

Θεώρημα (Θεώρημα Καραθεοδωρή)**.**
Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο και* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *εξωτερικό μέτρο. Τότε*

1. *Η* $\mathcal{F}_{\mu^*}$ *είναι σ-άλγεβρα.*

2. *Η* $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}} : \mathcal{F}_{\mu^*} \to [0, +\infty]$ *είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη.

1. ***Βήμα 1ο:*** *Θα αποδείξουμε ότι η* $\mathcal{F}_{\mu^*}$ *είναι άλγεβρα:*

   Αρχικά παρατηρούμε ότι $\emptyset \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *απο την* ***Παρατήρηση*** *,αφού* $\mu^*(\emptyset) = 0$.

   Τώρα παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ *είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα γιατί:*

   αν πάρουμε $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $E \subset X$ *έχουμε ότι*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap (A^c)^c)$$

   και άρα $A^c \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.

   Η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ *είναι επίσης κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις γιατί:*

   αν πάρουμε $A, B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *τότε για κάθε* $E \subset X$ *έχουμε ότι*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)$$

$$+\mu(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$$

$$\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$$

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

   και άρα τελικά $A \cup B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.

   Επαγωγικά τώρα δείχνουμε ότι αν πάρουμε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *τότε* $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.

   Τελικά η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ *είναι άλγεβρα υποσυνόλων του* X.

   Βήμα 2ο: *Θα αποδείξουμε ότι το* $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$ *είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο:*

   Παρατηρούμε αρχικά ότι απο τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι $\mu^{\emptyset} = 0$.

   Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *ξένα και τότε παρατηρούμε ότι αφού* $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *για* $E = A \cup B \subset X$ *έχουμε ότι*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

   και άρα το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$ *είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.*

Βήμα 3ο: *Θα αποδείξουμε ότι αν* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *ξένα ανά δύο τότε για κάθε* $E \subset X$

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k). \tag{3}$$

Πράγματι θα το αποδείξουμε για $A, B \subset X$ *ξένα και έπειτα επαγωγικά αποδεικνύεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά 2 συνόλων απο την* $\mathcal{F}_{\mu^*}$.

Έστω επομένως $A, B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *ξένα και τότε για κάθε* $E \subset X$ *έχουμε ότι*

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A^c)$$

$$= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B).$$

Βήμα 4ο: *Θα αποδείξουμε ότι η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ξένες ενώσεις:*

Έστω επομένως $(A_n)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$ ξένα ανά δύο και τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $E \subset X$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι απο την (3) προκύπτει ότι

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)^c\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)^c\right)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right)$$

και άρα παίρνοντας όριο $n \to \infty$ έχουμε τελικά ότι για κάθε $E \subset X$

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right). \tag{4}$$

Όμως απο την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου μ^* έχουμε ότι για κάθε $E \subset X$ ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) \geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right)$$

και άρα τελικά απο την (4) έχουμε ότι

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right).$$

*Τελικά απο την **Παρατήρηση** έχουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.*

*Τώρα αφού η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ αποδείξαμε ότι είναι μια άλγεβρα που είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις,έπεται απο **Πρόταση** ότι η $\mathcal{F}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα.*

Βήμα 5ο: *Θα αποδείξουμε ότι το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$ είναι μέτρο:*

Πράγματι παρατηρούμε ότι αν πάρουμε ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$ *ξένων ανά δύο συνόλων τότε για* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *στην (4) έχουμε ότι*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

$$\Longrightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

λόγω και της αριθμήσιμης υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου.

Βήμα 6ο: *Θα αποδείξούμε την πληρότητα του* $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$:

Πράγματι παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *με* $\mu^*(A) = 0$ *και* $B \subset A$ *τότε απο την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι* $\mu^*(B) = 0$ *και άρα απο την* ***Παρατήρηση*** *έχουμε ότι* $B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$.

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *μια άλγεβρα υποσυνόλων του* X *και* $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. *Το* μ_0 *καλείται* ***προμέτρο*** *αν ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες:*

- $\mu_0(\emptyset) = \emptyset$
- *Για κάθε* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων με* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*
$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Παρατηρήσεις .

Κάθε προμέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο και άρα ικανοποιει και την μονοτονία.

Ορισμός .

Έστω $X \neq \emptyset$ *σύνολο,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *μια άλγεβρα υποσυνόλων του* X *και* $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *ένα προμέτρο.*

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *με*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : (E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}, A \subset X$$

και αυτή είναι εξωτερικό μέτρο και ονομάζεται ***επαγόμενο εξωτερικό μέτρο*** *απο το* μ_0.

Πρόταση .

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X, $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα προμέτρο και μ^* το επαγόμενο απο το μ_0 εξωετρικό μέτρο.
Τότε

1. $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$
2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$.

Απόδειξη.

1. Έστω αρχικά $A \in \mathcal{A}$ και τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου

   $$A_1 = A \text{ και } A_n = \emptyset$$

   για κάθε $n \geq 2$ τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια κάλυψη του A απο στοιχεία της $\mathcal{A}$ και άρα

   $$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(A)$$

   αφού $\mu_0(\emptyset) = 0$.
   Για την αντίστροφη τώρα ανισότητα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\mu_0(A)$ είναι κάτω φράγμα για το σύνολο

   $$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : (E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

   δηλαδή για κάθε $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ κάλυψη του A απο σύνολα της $\mathcal{A}$ ισχύει ότι

   $$\mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

   Έστω επομένως $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ κάλυψη του A απο σύνολα της $\mathcal{A}$ και τότε αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ που ορίζεται ως εξής

   $$B_1 = A_1 \text{ και } B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

για κάθε $n \geq 2$ *τότε παρατηρούμε ότι τα* B_n *είναι ξένα ανά δύο και*

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1} A_n$$

και άρα $A \subset B$.

Επομένως έχουμε τώρα ότι

$$\mu_0(A) = \mu_0\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = \mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap B_n)$$

γιατί $A \cap B_n \in \mathcal{A}$ *είναι ξένα ανά δύο σύνολα και*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) = A \in \mathcal{A}.$$

Τώρα όμως αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$A \cap B_n \subset A \cap B_n \subset A_n$$

έπεται απο την μονοτονία του προμέτρου ότι

$$\mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

2. *Έστω τώρα* $A \in \mathcal{A}$.*Θα αποδείξουμε ότι* $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ *ή ισοδύναμα ότι για κάθε* $E \subset X$ *με* $\mu^*(E) < \infty$ *ισχύει ότι*

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Έστω $E \subset X$ *με* $\mu^*(E) < \infty$ *και έστω και* $\epsilon > 0$.*Τότε απο τον* ϵ-*χαρακτηρισμό του* inf *έχουμε ότι υπάρχει* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *κάλυψη του* E *απο την* $\mathcal{A}$ *με*

$$\mu^*(E) + \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n). \tag{5}$$

Όμως απο την πεπερασμένη προσθετικότητα του προμέτρου μ_0 *έπεται ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_0(E_n) = \mu_0(E_n \cap A) + \mu_0(E_n \cap A^c)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \end{aligned}$$

αφού

$$E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \ \textit{και} \ E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A^c \cap E_n). \tag{6}$$

Τελικά απο τις (5),(6) έχουμε ότι

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

και αφού το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο.*

Θεώρημα (Θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή).

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X, $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα προμέτρο ,μ^* το επαγόμενο απο το μ_0 εξωτερικό μέτρο και έστω και $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.

Τότε

1. *Το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}$ είναι μέτρο που επεκτείνει το μ_0.*

2. *Αν $\nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ είναι ενα άλλο μέτρο όπου $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ τότε για κάθε $E \in \mathcal{F}$ με $\mu(E) < \infty$ έχουμε ότι $\nu(E) = \mu(E)$. Επιπλέον αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε $\nu = \mu$.*

1.4 Borel μέτρα στην ευθεία

Παρατηρήσεις .

1. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.Τότε θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με*

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}.$$

Τότε παρατηρούμε αρχικά ότι η F είναι αύξουσα :

Πράγματι αν πάρουμ $x > y$ στο $\mathbb{R}$ τότε αφού $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ έπεται απο την μονοτονία του μέτρου μ

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$$

και άρα η F είναι αύξουσα.

Επίσης παρατηρούμε ότι η F είναι δεξιά συνεχής :

γιατί αν πάρουμε $x \in \mathbb{R}$ και φθίνουσα ακολουθία $x_n \to x$ στο $\mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$$

και αφού και η ακολουθία συνόλων $A_n = (-\infty, x_n]$ είναι φθίνουσα έπεται απο την *συνέχεια του μέτρου*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]\right) = \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

Τέλος παρατηρούμε ότι για κάθε $a < b$ *στο* $\mathbb{R}$

$$F(b) - F(a) = \mu((a, b])$$

γιατί

$$\mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a]) = \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \mu((a, b])$$

αφού το $(-\infty, a] \subset (-\infty, b]$ *και το* μ *είναι πεπερασμένο.*

2. *Ορίζουμε την οικογένεια*

$$\mathcal{H} = \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι elenentary οικογένεια με

$$\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Θέτουμε τώρα

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n : I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{H} \text{ ξένα ανά δύο}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

και απο ***Πρόταση*** *έχουμε ότι αυτή είναι άλγεβρα με*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τώρα* $\rho_F : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ *με*

$$\rho_F(\emptyset) = 0$$

$$\rho_F((a,b]) = F(b) - F(a), a < b \in \mathbb{R}$$

$$\rho_F((a,+\infty)) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a), a \in \mathbb{R}$$

$$\rho_F((-\infty,b]) = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a), b \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση .

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση.Με τον συμβολισμό της παραπάνω ***παρατήρησης*** *ορίζουμε επίσης $\mu_F : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ τέτοια ώστε*

$$\mu_F\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \rho_F(I_k)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{H}$ ξένα ανά δύο.

Τότε το μ_F είναι καλά ορισμένο προμέτρο.

Απόδειξη (παραλείπεται)**.**

Θεώρημα.

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση.Τότε υπάρχει μοναδικό* μ_F *μέτρο Borel στον* $\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $a < b \in \mathbb{R}$ *να ισχύει ότι*

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Επίσης αν $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι μια άλλη αύξουσα και δεξιά συνεχήσ συνάρτηση με* $\mu_G = \mu_F$ *τότε η* $F - G$ *είναι σταθερή συνάρτηση.*
Αντίστροφα αν μ *είναι ένα μέτρο Borel στον* $\mathbb{R}$ *που είναι πεπερασμένο πάνω απο φραγμένα υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *και ορίσουμε* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((-x,0]), & x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

τότε η F *είναι αύξουσα,δεξιά συνεχής και* $\mu_F = \mu$.

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η απο προηγούμενη ***Πρόταση*** *έχουμε ότι η* F *παράγει προμέτρο* μ_0 *στην* σ*-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *για το οποίο ισχύει ότι για κάθε* $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu_0((a,b]) = F(b) - F(a)$$

και άρα απο το ***θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή*** *έχουμε ότι αυτό επάγει ένα μέτρο* μ_F *στην* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Αν τώρα $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι μια άλλη αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση με* $\mu_F = \mu_G$*,τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $a < b \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \mu_G((a,b]) \tag{8}$$

και άρα αν πάρουμε $x \in \mathbb{R}$ *τότε παρατηρούμε ότι απο την (8) έπεται ότι*

- *Αν* $x > 0$ *τότε θέτουμε* $a = 0, b = x$ *και έχουμε ότι*

$$F(x) - F(0) = G(x) - G(0) \implies (F - G)(x) = F(0) - G(0) = c \in \mathbb{R}.$$

- *Αν* $x < 0$ *τότε θέτουμε* $a = x, b = 0$ *και έχουμε ότι*

$$F(0) - F(x) = G(0) - G(x) \implies (F - G)(x) = F(0) - G(0) = c \in \mathbb{R}$$

και άρα τελικά σε κάθε περίπτωση

$$(F - G)(x) = c \in \mathbb{R}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *αφού αυτό επιλέχθηκε τυχόν.*

Αντίστροφα τώρα έστω ότι μ *είναι ένα ο μέτρο Borel στον* $\mathbb{R}$ *και ορίσουμε* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *όπως στην εκφώνηση του θεωρήματος.*

Τότε η F *είναι προφανώς αύξουσα και δεξιά συνεχής (δες* ***Παρατήρηση****) και άρα απο το πρώτο σκέλος της απόδειξης έπεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel στον* $\mathbb{R}$*,έστω* μ_F *με*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

- *Αν* $a > 0$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b] \setminus (0, a]) = \mu((0, b]) - \mu((0, a]) = F(b) - F(a) = \mu_F((a, b]).$$

- *Αν* $a < 0$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b] \cup (a, 0]) = \mu((0, b]) + \mu((a, 0]) = F(b) - F(a) = \mu_F((a, b])$$

- *Αν* $a = 0$ *τότε*

$$\mu((0,b]) = F(b) = F(b) - F(0) = \mu_F((0,b])$$

και άρα τελικά σε κάθε περίπτωση

$$\mu((a,b]) = \mu_F((a,b])$$

για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$ *και λόγω της μοναδικότητας έπεται τελικά ότι* $\mu = \mu_F$.

Παρατηρήσεις .

1. *Παρόμοιο αποτέλεσμα με το παραπάνω μπορούμε να έχουμε όταν η* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι αριστερά συνεχής και τότε κάνουμε χρήση διαστημάτων της μορφής* $[a,b)$,*όπου* $a < b \in \mathbb{R}$.

2. *Για κάθε* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *αύξουσα και δεξιά συνεχής είδαμε ότι επάγεται ένα μέτρο* $Borel$,μ_F *και άρα και η πλήρωσή του* $\overline{\mu_F}$.

   Την πλήρωσή του $\overline{\mu_F}$ *την καλούμε* ***Lebesgue-Stieljes μέτρο*** *που σχετίζεται με την* F *και καταχραστικά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $\overline{\mu_F} = \mu_F$.

   Παρατηρήστε τώρα ότι για το $\mu_F = \mu$ *ισχύει ότι αν* $\mathcal{F}_\mu$ *είναι το πεδίο ορισμού του* μ,*τότε για κάθε* $E \in \mathcal{F}_\mu$

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k]\right\}$$

Λήμμα.

Έστω μ *ένα* $Lebesgue - Stieljes$ *μέτρο και έστω* $\mathcal{F}_\mu$ *το πεδίο ορισμού του.*

Τότε ισχύει ότι για κάθε $E \in \mathcal{F}_\mu$

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu((a_k, b_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)\right\}$$

Απόδειξη.

Αρχικά έστω $E \in \mathcal{F}_\mu$ *και θέτουμε*

$$R_E = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\mu(E) = \inf R_E$ *και άρα αρχικά θα αποδείξουμε ότι*

$$\mu(E) \leq \inf R_E$$

και για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\mu(E)$ *είναι κάτω φράγμα για το σύνολο* R_E.

Έστω επομένως $((a_k, b_k))_{k=1}^{\infty}$ *ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων με*

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ *αν θεωρήσουμε τα διαστήματα*

$$I_{j,k} = \left(a_j - \frac{b_j - a_j}{k}, b_j + \frac{b_j - a_j}{k+1} \right]$$

τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$(a_k, b_k) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{j,k}$$

και τα $I_{j,k}$ *είναι ξένα ανά δύο και επομένως*

$$\mu((a_k, b_k)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{j,k})$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τότε όμως έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{j,k}) \geq \mu\left(\bigcup_{j,k} I_{j,k}\right) \geq \mu(E)$$

αφού $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) = \bigcup_{j,k} I_{j,k}$ *και άρα έχουμε τελικά την πρώτη ανισότητα.*

Για την αντίστροφη τώρα ανισότητα

$$\inf R_E \leq \mu(E)$$

παρατηρούμε ότι αν $\mu(E) = \infty$ *τότε είναι άμεση.*

Αν τώρα $\mu(E) < \infty$ *τότε έχουμε ότι αν πάρουμε τυχόν* $\epsilon > 0$ *τότε απο τον* ϵ*-χαρακτηρισμό του* inf *έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία ημιανοιχτών διαστημάτων* $((a_k, b_k])_{k=1}^{\infty}$ *που καλύπτουν το* E *και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) < \mu(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Τότε όμως αν F *είναι η συνάρτηση απο την οποία επάγεται το μέτρο* $Lebesgue - Stiljes$ μ*,έχουμε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) \leq \mu(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αφού η F *είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής έπεται ότι για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $b'_k > b_k$ *με*

$$F(b'_k) - F(b_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

και τότε έχουμε ότι $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b'_k)$ *και*

$$\mu(E) + \epsilon > \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) \geq \sum_{k=1}^{\infty}(F(b'_k) - F(a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b'_k)) \geq \inf R_E$$

και άρα έχουμε και την αντίστροφη ανισότητα.

Θεώρημα.

Έστω μ *ένα* $Lebesgue - Stieljes$ *μέτρο και έστω* $\mathcal{F}_\mu$ *το πεδίο ορισμού του.*

Τότε ισχύει ότι για κάθε $E \in \mathcal{F}_\mu$

1. $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U : \textit{ανοιχτό}\}$
2. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \textit{συμπαγές}\}$.

Απόδειξη.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε* U *ανοιχτό με* $E \subset U$ *απο την μονοτονία του μέτρου* μ*,έχουμε ότι*
$$\mu(E) \leq \mu(U)$$
και άρα παίρνοντας αφού το $\mu(E)$ *είναι κάτω φράγμα του συνόλου των* U *με την παραπάνω ιδιότητα έχουμε ότι*
$$\mu(E) \leq \inf\{\mu(U) : E \subset U, U : \textit{ανοιχτό}\}$$
και έχουμε έτσι την πρώτη ανισότητα.
Για την αντίστροφη τώρα ανισότητα παρατηρούμε ότι αν $\mu(E) = \infty$ *τότε ισχύει τετριμμένα.*
Επομένως έστω ότι $\mu(E) < \infty$ *και έστω και* $\epsilon > 0$*.Τότε απο τον* ϵ*-χαρακτηρισμό του* $\inf$ *έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων* $((a_k, b_k))_{k=1}^{\infty}$ *τέτοια ώστε* $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ *και*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k)) < \mu(E) + \epsilon.$$
Τότε όμως $U = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ *είναι ανοιχτό ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων και απο την υποπροσθετικότητα του μέτρου* μ*,έχουμε ότι*
$$\mu(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k.b_k)).$$
Τελικά συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο ανισότητες έχουμε ότι
$$\inf\{\mu(U) : E \subset U, U : \textit{ανοιχτό}\} \leq \mu(U) < \mu(E) + \epsilon$$

και αφού το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν αφήνοντας* $\epsilon \to 0^+$ *έχουμε τελικά ότι*

$$\inf\{\mu(U) : E \subset U, U : \text{ανοιχτό}\} \leq \mu(E)$$

και άρα έχουμε και την αντίστροφη ανισότητα.

2. *Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε* K *συμπαγές με* $K \subset E$ *απο την μονοτονία του μέτρου* μ*,έχουμε ότι*

$$\mu(K) \leq \mu(E)$$

και άρα αφού το $\mu(E)$ *είναι άνω φράγμα για το σύνολο των* K *με τισ παραπάνω ιδιότητες έπεται ότι*

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \text{συμπαγές}\} \leq \mu(E).$$

Για την αντίστροφη τώρα ανισότητα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- *Αν το* E *είναι φραγμένο σύνολο τότε έχουμε ότι το* $\overline{E}$ *είναι συμπαγές και επομένως* $\mu(\overline{E}) < \infty$.

  Έστω τώρα $\epsilon > 0$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχει* U *ανοιχτό με* $\overline{E} \setminus E \subset U$ *και*

$$\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon$$

  και άρα

$$\mu(U \setminus (\overline{E} \setminus E)) \leq \epsilon \tag{9}$$

  Θέτουμε τώρα $K = \overline{E} \setminus U = \overline{E} \cap U^c$ *το οποίο παρατηρούμε ότι είναι συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$*(είναι κλειστό ως πεπερασμένη τομή κλειστών και φραγμένο αφου περιέχεται στο φραγμένο* $\overline{E}$*).*

  Επίσης παρατηρούμε ότι

$$K = \overline{E} \setminus U = \overline{E} \cap U^c \subset \overline{E} \cap (\overline{E} \setminus E)^c = \overline{E} \cap (\overline{E} \cap E^c)^c$$

$$= \overline{E} \cap (\overline{E}^c \cup E) = \overline{E} \cap E = E$$

και άρα $K \subset E$.

Τέλος εύκολα παρατηρούμε ότι

$$E \setminus K \subset U \setminus (\overline{E} \setminus E)$$

και άρα απο την (9) και την μονοτονία του μέτρου μ *έχουμε τελικά ότι*

$$\implies \mu(E \setminus K) \leq \epsilon.$$

Τελικά

$$\mu(E) = \mu(E \setminus K) + \mu(K) \leq \epsilon + \sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \text{συμπαγές}\}$$

και αφού το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν αφήνοντας* $\epsilon \to 0^+$ *έχουμε ότι*

$$\mu(E) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \text{συμπαγές}\}$$

και έτσι παίρνουμε και την αντίστροφη ανισότητα.

- *Αν το* E *δεν είναι φραγμένο σύνολο,τότε θεωρούμε την ακολουθία συνόλων* $E_n = E \cap [-n, n], n \in \mathbb{N}$ *και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αύξουσα ακολουθία,κάθε* E_n *είναι φραγμένο σύνολο και*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

Τότε με διαδοχικές εφαρμογές του απο τον ϵ*-χαρακτηρισμού του* inf *έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *με* $K_n \subset E_n$ *και*

$$\mu(E_n) - \frac{1}{n} < \mu(K_n)$$

και άρα παίρνοντας όριο $\limsup$, *απο την συνέχεια του μέτρου* μ,*έχουμε τελικά ότι*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(E) \leq \limsup \mu(K_n). \tag{10}$$

Όμως αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $K_n \subset E_n \subset E$ *και το* K_n *είναι συμπαγές,έπεται ότι*

$$\mu(K_n) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \text{συμπαγές}\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και άρα πάλι παίρνοντας* $\limsup$ *και συνδυάζοντας με την (9)*

$$\mu(E) \leq \limsup \mu(K_n) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset E, K : \text{συμπαγές}\}$$

και έχουμε πάλι την αντίστροφη ανισότητα.

Λήμμα.

Έστω μ *ένα* $Lebesgue - Stieljes$ *μέτρο και έστω* $\mathcal{F}_\mu$ *το πεδίο ορισμού του.*

Τότε για κάθε $E \in \mathcal{F}_\mu$ *και κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχουν* $F \subset E \subset U$ *όπου το* U *είναι ανοιχτο,το* F *είναι κλειστό και ισχύει ότι*

$$\mu(F \setminus E), \mu(E \setminus U) \leq \epsilon.$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε αρχικά $E \in \mathcal{F}_\mu$ *και* $\epsilon > 0$.

Τότε αν θεωρήσουμε την ακολουθία $E_n = E \cap (n, n+1], n \in \mathbb{Z}$ *τότε παρατηρούμε ότι αύτη είναι μια ακολουθία φραγμένων υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *και*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n = E.$$

Βρίσκουμε τώρα απο τον ϵ*-χαρακτηρισμό του sup,ακολουθία* $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *συμπαγών με* $K_n \subset E_n$ *για*

$$\mu(E_n) - \frac{\epsilon}{2^{|n|+1}} < \mu(K_n) \implies \mu(E_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{2^{|n|+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Επίσης απο τον ϵ*-χαρακτηρισμό του* inf *βρίσκουμε και ακολουθία* $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ανοιχτών με* $E_n \subset U_n$ *και*

$$\mu(U_n) < \mu(E_n) + \frac{\epsilon}{2^{|n|+1}} \implies \mu(U_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^{|n|+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Τότε εάν ορίσω $U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ *και* $F = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n$ *τότε το* U *είναι ανοιχτό ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών.το* F *είναι κλειστό ως αριθμήσιμη τομή συμπαγών και άρα κλειστών και επίσης* $U \subset E \subset F$.

Τέλος παρατηρούμε ότι

$$\mu(E \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (E_n \setminus K_n)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E_n \setminus K_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\epsilon}{2^{|n|+1}} = \epsilon$$

και όμοια αποδεικνύουμε και ότι $\mu(U \setminus E) \leq \epsilon$.

Θεώρημα.

Έστω μ *ένα* $Lebesgue - Stieljes$ *μέτρο και έστω* $\mathcal{F}_\mu$ *το πεδίο ορισμού του.*

Αν $E \subset \mathbb{R}$,*τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. $E \in \mathcal{F}_\mu$

2. *Υπάρχει* $U \subset \mathbb{R}$ *ένα* G_δ *σύνολο και* $N \in \mathcal{F}_\mu$ *με* $\mu(N) = 0$ *τέτοια ώστε*

$$E = U \setminus N.$$

3. *Υπάρχει* $F \subset \mathbb{R}$ *ένα* F_σ *σύνολο και* $N \in \mathcal{F}_\mu$ *με* $\mu(N) = 0$ *τέτοια ώστε*

$$E = F \cup N.$$

Απόδειξη.

1. $1. \to 2.$:*Παρατηρούμε ότι αν* $E \in \mathcal{F}_\mu$ *τότε έχουμε απο το προηγούμενο* ***Λήμμα*** *ότι υπάρχει ακολουθία ανοιχτών* $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ *με* $E \subset U_n$ *και*

$$\mu(U_n \setminus E) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν ορίσουμε τώρα $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *τότε αυτό είναι ένα* G_δ *σύνολο με* $E \subset U$ *και απο την μονοτονία του μέτρου* μ *έχουμε ότι*

$$0 \leq \mu(U \setminus E) \leq \mu(U_n \setminus E) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \implies \mu(U \setminus E) = 0.$$

Άρα αν θέσουμε τώρα $N = U \setminus E \in \mathcal{F}_\mu$ *τότε αφού*

$$E = U \setminus (U \setminus E) = U \setminus N$$

έχουμε το ζητούμενο.

2. $3 \to 1$:*Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει* $F \subset \mathbb{R}$ *ένα* F_σ *σύνολο και* $N \in \mathcal{F}_\mu$ *με* $\mu(N) = 0$ *τέτοια ώστε*

$$E = F \cup N$$

τότε αφού $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_\mu$ *και* $N \in \mathcal{F}_\mu$ *έπεται ότι και* $E = F \cup N \in \mathcal{F}_\mu$ *αφού η* $\mathcal{F}_\mu$ *είναι και σ-άλγεβρα.*

3. $2 \to 3$:*Άμεσο.*

Πρόταση .

Έστω μ *ένα* $Lebesgue - Stieljes$ *μέτρο,*$\mathcal{F}_\mu$ *το πεδίο ορισμού του και έστω και* $E \in \mathcal{F}_\mu$ *με* $\mu(E) < \infty$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ *υπάρχει* A *που είναι πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων ,τέτοιο ώστε*

$$\mu(E \triangle A) < \epsilon.$$

Απόδειξη.

Έστω $\epsilon > 0$.*Τότε παρατηρούμε ότι αφού* $\mu(E) < \infty$ *έπεται ότι απο τον* ϵ-*χαρακτηρισμό του* $\inf$ *έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία* $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ *ανοιχτών διαστημάτων με* $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ *και*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \mu(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Τότε όμως έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

γιατί οι ουρές συγκλίνουσας σειράς συγκλίνουν στο 0.

Άρα έχουμε ότι αν θέσουμε $A = \bigcup_{n=1}^{k} I_n$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mu(A \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus E\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) - \mu(E) < \frac{\epsilon}{2}$$

και

$$\mu(E \setminus A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

αφού $E \setminus A \subset \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n$.

Τελικά

$$\mu(A \triangle E) = \mu(A \setminus E) + \mu(E \setminus A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Ορισμός .

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $F(x) = x$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής και άρα ορίζει ένα μετρό Borel στον $\mathbb{R}$,έστω $\lambda = \mu_F$.
*Τότε το λ καλείται **μέτρο Lebesgue** και συμβολίζουμε με $\mathcal{L} = \mathcal{F}_\lambda$ το σύνολο των λ-μετρήσιμων συνόλων.*

Θεώρημα.

Αν $E \in \mathcal{L}$ και $s \in \mathbb{R}$ τότε $sE, s+E \in \mathcal{L}$ όπου

$$sE = \{sx : x \in E\} \subset \mathbb{R}$$

και

$$s + E = \{s + x : x \in E\} \subset \mathbb{R}.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\lambda(s + E) = \lambda(E)$$

και

$$\lambda(sE) = |s|\lambda(E).$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι για $s = 0$ έχουμε ότι $s+E = E \in \mathcal{L}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.
Υποθέτουμε επομένως ότι $s \neq 0$ και τότε θέτουμε $\mathcal{F} = \{-s + A : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
Τότε έχουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα γιατί

- *$\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ γιατί αν πάρουμε $x \in \mathbb{R}$ τότε*

  $$x = -s + (x + s)$$

  όπου $x + s \in \mathbb{R}$ και άρα

  $$\mathbb{R} = -s + \mathbb{R}.$$

- *Επίσης παρατηρούμε ότι αν* $C_n = -s + A_n$ *όπου* $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,*είναι μια ακολουθία στοιχείων απο την* $\mathcal{F}$,*τότε*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = -s + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

όπου $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *αφού αυτή είναι σ-άλγεβρα ,και άρα* $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}$.

- *Έστω* $D = -s + A$ *όπου* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *τότε έχουμε ότι αν* $A = (a, b)$ *όπου* $a < b \in \mathbb{R}$ *τότε έχουμε ότι*

$$D = -s + (a, b) = (a - s, b - s) \implies D^c = (-\infty, a - s] \cup [b - s, +\infty)$$

$$= (-s + (-\infty, a]) \cup (-s + [b, +\infty))$$

$$= -s + ((-\infty, a] \cup [b, +\infty))$$

$$= -s + I_D$$

όπου $I_D = (-\infty, a - s] \cup [b - s, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και άρα* $D^c \in \mathcal{F}$.

Αν τώρα $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *τότε το* A *γράφεται σαν ένωση ανοιχτών διαστημάτων* $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ *και άρα*

$$D = -s + \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-s + I_n) \implies D^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-s + I_n)^c \in \mathcal{F}$$

αφού $(s + I_n)^c \in \mathcal{F}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *απο όσα αποδείξαμε και η* $\mathcal{F}$ *είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές.*

Επίσης παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $I = (a, b)$ *ανοιχτό διάστημα ,τότε*

$$I = -s + (a + s, b + s) = -s + I_s$$

όπου $I_s \in \mathbb{R}$ *αφού είναι ανοιχτό σύνολο ως ανοιχτό διάστημα. Τελικά* $I \in \mathcal{F}$ *για κάθε ανοιχτό διάστημα* I.

Έστω τώρα $\mathcal{A} = \{(a,b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ *και τότε απο τα παραπάνω έχουμε ότι η* $\mathcal{F}$ *είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια* $\mathcal{A}$.

Επομένως απο ***Λήμμα*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}.$$

Άρα για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *έχουμε ότι υπάρχει* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ώστε* $B = -s + A$ *και άρα*

$$A = s + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Δηλαδή για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *έχουμε ότι* $s + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ορίζουμε* $\lambda_s(B) = \lambda(s + B)$ *και παρατηρούμε ότι αυτό είναι μέτρο γιατί:*

- $\lambda_s(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0.$
- *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Borel συνόλων,τότε παρατηρούμε ότι παρατηρούμε ότι και τα* $C_n = s + A_n$ *είναι ξένα ανά δύο γιατί αν πάρουμε* $m \neq n \in \mathbb{N}$ *και* $x \in C_n \cap C_m$ *τότε έχουμε υπάρχουν* $z_1 \in A_n, z_2 \in A_m$ *ώστε*

$$x = s + z_1 = s + z_2 \implies z_2 = z_1 \in A_n$$

και άρα $z_2 \in A_n \cap A_m$ *που είναι άτοπο γιατί αυτά είναι ξένα ανά δύο απο τον τρόπο επιλογής τους.*

Αφού τώρα το λ *είναι μέτρο έχουμε τελικά ότι*

$$\lambda_s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda\left(s + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(s + A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_s(A_n).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

$$\lambda_s((a,b]) = \lambda(s + (a,b]) = \lambda((a+s, b+s]) = F(b+s) - F(a+s)$$

$$= b + s - (a+s)$$

$$= b - a$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \lambda((a,b])$$

και άρα απο ***Θεώρημα*** *έχουμε ότι για κάθε* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lambda_s(B) = \lambda(B).$$

Έστω τώρα $E \in \mathcal{L}$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχουν* $A, N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και* $F \subset N$ *σύνολο με* $\lambda(N) = 0$,*για τα οποία ισχύει ότι*

$$A \cap N = \emptyset, E = A \cup F.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$s + E = (s + A) \cup (s + F)$$

και αφού $s + A, s + N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$s + F \subset s + N$ *και*

$$\lambda_s(N) = \lambda(s + N) = \lambda(N) = 0$$

έπεται ότι $s + E \in \mathcal{L}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lambda(s + E) = \lambda(s + A) = \lambda(A) = \lambda(E)$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Για το ότι $sE \in \mathcal{L}$ *παρατηρούμε ότι για* $s \neq 0$ *θεωρούμε την οικογένεια*

$$\mathcal{H} = \left\{ \frac{1}{s} A : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

και αποδεικνύουμε ότι αυτή είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια των ανοιχτών διαστημάτων $\mathcal{A}$*.(Άσκηση)*

Τότε απο ***Λήμμα*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}$$

και άρα για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *έχουμε ότι υπάρχει* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *τέτοιο ώστε* $B = \frac{1}{s}A$ *και άρα*

$$A = sB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Επομένως για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *έχουμε ότι* $sB \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ορίζουμε τώρα για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *το* $\lambda^s(B) = \lambda(sB)$ *και αποδεικνύουμε με όμοιο τρόπο με παραπάνω ότι το* λ^s *είναι ένα μέτρο Borel.*

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$

- *Αν* $s > 0$ *τότε*

$$\lambda^s((a,b]) = \lambda(s(a,b]) = \lambda((sa,sb]) = F(sb) - F(sa) = sb - sa$$

$$= s(b-a)$$

$$= s(F(b) - F(a))$$

$$= s\lambda((a,b])$$

$$= |s|\lambda((a,b]).$$

- *Αν* $s < 0$ *τότε*

$$\lambda^s((a,b]) = \lambda(s(a,b]) = \lambda((sb,sa]) = F(sa) - F(sb) = sa - sb$$

$$= s(a-b)$$

$$= -s(b-a)$$

$$= -s(F(b) - F(a))$$

$$= -s\lambda((a,b])$$

$$= |s|\lambda((a,b])$$

Γνωρίζουμε όμως ότι και η συνάρτηση $|s|\lambda$ *είναι μέτρο αφού το* λ *είναι μέτρο(πολλαπλασιασμός μέτρου με σταθερό αριθμό είναι μέτρο) και αφού αποδείξαμε ότι για κάθε* $a < b \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\lambda^s((a,b]) = |s|\lambda((a,b])$$

έπεται απο ***Θεώρημα*** *ότι για κάθε* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *ισχύει ότι*

$$\lambda^s(B) = |s|\lambda(B).$$

Έστω τώρα $E \in \mathcal{L}$ *και τότε έχουμε ότι υπάρχουν* $A, N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και* $F \subset N$ *σύνολο με* $\lambda(N) = 0,$*για τα οποία ισχύει ότι*

$$A \cap N = \emptyset, E = A \cup F.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$sE = sA \cup sF$$

και αφού $sA, sN \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,$sF \subset sN$ *και*

$$\lambda(sN) = \lambda^s(N) = |s|\lambda(N) = 0$$

έπεται ότι $sE \in \mathcal{L}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι

$$\lambda(sE) = \lambda(sA) = |s|\lambda(A) = |s|\lambda(E)$$

και έχουμε έτσι και το δεύτερο ζητούμενο.

2 Ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός .

Έστω $(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{G})$ *μετρήσιμοι χώροι και έστω και* $f:X\to Y$ *μια συνάρτηση μεταξύ αυτών. Τότε η* f *καλείται* $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-***μετρήσιμη*** *ανν για κάθε* $E\in\mathcal{G}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}(E)\in\mathcal{F}$.

Πρόταση .

Έστω $(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{G}),(Z,\mathcal{W})$ *μετρήσιμοι χώροι και έστω και* $f:X\to Y$ *και* $g:Y\to Z$ *δύο μετρήσιμες συνάρτήσεις μεταξύ αυτών. Τότε και η συνθεσή τους* $g\circ f:X\to Z$ *είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη.

Έστω $C\in\mathcal{W}$ *και τότε αφού η* g *είναι μετρήσιμη έχουμε ότι* $g^{-1}(C)\in\mathcal{G}$. *Αφού τώρα όμως και η* f *είναι μετρήσιμη έπεται τελικά ότι*

$$f^{-1}(g^{-1}(C))=(g\circ f)^{-1}(C)\in\mathcal{F}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση .

Έστω $(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{G})$ *μετρήσιμοι χώροι,*$\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$ *με* $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{G}$ *και* $f:X\to Y$ *μια συνάρτηση.Τότε η* f *είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε* $A\in\mathcal{A}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν η f *είναι μετρήσιμη τότε η* f *αντιστρέφει* $\mathcal{G}$-*μετρήσιμα σύνολα σε* $\mathcal{F}$-*μετρήσιμα και άρα αφού* $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$ *αντιστρέφει και στοιχεία της οικογένειας* $\mathcal{A}$ *σε* $\mathcal{F}$-*μετρήσιμα.*

Αντίστροφα,θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

και παρατηρουμε ότι αυτή είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{A}$ *και άρα απο γνωστό* ***Λήμμα*** *έχουμε ότι*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G} \subset \mathcal{H}.$$

Τότε όμως για κάθε $A \in \mathcal{G}$ *έχουμε ότι* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ *και άρα η* f *είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση .

Έστω X, Y *τοπολογικοί χώροι και έστω και* $f : X \to Y$ *μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ αυτών.Τότε αυτή είναι* $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$*-μετρήσιμη.*

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $A \in \mathcal{B}(Y)$ *τότε αφού η* f *είναι συνεχής έπεται ότι αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά και άρα* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ *και άρα έχουμε το ζητούμενο.*

Ορισμός .

1. *Έστω* $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to \mathbb{C}$*(ή* $\mathbb{R}$*). Τότε η* f *θα καλείται μετρήσιμη αν είναι* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$*-μετρήσιμη(ή αντίστοιχα* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-μετρήσιμη).*

2. *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *θα καλείται Borel-μετρήσιμη αν είναι* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-μετρήσιμη.*

3. *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *θα καλείται Lebesgue-μετρήσιμη αν είναι* $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-μετρήσιμη.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και έστω και* $f : X \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση.*

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. *Η* f *είναι μετρήσιμη.*

2. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$*.*

3. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$*.*

4. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F}$*.*

5. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι* $f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}$*.*

Απόδειξη.

1. 1. $\to$ 2.*:Παρατηρούμε ότι για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *το* $(-\infty, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και αφού η* f *είναι μετρήσιμη έπεται ότι*

$$f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}.$$

2. 2. $\to$ 3.*:Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *και τότε παρατηρούμε ότι*

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right]$$

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right]\right) \in \mathcal{F}$$

γιατί απο υπόθεση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{F}$ και η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα.

3. 3. $\to$ 4.:*Έστω $a \in \mathbb{R}$ και τότε*

$$(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \implies f^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}((-\infty, a]^c) = (f^{-1}((-\infty, a]))^c \in \mathcal{F}$$

αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα και $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

4. 4. $\to$ 5.:*Έστω $a \in \mathbb{R}$ και παρατηρείστε ότι*

$$[a, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}, \infty\right)$$

και χρησιμοποιείστε το ίδιο επιχείρημα με το 2.

5. 5. $\to$ 1.:*Παρατηρούμε ότι απο* ***Πρόταση*** *γνωρίζουμε ότι*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}).$$

Άρα αν θέσουμε $\mathcal{A} = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ έχουμε απο υπόθεση ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$,και τελικά απο προηγούμενη ***Πρόταση*** *έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι,$E \in \mathcal{F}$ και έστω και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση μεταξύ αυτών.

Θα λέμε ότι η f είναι ***μετρήσιμη πάνω στο E*** *αν η $f|_E : E \to Y$ είναι $(\mathcal{F}_E, \mathcal{G})$-μετρήσιμη,όπου*

$$\mathcal{F}_E = \{E \cap A : A \in \mathcal{F}\}$$

είναι σ-άλγεβρα όπως έχουμε δεί.

Ορισμός .

Έστω $(X,\mathcal{F})$ *και* $(Y_i,\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *μετρήσιμοι χώροι και* $f_i : X \to Y_i, i \in I$ *οικογένεια συναρτήσεων.*

Με $\sigma((f_i)_{i\in I})$ *θα συμβολίζουμε την μικρότερη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις* f_i *μετρήσιμες και γνωρίζουμε ότι*

$$\sigma((f_i)_{i\in I}) = \sigma(\{f_i^{-1}(E) : E \in \mathcal{G}_i, i \in I\}).$$

Πρόταση .

Έστω $(X,\mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος,*$(Y_i,\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ *οικογένεια μετρήσιμων χώρων και θεωρούμε και τον μετρήσιμο χώρο* $\left(Y = \prod_{i\in I} Y_i, \mathcal{G} = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{G}_i\right)$*,όπου*

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{G}_i = \sigma((\pi_i)_{i\in I}).$$

Τότε μια $f : X \to Y$ *είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν η*

$$f_i = \pi_i \circ f : X \to Y_i$$

είναι μετρήσιμη για κάθε $i \in I$*.*

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν η f *είναι μετρήσιμη τότε αφού και κάθε προβολή* π_i *είναι μετρήσιμη έπεται ότι και η σύνθεση τους* $f_i = \pi_i \circ f$ *είναι μετρήσιμη για κάθε* $i \in I$*,ως σύνθεση μετρήσιμων συναρτήσεων.*

Αντίστροφα αν κάθε f_i *είναι μετρήσιμη τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $E_i \in \mathcal{G}_i$ *έχουμε ότι*

$$f_i^{-1}(E_i) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(E_i)) \in \mathcal{F}$$

και άρα απο προηγούμενη ***Πρόταση*** *έχουμε το ζητούμενο.*

Ορισμός .

Ορίζουμε $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *και*

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \sigma(\{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\})$$

Πόρισμα.

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to \mathbb{C}$ *συνάρτηση.Τότε η* f *είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι συναρτήσεις* Re_f, Im_f *είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη.

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Τότε οι συναρτήσεις $f + g, fg : X \to \mathbb{C}$ *είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη.

Έστω $F : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *και* $F(x) = (f(x), g(x))$ *και παρατηρούμε ότι αυτή είναι μετρήσιμη γιατί*

$$\pi_1 \circ F = f$$

και

$$\pi_2 \circ F = g$$

είναι μετρήσιμες απο υπόθεση.

Αν θεωρήσουμε τώρα τις συναρτήσεις

$$F_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$F_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, F_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

τότε αυτές είναι συνεχείς και άρα και μετρήσιμες απο προηγούμενη ***Πρόταση***.

Τέλος παρατηρούμε ότι

$$F_1 \circ F = f + g$$

και

$$F_2 \circ F = fg$$

και άρα οι $f + g, fg$ *είναι μετρήσιμες ως συνθέσεις μετρήσιμων συναρτήσεων.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος,*$c \in \mathbb{R}$ *και* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Τότε οι συναρτήσεις $cf, -f, f^2, f + g, f - g, fg : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη.

Έστω $a \in \mathbb{R}$ *και τότε παρατηρούμε ότι αν* $c = 0$ *τότε η* cf *είναι η μηδενική συνάρτηση,υπο την σύμβαση ότι* $0 \cdot (+\infty) = 0$ *και* $0 \cdot (-\infty) = 0$,*η οποία είναι συνεχής ως σταθερή και άρα και μετρήσιμη.*

Αν τώρα $c \neq 0$ *τότε*

$$(cf)^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X : cf(x) > a\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{a}{c}\right\}$$

$$= f^{-1}\left(\left(\frac{a}{c}, +\infty\right]\right) \in \mathcal{F}$$

αφού η f *είναι μετρήσιμη και έτσι έπεται ότι η* cf *είναι μετρήσιμη.*

Για $c = -1$ *έχουμε απο το παραπάνω ότι η* $cf = -f$ *είναι μετρήσιμη.*

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $a > 0$

$$(f^2)^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X : f^2(x) > a\} = \{x \in X : |f(x)| > \sqrt{a}\}$$

$$= \{x \in X : f(x) > a\} \cup \{x \in X : f(x) < -a\}$$

$$= f^{-1}((a,+\infty]) \cup f^{-1}([-\infty,-a)) \in \mathcal{F}$$

αφού η f είναι μετρήσιμη.

Απο την άλλη αν $a \leq 0$ τότε

$$(f^2)^{-1}([a,+\infty]) = \{x \in X : f^2(x) \geq a\} = \{x \in X : f^2(x) \geq 0\} = X \in \mathcal{F}.$$

και άρα απο τα παραπάνω έπεται ότι η f^2 είναι μετρήσιμη.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν πάρουμε $a \in \mathbb{R}$

$$(f+g)^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in X : f(x)+g(x) > a\}$$

$$= \left\{x \in X : f(x) > \frac{a}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : g(x) > \frac{a}{2}\right\}$$

$$= f^{-1}\left(\left(\frac{a}{2},+\infty\right]\right) \cup g^{-1}\left(\left(\frac{a}{2},+\infty\right]\right) \in \mathcal{F}$$

αφού οι f, g είναι μετρήσιμες και έτσι έχουμε ότι η $f+g$ είναι μετρήσιμη.

Αφού τώρα οι $f, -g$ είναι μετρήσιμες έπεται απο το παραπάνω ότι και το άθροισμα τους $f-g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Τώρα παρατηρούμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$$

και αφού οι $f+g, f-g$ ως αθροίσματα μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμες έπεται ότι και οι $(f+g)^2, (f-g)^2$ είναι μετρήσιμες αφού όπως αποδείξαμε η h^2 είναι μετρήσιμη αν h είναι μετρήσιμη.

Χρησιμοποιώντας πάλι το ότι άθροισμα μετρήσιμων είναι μετρήσιμη συνάρτηση έπεται ότι και η $(f+g)^2-(f-g)^2$ είναι μετρήσιμη.

Τέλος για $c = \frac{1}{4}$ έχουμε ότι και η

$$c((f+g)^2-(f-g)^2) = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$$

είναι μετρήσιμη και άρα η fg είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε οι συναρτήσεις $g_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, 2, 3, 4$ με

1. $$g_1(x) = \inf_n f_n(x)$$

2. $$g_2(x) = \sup_n f_n(x)$$

3. $$g_3(x) = \liminf_n f_n(x)$$

4. $$g_4(x) = \limsup_n f_n(x)$$

είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε* $a \in \mathbb{R}$ *τότε έχουμε ότι*

$$g_1^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R} : \inf_n f_n(x) > a\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > a\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,+\infty]) \in \mathcal{F}$$

   αφού $f_n^{-1}((a,+\infty]) \in \mathcal{F}$ *γιατί κάθε* f_n *είναι μετρήσιμη.Τελικά έχουμε ότι η* g_1 *είναι μετρήσιμη.*

2. *Επίσης παρατηρούμε ότι αν* $a \in \mathbb{R}$

$$g_2^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in \mathbb{R} : g_2(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R} : \sup_n f_n(x) > a\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > a\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a,+\infty])$$

   αφού $f_n^{-1}((a,+\infty]) \in \mathcal{F}$ *γιατί κάθε* f_n *είναι μετρήσιμη.Τελικά έχουμε ότι και η* g_2 *είναι μετρήσιμη.*

3. *Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε* $x \in X$ *ισχύει ότι*

$$g_3(x) = \liminf_n f_n(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x) = \sup_n h_n(x)$$

   όπου $h_n(x) = \inf_{k \geq n} f_n(x)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

   Τότε απο τα προηγούμενα έχουμε ότι αφού κάθε h_n *είναι μετρήσιμη και το όριο* $\sup_n h_n(x)$ *είναι μετρήσιμη συνάρτηση και άρα η* $\liminf_n f_n$ *είναι μετρήσιμη.*

4. *Για την* g_4 *εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο όπως για την* g_3,*χρησιμοποιώντας το γεγονός*

ότι για κάθε $x \in X$

$$g_4(x) = \limsup_n f_n(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x)$$

Πόρισμα.

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος.*

1. *Αν* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι μετρήσιμες,τότε οι* $\max\{f,g\}$ *και* $\min\{f,g\}$ *είναι μετρήσιμες συναρτήσεις γιατί έχουμε ότι αν πάρουμε* $a \in \mathbb{R}$ *τότε*

$$\min\{f,g\}^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in X : \min\{f,g\}(x) > a\}$$

$$= \{x \in X : f(x) > a\} \cap \{x \in X : g(x) > a\}$$

$$= f^{-1}((a,+\infty]) \cap g^{-1}((a,+\infty]) \in \mathcal{F}$$

αφού οι f, g *είναι μετρήσιμες.*

Επίσης έχουμε ότι αφού οι f, g *είναι μετρήσιμες*

$$\max\{f,g\}^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in X : \max\{f,g\}(x) > a\}$$

$$= \{x \in X : f(x) > a\} \cup \{x \in X : g(x) > a\}$$

$$= f^{-1}((a,+\infty]) \cup g^{-1}((a,+\infty]) \in \mathcal{F}$$

2. *Αν* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει το* $f(x) = \lim_n f_n(x)$*,τότε η* f *είναι μετρήσιμη γιατί τότε*

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$$

και η $\limsup_n f_n$ *δείξαμε ότι είναι μετρήσιμη συνάρτηση παραπάνω.*

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος.*

1. *Αν* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι μια συνάρτηση τότε θεωρούμε τις συναρτήσεις* $f^+, f^- : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *όπου*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, x \in X$$

και

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}, x \in X.$$

Τότε έχουμε ότι οι f^+, f^- *είναι μη αρνητικές συναρτήσεις και ισχύουν οι σχέσεις*

$$f = f^+ - f^-$$

και

$$|f| = f^+ + f^-.$$

2. *Γνωρίζουμε ότι για κάθε* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ισχύει ότι* $sgn(z) = \frac{z}{|z|}$ *και άρα αν* $f : X \to \mathbb{C}$ *τότε έχουμε ότι*

$$f = sgn(f)|f|$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

1. *Αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι f^+, f^- είναι μετρήσιμες.*

2. *Αν $f : X \to \mathbb{C}$ τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $|f|, sgn(f)$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Απόδειξη.

1. *Άμεση εφαρμογή των προηγούμενων.*

2. *Αν οι $sgn(f), |f|$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις τότε αφού το γινόμενο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση έπεται ότι και η f θα είναι μετρήσιμη.*
   Αντίστροφα,αν η f είναι μετρήσιμη τότε παρατηρούμε ότι η συνάρτηση
   $sgn : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και άρα και μετρήσιμη.
   Επίσης αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ όπου

   $$h(z) = |z|, z \in \mathbb{C}$$

   τότε και αυτή είναι συνεχής και άρα μετρήσιμη και άρα τελικά οι $|f| = h \circ f$ και $sgn \circ f$ είναι μετρήσιμες ώς συνθέσεις μετρήσιμων.

Ορισμός .

*Αν $E \subset X$ τότε ορίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση του E** ως $\mathcal{X}_E : X \to \mathbb{R}$ με*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases} \tag{11}$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και $E \subset X$. Τότε η $\mathcal{X}_E$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν η $\mathcal{X}_E$ είναι μετρήσιμη τότε αφού $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,γιατί είναι πεπρασμένο σύνολο και άρα κλειστό,έχουμε ότι

$$\mathcal{X}_E^{-1}(\{1\}) = E \in \mathcal{F}.$$

Αντίστροφα,έστω ότι $E\mathcal{F}$ και τότε παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $a \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι

- *Αν* $a < 0$

$$\mathcal{X}_E^{-1}((a, +\infty)) = X \in \mathcal{F}.$$

- *Αν* $a \geq 1$ *τότε*

$$\mathcal{X}_E^{-1}((a, +\infty)) = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

- $0 \leq a < 1$ *τότε*

$$\mathcal{X}_E^{-1}((a, +\infty)) = E \in \mathcal{F}.$$

Τελικά σε κάθε περίπτωση

$$\mathcal{X}_E^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F}$$

και άρα απο ***Πρόταση*** *έχουμε ότι η $\mathcal{X}_E$ είναι μετρήσιμη.*

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

- *Κάθε $f : X \to \mathbb{C}$ καλείται* ***απλή*** *ανν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ώστε*

$$f = \sum_{k=1}^{n} z_k \mathcal{X}_{E_k}$$

όπου $E_k \in \mathcal{F}$ για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ισοδύναμα η f καλείται απλή ανν είναι μετρήσιμη και έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών,γιατί αν η f είναι απλή τότε έχουμε *ότι υπάρχουν* $n \in \mathbb{N}$ *και* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *ώστε*

$$f = \sum_{k=1}^{n} z_k \mathcal{X}_{E_k}$$

όπου $E_k \in \mathcal{F}$ *για κάθε* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Τότε όμως έχουμε ότι

$$f(\mathbb{C}) \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$$

και άρα το $f(\mathbb{C})$ *είναι πεπερασμένο.*

Επίσης αφού $E_k \in \mathcal{F}$ *για κάθε* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *έπεται απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *ότι* $\mathcal{X}_{E_k}$ *είναι μετρήσιμη για κάθε* k *και άρα και* $z_k \mathcal{X}_{E_k}$ *είναι μετρήσιμη για κάθε* k. *Αφού όμως και άθροισμα μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση,έπεται ότι η* f *είναι και μετρήσιμη.*

Η αντίστροφη κατεύθυνση δίνεται απο το παρακάτω που θα διατυπώσουμε τώρα.

- *Έστω μια απλή συνάρτηση* $f : X \to \mathbb{C}$.

  Τότε αν $|f(\mathbb{C})| = n$ *και* $f(\mathbb{C}) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ *έχουμε ότι η αναπάράσταση*

$$f = \sum_{k=1}^{n} z_k \mathcal{X}_{E_k}$$

  όπου $E_k = f^{-1}(\{z_k\})$ *για κάθε* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*καλείται* ***κανονική αναπαράσταση της*** f.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος και έστω και* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *δύο απλές συναρτήσεις.Τότε και οι συναρτήσεις* $f + g, fg : X \to \mathbb{C}$ *είναι απλές.*

Απόδειξη.

Αρχικά αφού οι f, g *είναι μετρήσιμες ώς απλές,έχουμε απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *ότι και οι* $f + g, fg$ *είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Επίσης αφού τα $f(\mathbb{C}), g(\mathbb{C})$ *είναι πεπερασμένα σύνολα,έπεται ότι και το* $(f + g)(\mathbb{C})$ *είναι* *πεπερασμένο σύνολο,με πληθάριθμο το γινόμενο των πληθαρίθμων των συνόλων τιμών των f και g και άρα η $f+g$ είναι απλή.*

Επίσης και το $(fg)(\mathbb{C})$ είναι πεπερασμένο και άρα και η fg είναι απλή.

Θεώρημα.

Έστω $(X,\mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

1. *Αν $f: X \to [0,+\infty]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση,τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\phi_n : X \to [0,+\infty)$ απλών συναρτήσεων όπου*

$$\phi_n \to f.$$

Μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη πάνω στα σύνολα που η f είναι φραγμένη.

2. *Αν $f: X \to \mathbb{C}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση,τότε υπάρχει ακολουθία $\phi_n : X \to \mathbb{C}$ απλών συναρτήσεων όπου*

$$\phi_n \to f$$

και η $(|\phi_n|)_{n=1}^{\infty}$ αποτελεί αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων.

Μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα σύνολα που η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα $F_n = f^{-1}((n,+\infty])$.*

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $k \in \{0,1,\ldots,2^n(n-1)\}$ θεωρούμε τα σύνολα

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

και παρατηρούμε τότε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\phi_n : X \to [0,+\infty)$ όπου

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n(2^n-1)} \frac{k}{2^n}\mathcal{X}_{E_{n,k}} + n\mathcal{X}_{F_n}, n \in \mathbb{N}$$

ικανοποιεί τα ζητούμενα του θεωρήματος(Άσκηση).

2. *Παρατηρούμε ότι αν* $f : X \to \mathbb{C}$ *τότε έχουμε ότι*

$$f = Re_f + Im_f = Re_f^+ - Re_f^- + Im_f^+ - Im_f^-$$

και εφαρμόζουμε το πρώτο σκέλος του θεωρήματος για τις συναρτήσεις $Re_f^+, Re_f^-, Im_f^+, Im_f^- : X \to [0, +\infty]$ *και λόγω της 'καλής' συμπεριφοράς των συγκλίσεων ως προς το αθροίσμα θα προκύψει το ζητούμενο.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου.*

1. *Το* μ *είναι πλήρες αν και μόνο αν για κάθε* $f : X \to \mathbb{C}$ *που είναι μετρήσιμη και* $f = g$ μ*-σχεδόν παντού,όπου* $g : X \to \mathbb{C}$*,έπεται ότι και η* g *είναι μετρήσιμη.*

2. *Το* μ *είναι πλήρες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία συναρτήσεων* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *με* $f_n \to f$ μ*-σχεδόν παντού,όπου* $f : X \to \mathbb{C}$*,έπεται ότι* f *είναι και αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη.

1. *Αρχικά υποθέτουμε ότι το* μ *είναι πλήρες μέτρο και έστω* $f : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμη με* $f = g$ μ*-σχεδόν παντου.*

   Τότε αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$B = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$$

   τότε έχουμε ότι υπάρχει $E \in Null$ *με* $X \setminus B \subset E$ *και άρα αν πάρουμε τώρα* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ *τότε έχουμε ότι*

$$g^{-1}(A) = \{x \in X : g(x) \in A\} = \{x \in B : g(x) \in A\} \cup \{x \in X \setminus B : g(x) \in A\}$$

$$= \{x \in B : f(x) \in A\} \cup \{x \in X \setminus B : g(x) \in A\}.$$

Αφού όμως τώρα

$$\{x \in B : f(x) \in A\} \subset \{x \in X : f(x) \in A\} = f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

και

$$\{x \in X \setminus B : g(x) \in A\} \subset X \setminus B \subset E$$

όπου $\mu(E) = 0$ *έπεται ότι*

$$g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

και άρα η g *είναι μετρήσιμη.*

Αντίστροφα,θεωρούμε $A \in \mathcal{F}$ *με* $\mu(A) = 0$ *και έστω και* $E \subset A$*.Θα αποδείξουμε ότι τότε* $E \in \mathcal{F}$ *και αυτό θα μας δώσει το ζητούμενο.*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f = \mathcal{X}_A, g = \mathcal{X}_E$ και παρατηρούμε ότι η f είναι μετρήσιμη αφού $A \in \mathcal{F}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subset A \setminus E \subset A$$

και άρα $f = g$ σχεδόν παντού.

Επομένως απο την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι και αυτή μετρήσιμη συνάρτηση και άρα απο ***Πρόταση*** έχουμε ότι $E \in \mathcal{F}$ και άρα το μ είναι πλήρες.

2. Έστω αρχικά ότι το μ είναι πλήρες μέτρο και έστω και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων όπου $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού,όπου $f : X \to \mathbb{C}$.

   Έστω τώρα B το σύνολο των $x \in X$ που ισχύει η σύγκλιση και τότε απο ***Πρόταση*** έχουμε ότι η $f|_B$ είναι μετρήσιμη και υπάρχει $E \in Null$ τέτοι ώστε $X \setminus B \subset E$. Αφού όμως το μ είναι πλήρες έπεται τελικά ότι η f είναι μετρήσιμη.

   Για το αντίστροφο,αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $A \in \mathcal{F}$ με $\mu(A) = 0$ και $E \subset A$ τότε θα αποδείξουμε ότι $E \in \mathcal{F}$ και αυτό θα μας δώσει το ζητούμενο.

   Τότε θεωρούμε την συνάρτηση $f = \mathcal{X}_A : X \to [0, +\infty)$ και απο το προηγούμενο ***Θεώρημα*** έχουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\phi_n : X \to [0, +\infty)$ απλών συναρτήσεων με

$$\phi_n \to f.$$

   Τότε όμως για κάθε $x \in E$

$$\phi_n(x) \to f(x) = g(x)$$

   όπου $g = \mathcal{X}_E$ και άρα

$$\phi_n \to g$$

μ-σχεδόν παντού γιατί

$$\{x \in X : \lim_n \phi_n(x) \neq g(x)\} \subset A \setminus E \subset A.$$

Επομένως απο υπόθεση έχουμε ότι η g *είναι μετρήσιμη και άρα* $E \in \mathcal{F}$ *και τελικά το* μ *είναι πλήρες μέτρο.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ η πλήρωση του. Τότε εάν $f : X \to \mathbb{C}$(ή $\overline{\mathbb{R}}$) είναι $\overline{\mathcal{F}}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε υπάρχει $g : X \to \mathbb{C}$(ή $\overline{\mathbb{R}}$) η οποία είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και $f = g$ μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- *Αν η f είναι χαρακτηριστική συνάρτηση ενός $\overline{\mathcal{F}}$-μετρήσιμου συνόλου E και άρα $f = \mathcal{X}_E$ τότε παρατηρούμε ότι απο* ***Πρόταση*** *έχουμε ότι υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(E \triangle F) = 0.$$

Τότε όμως έχουμε ότι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g = \mathcal{X}_F$ τότε έχουμε ότι

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subset E \triangle F$$

και άρα $f = g$ μ-σχεδόν παντού.

Είναι άμεσο ότι αν η f είναι απλή $\overline{\mathcal{F}}$-μετρήσιμη συνάρτηση πάλι ισχύει το ζητούμενο.

- *Αν $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μια $\overline{\mathcal{F}}$-μετρήσιμη τότε έχουμε απο προηγούμενο* ***Θεώρημα*** *ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\phi_n : X \to \mathbb{C}$ απλών $\overline{\mathcal{F}}$-μετρήσιμων συναρτήσεων όπου*

$$\phi_n \to f.$$

Τότε όμως απο το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\psi_n : X \to \mathbb{C}$ που είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και

$$\psi_n = \phi_n$$

μ-σχεδόν παντού.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε τώρα*

$$B_n = \{x \in X : \phi_n(x) = \psi_n(x)\} \subset X$$

και έχουμε ότι υπάρχει $E_n \in Null$ *τέτοιο ώστε*

$$X \setminus B_n \subset E_n.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *και θέσουμε* $g = \lim_n \mathcal{X}_{E^c}\psi_n$ *τότε έχουμε ότι* $E \in Null$ *και η* g *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη ως γινόμενο τέτοιων.*

Τέλος παρατηρούμε ότι για $x \in E^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ *έχουμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{X}_{E^c}\psi_n = \psi_n(x) = \phi_n(x)$$

και άρα παίρνοντας όριο $n \to \infty$ *έχουμε ότι*

$$g(x) = \lim_n \mathcal{X}_{E^c}\psi_n(x) = \lim_n \phi_n(x) = f(x)$$

και άρα $g = f$ μ*-σχεδόν παντού.*

2.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών συναρτήσεων

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου.*

Θέτουμε

$$L^+ = \{f : X \to [0, +\infty] : f \text{ μετρήσιμη}\}$$

και για κάθε $\phi \in L^+$ *απλή ορίζουμε*

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$$

όπου $\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ *είναι η κανονική αναπαράσταση της* ϕ.

Παρατηρήσεις .

Αν $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *είναι χώρος μέτρου και* $\phi \in L^+$ *είναι απλή συνάρτηση με*

$$\phi = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathcal{X}_{B_j}$$

η οποία δεν είναι αναγκαστικά η κανονική μορφή της ,τότε

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{l} b_j \mu(B_j).$$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου,*$\phi \in L^+$ *απλή και* $A \in \mathcal{F}$.

Ορίζουμε

$$\int_A \phi \, d\mu = \int \phi \mathcal{X}_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap A)$$

αν $\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ *και η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί* $\phi \mathcal{X}_A \in L^+$ *και*

$$\phi \mathcal{X}_A = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i} \mathcal{X}_A = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap A}.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\psi, \phi \in L^+$ απλές.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. *Αν $c \geq 0$ τότε*
$$\int c\phi \, d\mu = c \int \phi \, d\mu.$$

2. *Ισχύει ότι*
$$\int (\phi + \psi) \, d\mu = \int \phi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.$$

3. *Αν $\phi \leq \psi$ τότε*
$$\int \phi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu.$$

4. *Αν ορίσουμε $\mu_\phi : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με*
$$\mu_\phi(A) = \int_A \phi \, d\mu, A \in \mathcal{F}$$
τότε η μ_ϕ είναι μέτρο στην $\mathcal{F}$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε αρχικά ότι
$$\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$$
και
$$\psi = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathcal{X}_{B_j}$$
είναι οι κανονικές αναπαραστάσεις των φ,ψ αντίστοιχα.

1. *Έστω $c > 0$ και τότε παρατηρούμε ότι η $c\phi \in L^+$ και*
$$c\phi = \sum_{i=1}^{k} c a_i \mathcal{X}_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i' \mathcal{X}_{A_i}$$

όπου $a_i' = ca_i$ *για κάθε* $1 \leq i \leq k$ *και άρα η* $c\phi$ *είναι απλή και*

$$\int c\phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i' \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) = c \int \phi \, d\mu.$$

2. *Παρατηρούμε ότι αφού έχουμε γράψει τις φ,ψ σε κανονικές μορφές έχουμε ότι*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{j=1}^{l} B_j = X$$

και άρα για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ *και* $j \in \{1, \ldots, l\}$ *έχουμε ότι*

$$A_i = A_i \cap X = \bigcup_{j=1}^{l} A_i \cap B_j$$

και

$$B_j = B_j \cap X = \bigcup_{i=1}^{l} B_j \cap A_i.$$

Επίσης έχουμε ότι οι $(A_i)_{i=1}^k, (B_j)_{j=1}^l$ *αποτελούνται απο ξένα ανά δύο σύνολα και άρα απο αυτό έπεται ότι για κάθε* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *και κάθε* $j \in \{1, \ldots, l\}$ *έχουμε ότι οι οικογένειες συνόλων* $\{A_i \cap B_j\}_{j=1}^l$ *και* $\{B_j \cap A_i\}_{i=1}^k$ *αποτελόυνται επίσης απο ξένα ανά δύο σύνολα.*

Τώρα παρατηρούμε ότι αν A, B *είναι δύο ξένα σύνολα τότε*

$$\mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$$

και άρα επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων* $(C_k)_{k=1}^n$ *έχουμε ότι*

$$\mathcal{X}_C = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{X}_{C_n}$$

όπου

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Επομένως απο τα παραπάνως έχουμε ότι

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{l} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i,j} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \tag{12}$$

και

$$\psi = \sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{B_j \cap A_i} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} b_j \mathcal{X}_{B_j \cap A_i} = \sum_{i,j} b_j \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}. \tag{13}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι προφανώς $\phi + \psi \in L^+$ *και*

$$\phi + \psi = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

και άρα η $\phi + \psi$ *είναι και απλή.*

Τελικά έχουμε απο τα παραπάνω ότι

$$\int (\phi + \psi)\, d\mu = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{l} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{l} b_j \mu(B_j)$$

$$= \int \phi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.$$

3. *Παρατηρούμε ότι αν* $\phi \leq \psi$ *τότε έχουμε ότι για κάθε* $i, j \in [k] \times [m]$ *με* $A_i \cap B_j \neq \emptyset$*(τα υπόλοιπα έχουν μηδενικό μέτρο ως κενά και άρα δεν συνεισφέρουν στα παρακάτω αθροίσματα)έχουμε ότι* $a_i \leq b_j$ *και άρα*

$$\int \phi\, d\mu = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \int \psi\, d\mu$$

και εδώ χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (12),(13) που αποδείξαμε παραπάνω.

4. *Παρατηρούμε αρχικά ότι κατά τετριμμένο τρόπο έχουμε ότι*

$$\mu_\phi(\emptyset) = 0.$$

Επίσης αν $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ *είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{F}$ *τότε έχουμε ότι για κάθε* $m \in \mathbb{N}$

$$\phi \mathcal{X}_{C_m} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i} \mathcal{X}_{C_m} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap C_m}$$

$$\Longrightarrow \mu_\phi(C_m) = \int_{C_m} \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap C_m)$$

και άρα

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_\phi(C_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap C_m) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_i \cap C_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu \left(A_i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \right) \right)$$

και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ότι η ακολουθία $\{A_i \cap C_m\}_{m=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων αφού τα* C_m *είναι ξένα ανά δύο.*

Απο την άλλη έχουμε ότι αν $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mu_\phi(C) = \int_C \phi \, d\mu = \int \phi \mathcal{X}_C \, d\mu$$

όπου

$$\phi \mathcal{X}_C = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap C} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \right)}$$

και άρα η $\phi \mathcal{X}_C$ *είναι απλή και*

$$\mu_\phi(C) = \int \phi \mathcal{X}_C = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu \left(A_i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \right) \right)$$

Τελικά απο τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\mu_\phi(C) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_\phi(C_m)$$

και άρα το μ_ϕ είναι μέτρο.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^+$.

Ορίζουμε τότε

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ απλή μετρήσιμη} \right\}$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g \in L^+$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. *Αν $c \geq 0$ τότε*
$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$
2. *Αν $f \leq g$ τότε*
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Απόδειξη.

1. *Παρατηρούμε ότι για $c = 0$ είναι άμεσο και άρα έστω $c > 0$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητς τους $\sup$ έπεται άμεσα το ζητούμενο.*
2. *Παρατηρούμε ότι για κάθε φ απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq \phi \leq f$ έχουμε ότι $0 \leq \phi \leq g$ και άρα*

$$\left\{ \int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ απλή μετρήσιμη} \right\} \subset \left\{ \int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq g, \phi \text{ απλή μετρήσιμη} \right\}$$

και άρα απο τις ιδιότητες του $\sup$ *έχουμε τελικά ότι*

$$\sup\left\{\int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ απλή μετρήσιμη}\right\} \subset \sup\left\{\int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq g, \phi \text{ απλή μετρήσιμη}\right\}$$

$$\Longrightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Θεώρημα (Θεώρημα Μονότητης Σύγκλισης)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων απο τον* L^+ *όπου* $f_n \to f$. *Τότε ισχύει ότι*

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων,έχουμε ότι και η ακολουθία των ολοκληρωμάτων* $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα και άρα υπάρχει το όριο*

$$A = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$f_n \leq f$$

και επομένως έχουμε ότι και

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Παίρνοντας τώρα $\lim_n$ *στην παραπάνω σχέση έχουμε τελικά ότι*

$$A = \lim_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Για την δεύτερη τώρα ανισότητα παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ϕ *απλή με* $0 \leq \phi \leq f$ *έχουμε ότι*

$$\int \phi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu = A$$

γιατί τότε το A *θα είναι άνω φράγμα του συνόλου*

$$\left\{\int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ μετρήσιμη}\right\}$$

και άρα αφού το $\sup$ *είναι το ελάχιστο άνω φράγμα θα έχουμε την δεύτερη ανισότητα. Μάλιστα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε* ϕ *απλή με* $0 \leq \phi \leq f$ *και κάθε* $a \in (0,1)$ *ισχύει ότι*

$$a \int \phi \, d\mu \leq \lim_n \int f_n \, d\mu = A.$$

Έστω επομένως ϕ *απλή με* $0 \leq \phi \leq f$ *και* $a \in (0,1)$ *και θεωρούμε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *το σύνολο*

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq a\phi(x)\}$$

και παρατηρούμε ότι αφού η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα έπεται ότι η* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα. Επίσης παρατηρούμε ότι*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

γιατί αν πάρουμε τυχόν $x \in X$ *τέτοι ώστε* $\phi(x) \neq 0$*,γιατί για τα υπόλοιπα* x *είναι τετριμμένο,τότε έχουμε ότι αφού* $f_n \to f$ *έπεται ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq n_0$

$$f_n(x) > f(x) \geq \phi(x)$$

και άρα

$$f_{n_0}(x) > \phi(x).$$

Όμως αφού $a \in (0,1)$ *και* $\phi(x) \neq 0$ *έπεται ότι*

$$\phi(x) > a\phi(x)$$

και άρα τελικά έχουμε

$$f_{n_0}(x) > a\phi(x) \implies x \in E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

και έχουμε την ζητούμενη ισότητα.

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*απο την μονοτονία του ολοκληρώματος για συναρτήσεις του* L^+,*έπεται ότι*

$$\int f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} a\phi \, d\mu = a\mu_\phi(E_n).$$

Παίρνοντας τελικά $\lim_n$ *στην παραπάνω σχέση,έχουμε ότι*

$$A = \lim_n \int f_n \, d\mu \geq a \lim_n \mu_\phi(E_n) = a\mu_\phi(X)$$

$$= a \int \phi \, d\mu$$

,όπου παραπάνω χρησιμοποιήθηκε ότι το μ_ϕ *είναι μέτρο και άρα ισχύει η συνέχεια του μέτρου ως προς αύξουσες ακολουθίες συνόλων για το* μ_ϕ.

Πόρισμα (Γραμμικότητα ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων)**.**
Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και* $f, g \in L^+$.
Τότε

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Μάλιστα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L^+$ *έχουμε ότι*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν αποδείξουμε το 1ο σκέλος τότε επαγωγικά αποδεικνύεται και το 2ο σκέλος.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $f, g \in L^+$ *τότε απο* ***Θέωρημα*** *έχουμε ότι υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες* $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ *μη αρνητικών απλών συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει ότι*

$$\phi_n \to f$$

και

$$\psi_n \to g.$$

Επομένως απο το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int \phi_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$$

και

$$\int \psi_n \, d\mu \to \int g \, d\mu.$$

Παρατηρούμε όμως ότι η ακολουθία $(\phi_n + \psi_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι και αυτή αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων και*

$$\phi_n + \psi_n \to f + g$$

και άρα πάλι απο το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int (\phi_n + \psi_n) \, d\mu \to \int (f + g) \, d\mu$$

Για απλές συναρτήσεις όμως του L^+ *έχουμε αποδείξει την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και άρα*

$$\int (\phi_n + \psi_n) \, d\mu = \int \phi_n \, d\mu + \int \psi_n \, d\mu \to \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Απο την μοναδικότητα όμως του ορίου έχουμε τελικά ότι

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Πόρισμα (Θεώρημα Beppo-Levi)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία συναρτήσεων απο τον* L^+.

Τότε

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *όπου για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

και παρατηρούμε ότι αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι* $f_n \geq 0$ *και η* f_n *είναι μετρήσιμη,έπεται ότι η* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων και προφανώς*

$$g_n \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Απο το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης και την Γραμμικότητα του ολοκλήρωματος έχουμε τώρα ότι

$$\int g_n \, d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu \to \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

Απο την άλλη όμως

$$\sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu \to \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

και άρα τελικά απο την μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $f \in L^+$ *με*

$$\int f \, d\mu = 0.$$

Τότε $f = 0$ μ*-σχεδόν παντού αλλά και αντίστροφα.*

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n = \left\{ x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *τότε παρατηρούμε ότι*

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

και άρα απο την υποπροσθετικότητα του μέτρου μ *έχουμε ότι*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{14}$$

Παρατηρούμε τώρα όμως ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

και άρα

$$\mu(E_n) = 0.$$

Τελικά απο την (14) έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα έστω ότι $f = 0$ μ*-σχεδόν παντού τότε έστω*

$$E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

και τότε έχουμε ότι $\mu(E) = 0$ *και άρα αφού*

$$\int f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_{E^c} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \mu(E) = 0$$

έχουμε και το αντίστροφο.

Πρόταση (Λήμμα τουFatou)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία συναρτήσεων απο τον* L^+.

Τότε

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu.$$

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k$ *τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων και επίσης*

$$g_n \longrightarrow \liminf_n f_n.$$

Επομένως απο το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu = \int \lim_n g_n\,d\mu = \lim_n \int g_n\,d\mu \leq \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

και την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η μονοτονία του ολοκληρώματος και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k \leq f_n.$$

Πόρισμα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία συναρτήσεων απο τον* L^+ *με* $f_n \to f$.

Τότε

$$\int f\,d\mu \leq \liminf \int f_n\,d\mu.$$

Πρόταση .

Έστω $f \in L^+$ *με*

$$\int f \, d\mu < \infty.$$

Τότε $\{f = \infty\}$ *είναι σύνολο μέτρου μηδέν και το* $\{f > 0\}$ *είναι σ-πεπερασμένο.*

Απόδειξη.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n = \{x \in X : f(x) > n\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*τότε έχουμε ότι*

$$\{f = \infty\} = \{x \in X : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \int_{E_n} f(x) \, d\mu \leq \frac{1}{n} \int f \, d\mu = \frac{A}{n}$$

όπου

$$A = \int f \, d\mu \in \mathbb{R}^+$$

και άρα αφήνοντας $n \to \infty$ *στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι τελικά*

$$\lim_n \mu(E_n) = 0.$$

Απο την άλλη όμως έχουμε ότι η ακολουθία $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων και άρα απο την συνέχεια του μέτρου* μ *έχουμε ότι*

$$0 = \lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(\{f = \infty\}).$$

Απο την άλλη παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων

$$F_n = \left\{ x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*τότε έχουμε ότι*

$$\{f > 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$\mu(F_n) \leq n \int_{F_n} f \, d\mu \leq n \int f \, d\mu < \infty$$

και άρα έχουμε και το δεύτερο ζητούμενο.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Τότε γνωρίζουμε ότι*

$$f = f^+ - f^-$$

και αν

$$\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu < \infty$$

τότε ορίζουμε

$$\int f \ := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

και η f *καλείται* ***ολοκληρώσιμη***.

Ορίζουμε επίσης

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}$$

το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ αν και μόνο αν $\int |f|\, d\mu < \infty$,γιατί γνωρίζουμε ότι $|f| = f^+ + f^-$.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου.Τότε ο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ είναι διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα Lebesgue γραμμικό συναρτησεοείδες πάνω σε αυτόν.

2.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue μιγαδικών συναρτήσεων

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η f καλείται ***ολοκληρώσιμη*** *αν*

$$\int |f|\, d\mu < \infty.$$

Μάλιστα η f καλείται ολοκληρώσιμη στο $E \in \mathcal{F}$ αν

$$\int_E |f|\, d\mu < \infty.$$

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε παρατηρούμε ότι

$$|f| = |Re_f| + |Im_f| \le 2|f|$$

και άρα απο αυτό έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι $Re_f, Im_f : X \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και τότε ορίζουμε

$$\int f\, d\mu := \int Re_f\, d\mu + i \int Im_f\, d\mu.$$

Συμβολίζουμε

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}$$

το σύνολο των ολοκληρώσιμων $f : X \to \mathbb{C}$.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου.Τότε ο* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *είναι διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα Lebesgue γραμμικό συναρτησεοείδες πάνω σε αυτόν.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $f : X \to \mathbb{C}$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση.*

Τότε

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν

$$\left| \int f \, d\mu \right| = 0$$

τότε είναι άμεσο το ζητούμενο και άρα έστω ότι

$$\left| \int f \, d\mu \right| \neq 0. \tag{15}$$

Αν τώρα $f : X \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη και τότε έχουμε ότι*

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int f^+ \, d\mu \right| + \left| \int f^- \, d\mu \right| = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu$$

$$= \int (f^+ + f^-) \, d\mu$$

$$= \int |f| \, d\mu$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Γενικά τώρα για $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$ *που ικανοποιεί την (15) θεωρούμε τον αριθμό*

$$a = \frac{\overline{\int f \, d\mu}}{\left| \int f \, d\mu \right|}$$

και τότε έχουμε ότι

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \frac{\left|\int f\, d\mu\right|}{\int f\, d\mu}\int f\, d\mu = \frac{1}{\overline{a}}\int f\, d\mu = a\int f\, d\mu$$

αφού $|a| = a\overline{a} = 1$.

Αφού τώρα έχουμε ότι

$$\left|\int f\, d\mu\right| \in \mathbb{R}$$

έπεται ότι

$$\left|\int f\, d\mu\right| = Re\left(\left|\int f\, d\mu\right|\right) = Re\left(a\int f\, d\mu\right) = Re\left(\int af\, d\mu\right)$$

$$= \int Re(af)\, d\mu$$

$$\leq \int |Re(af)|\, d\mu$$

$$\leq \int |af|\, d\mu$$

$$= \int |f|\, d\mu$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου.*

1. *Αν* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *τότε το* $[f \neq 0]$ *είναι σ-πεπερασμένο.*

2. *Αν* $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*

   (α΄) *Για κάθε* $E \in \mathcal{F}$ *ισχύει ότι*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

(β′) *Ισχύει ότι*

$$\int |f-g| \, d\mu = 0.$$

(γ′) *Ισχύει ότι* $f = g$ *μ-σχεδόν παντού.*

Απόδειξη.

1. *Παρατηρούμε αρχικά ότι* $\{f \neq 0\} = \{|f| \neq 0\} = \{|f| > 0\}$ *και άρα αφου και*

   $$\int |f| \, d\mu < \infty$$

   γιατί η f *είναι ολοκληρώσιμηα απο υπόθεση,έπεται απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *ότι το* $\{|f| > 0\}$ *και άρα και το* $\{f \neq 0\}$ *είναι σ-πεπερασμένο.*

2. *Αν υποθέσουμε αρχικά το (γ′),δηλαδή ότι* $f = g$ *μ-σχεδόν παντού τότε θεωρούμε την* $h = f - g$ *και έχουμε ότι* $h = 0$ *μ-σχεδόν παντού.*

   Τότε όμως έχουμε ότι και $|h| = 0$ *μ-σχεδόν παντού και άρα απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *έχουμε ότι*

   $$\int |h| \, d\mu = \int |f-g| \, d\mu = 0$$

   και έχουμε έτσι το (β′).

   Αντίστροφα,αν υποθέσουμε το (β′),δηλαδή ότι

   $$\int |f-g| \, d\mu = \int h \, d\mu = 0$$

   τότε πάλι απο την ίδια πρόταση έχουμε ότι $h = 0$ *μ-σχεδόν παντού και άρα* $f = g$ *μ-σχεδόν παντού και άρα έπεται το (γ′).*

   Απο την άλλη αν υποθέσουμε πάλι το (β′),δηλαδή ότι

   $$\int |f-g| \, d\mu = 0$$

τότϵ έχουμϵ ότι αν πάρουμϵ $E \in \mathcal{F}$ έχουμϵ ότι

$$\left|\int_E f\,d\mu - \int_E g\,d\mu\right| = \left|\int_E (f-g)\,d\mu\right| \leq \int_E |f-g|\,d\mu$$

$$\leq \int |f-g|\,d\mu = 0$$

και άρα

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

δηλαδή έπϵται το (α′).

Τέλος υποθέτουμϵ το (α′) και τότϵ για κάθϵ $E \in \mathcal{F}$ έχουμϵ ότι

$$\int (f-g)_E\,d\mu = \int_E Re(f-g)\,d\mu + i\int_E Im(f-g)\,d\mu = 0$$

$$\implies \int_E Re(f-g)\,d\mu = \int_E Im(f-g)\,d\mu = 0.$$

Αν θϵωρήσουμϵ τώρα τα σύνολα

$$E_1 = \{Re(f-g) \geq 0\}$$

$$E_2 = \{Re(f-g) < 0\}$$

$$E_3 = \{Im(f-g) \geq 0\}$$

$$E_4 = \{Im(f-g) < 0\}$$

τότϵ έχουμϵ ότι $E_i \in \mathcal{F}$ και

$$\int |Re(f-g)|\,d\mu = \int_{E_1} Re(f-g)\,d\mu - \int_{E_2} Re(f-g)\,d\mu = 0$$

και όμοια

$$\int |Im(f-g)|\,d\mu = 0.$$

Επομένως απο προηγούμενη ***Πρόταση*** *έχουμε ότι* $Re(f-g) = Im(f-g) = 0$ *μ-σχεδόν παντού και άρα* $f-g=0$ *μ-σχεδόν παντού γιατί*

$$\{f-g\neq 0\} = \{Re(f-g)\neq 0\}\cup\{Im(f-g)\neq 0\}$$

και έχουμε έτσι το (γ').

Ορισμός .

Έστω $(X,\mathcal{F},\mu)$ *χώρος μέτρου και έτσω και* $f,g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. *Τότε γράφουμε*

$$f\sim g \iff f=g \text{ μ-σχεδόν παντου}$$

και εύκολα ελέγχεται ότι η $\sim$ *είναι σχέση ισοδυναμίας στον* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Ορίζουμε

$$L^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)/\sim$$

το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας.

Πρόταση .

Αν $(X,\mathcal{F},\mu)$ *είναι χώρος μέτρου.*

Τότε:

1. *Ο* $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *είναι διανυσματικός χώρος.*

2. *Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση* $||\cdot||_1 : L^1_{\mathbb{C}}(\mu)\to[0,+\infty)$ *με*

$$||f||_1 = \int |f|\, d\mu$$

για κάθε $f\in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$,*τότε αυτή είναι νόρμα στον* $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *με επαγόμενη μετρική την* $\rho_1 : L^1_{\mathbb{C}}(\mu)\times L^1_{\mathbb{C}}\to\mathbb{R}$ *με*

$$\rho_1(f,g) = ||f-g||_1$$

για κάθε $f,g\in L^1_{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης).

Έστω $(X,\mathcal{F},\mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *μια ακολουθία συναρτήσεων απο τον* $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. *Αν* $f_n \to f$ μ-*σχεδόν παντού και υπάρχει* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *με* $|f_n| \leq g$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,*τότε* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *και*

$$||f_n - f||_1 = \int |f_n - f|\, d\mu \longrightarrow 0.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\int f_n\, d\mu \longrightarrow \int f\, d\mu.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $f_n \to f$ μ-*σχεδόν παντού έπεται ότι* $|f_n| \to |f|$ μ-*σχεδόν παντού και* $|f_n - f| \to 0$ μ-*σχεδόν παντού.*

Επίσης παρατηρούμε ότι αφού $|f_n| \leq g$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έπεται ότι* $|f| \leq g$ *και άρα αφού* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *έχουμε τελικά ότι*

$$\int |f|\, d\mu < \infty \implies f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu).$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int g\, d\mu = \int g - \lim_n |f_n - f|\, d\mu &= \int \lim_n (g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &= \int \liminf_n (g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &\leq \liminf_n \int g - |f_n - f|\, d\mu\end{aligned}$$

απο το Λήμμα του Fatou και άρα τελικά

$$\int g\, d\mu \leq \int g\, d\mu - \limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu \implies \limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

δηλαδή

$$\limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Επομένως το όριο

$$\lim_n ||f_n - f||_1 = \lim_n \int |f_n - f| \, d\mu$$

υπάρχει και ισούται με 0.

Παρατηρούμε όμως τώρα ότι

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int f_n - f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$$

και άρα

$$\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu.$$

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συναρτήσεων απο τον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_1 < \infty.$$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ και

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Αρχικά θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_k : X \to \mathbb{R}$ με

$$g_k = \sum_{n=1}^{k} |f_n|$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι

$$g_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = g$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αφού για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $|f_k| \geq 0$ έπεται ότι η η $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων και άρα απο το Θεώρημα Μονότονης

Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int g_k \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{k} |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int |f_n| \, d\mu \longrightarrow \int \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \, d\mu$$

και άρα

$$\int g \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| \, d\mu < \infty$$

και άρα $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Τώρα θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $h_k : X \to \mathbb{C}$ *με*

$$h_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και παρατηρούμε ότι για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *ότι*

$$|h_k| = \left| \sum_{n=1}^{k} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{k} |f_n| = g_k \leq g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αφού $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *απο* ***Πρόταση*** *έχουμε ότι το* $\{g < \infty\}$ *έχει συμπλήρωμα που είναι μέτρου μηδέν και αφού*

$$\{g < \infty\} = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ συγκλίνει απολύτως} \right\} \subset \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ συγκλίνει} \right\}$$

έπεται ότι η $h_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει* μ*-σχεδόν παντού στην* $h = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Επομένως απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int h_k \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int f_n \, d\mu \longrightarrow \int h \, d\mu$$

και άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \int h \, d\mu$$

Θεώρημα.

Οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Απόδειξη.

Έστω $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ και τότε, απο ***Θεώρημα*** *προσέγγισης απο απλές,έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ απλών συναρτήσεων όπου η ακολουθία $(|\phi_n|)_{n=1}^{\infty}$ αποτελεί αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων και*

$$\phi_n \longrightarrow f.$$

Τότε όμως

$$|\phi_n| \longrightarrow |f|$$

και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$|\phi_n| \leq |f|$$

όπου $|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Επομένως απο το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$||\phi_n - f||_1 \longrightarrow 0$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα.

Έστω μ ένα μέτρο Lebesgue-Steljies στον $\mathbb{R}$ και έστω και $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$

1. *Υπάρχει φ απλή συνάρτηση ώστε*

$$||f - \phi||_1 < \epsilon$$

και

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{A_k}$$

με τα A_k να είναι πεπερασμένες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων.

2. *Υπάρχει* g *συνεχής με συμπαγή φορέα ώστε*

$$||f-g||_1 < \epsilon.$$

Δηλαδή οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Απόδειξη.

1. Έστω $\epsilon > 0$ και τότε απο το προηγούμενο ***Θεώρημα*** έχουμε ότι υπάρχει φ απλή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$||f-\psi||_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

και έστω ότι η ψ έχει κανονική αναπαράσταση

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{B_k}$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$.

Τότε όμως παρατηρούμε ότι η ψ είναι ολοκληρώσιμη γιατί

$$\psi = f - (f - \psi)$$

όπου $\psi, f-\psi$ είναι ολοκληρώσιμες.

Επίσης έχουμε ότι για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$ ισχύει ότι

$$\mu(B_k) < \infty$$

αφού

$$\int \psi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(B_k) < \infty$$

$$\implies \mu(B_k) < \infty$$

για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$.

Επομένως απο ***Πρόταση*** τώρα έχουμε ότι για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$ έχουμε ότι *υπάρχει* A_k *που είναι πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων ώστε*

$$\mu(A_k \triangle B_k) < \frac{\epsilon}{2n \max\{|a_1, \ldots, |a_n|\}} \tag{16}$$

και απο αυτό έπεται ότι αν θεωρήσουμε την

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{A_k}$$

τότε έχουμε ότι η φ είναι απλή και

$$||\phi - \psi||_1 = \int \left| \sum_{k=1}^{n} a_k (\mathcal{X}_{A_k} - \mathcal{X}_{B_k}) \right| \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \int |\mathcal{X}_{A_k} - \mathcal{X}_{B_k}| \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \int \mathcal{X}_{A_k \triangle B_k} \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mu(A_k \triangle B_k)$$

και άρα συνδυάζοντας την (16) και την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι

$$||\phi - \psi||_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

Τελικά απο την τριγωνική για την νόρμα $|| \cdot ||_1$ *έχουμε ότι*

$$||f - \phi||_1 \leq ||f - \psi||_1 + ||\psi - \phi||_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2.

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου,*$a < b \in \mathbb{R}$ *και* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ *όπου για κάθε* $t \in [a, b]$ *η* $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{C}$ *είναι ολοκληρώσιμη.*

Θέτουμε επίσης $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ *όπου*

$$F(t) = \int f(x, t)\, d\mu(x)$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

1. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $g : X \to [0, \infty)$ *ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε*

   $$|f(x, t)| \leq g(x)$$

   για κάθε $(x, t) \in X \times [a, b]$ *και ότι υπάρχει* $t_0 \in [a, b]$ *τέτοιο ώστε*

   $$\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$$

   για κάθε $x \in X$.

   Τότε

   $$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

   Ειδικότερα αν η $f(x, \cdot) : [a, b] \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής τότε και η* F *είναι συνεχής.*

2. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *και υπάρχει και συνάρτηση* $g : X \to [0, \infty)$ *τέτοια ώστε*

   $$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$$

   για κάθε $(x, t) \in X \times [a, b]$.

   Τότε η F *είναι διαφορίσιμη και*

   $$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x).$$

Απόδειξη.

1. *Έστω* $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία απο το* $[a,b]$ *με* $t_n \longrightarrow t_0$ *και θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων* $h_n : X \to \mathbb{C}$ *με*

$$h_n(x) = f(x,t_n), x \in X$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και τότε απο την αρχή της μεταφοράς για το όριο,έχουμε ότι*

$$h_n(x) \longrightarrow f(x,t_0).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι* $|h_n(x)| \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in X$ *και άρα απο το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε τελικά ότι*

$$F(t_n) = \int h_n(x)\,d\mu(x) = \int f(x,t_n)\,d\mu(x) \longrightarrow \int f(x,t_0)\,d\mu(x) = F(t_0).$$

Τελικά απο την αρχή της μεταφοράς για το όριο έχουμε ότι

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$

2. *Έστω* $t_0 \in [a,b]$ *και έστω και τυχόυσα ακολουθία* $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ *απο το* $[a,b]$ *με* $t_n \neq t_0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και*

$$t_n \longrightarrow t_0.$$

Επίσης θεωρούμε τηνν ακολουθία συναρτήσεων $h_n : X \to \mathbb{C}$ *με*

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}, x \in X$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και παρατηρούμε ότι*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim_n \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \lim_n h_n(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Κάθε όμως h_n είναι μετρήσιμη και άρα απο **Πρόταση** έπεται ότι και η $\frac{\partial f}{\partial t}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in X$ απο το Θεώρημα Μέσης τιμής έχουμε ότι

$$|h_n(x)| = \left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

και άρα απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x) = \lim_n \int h_n(x) d\mu(x) = \lim_n \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

$$= \lim_n \frac{1}{t_n - t_0} \int f(x,t_n) - f(x,t_0)\, d\mu(x)$$

$$= \lim_n \frac{F(x,t_n) - F(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Επομένως η F είναι διαφορίσιμη στο t_0 και

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x).$$

Το $t_0 \in [a,b]$ όμως ήταν τυχόν και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα.

Έστω $a < b \in \mathbb{R}$ και έστω και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση.

Τότε

1. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη,τότε είναι και Lebesgue μετρήσιμη και ισχύει ότι

$$\int_{[a.b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

2. *Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a,b] : f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}) = 0.$$

2.4 Είδη σύγκλισης

Ορισμός .

Έστω X σύνολο και έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια άλλη συνάρτηση.

1. *Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει κατά σημείο** στην f τότε το συμβολίζουμε με*

$$f_n \longrightarrow f.$$

2. *Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην f τότε το συμβολίζουμε με*

$$f_n \Longrightarrow f.$$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ και έστω και $f : X \to \mathbb{C}$ με $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στην f στον $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ τότε το συμβολίζουμε με

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||_1} f.$$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου,$f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια άλλη μετρήσιμη συνάρτηση.

Λέμε ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***συγκλίνει κατά μέτρο*** *στην* f *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ισοδύναμα,λέμε ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***συγκλίνει κατά μέτρο*** *στην* f *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *και κάθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \delta.$$

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*
Λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***είναι κατά μετρο Cauchy*** *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Ισοδύναμα,η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *λέμε ότι* ***είναι κατά μετρο Cauchy*** *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *και καθε* $\delta > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n, m \geq n_0$ *να ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) < \delta.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου,*$f_n : X \to \mathbb{C}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f : X \to \mathbb{C}$ *μια άλλη μετρήσιμη συνάρτηση. Αν* $f_n \to f$ *κατά μέτρο τότε η* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι κατά μέτρο Cauchy.*

Απόδειξη.

Αρχικά αν πάρουμε τυχόν $\epsilon > 0$ *έχουμε ότι για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\} = \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\})$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right)$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right)$$

και άρα παίρνοντας όριο $n, m \to \infty$ έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

αφού οι δύο προσθετέοι στο δεξί μέλος τείνουν στο 0(γιατί $f_n \to f$ κατά μέτρο).

Αφού όμως το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω και $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων όπου $f_n \to f$ κατά μέτρο και $f_n \to g$ κατά μέτρο,όπου $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες. Τότε $f = g$ μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $\epsilon > 0$ τυχόν,τότε

$$0 \leq \mu(\{x \in X : |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\} = \mu(\{x \in X : |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \quad (17)$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού όμως $f_n \to f$ κατά μέτρο και $f_n \to g$ κατά μέτρο,έπεται ότι

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0$$

και

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0.$$

Τελικα απο την (18) έπεται ότι

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} = 0 \quad (18)$$

για κάθε $\epsilon > 0$ *αφού αυτό επιλέχθηκε τυχόν.*

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \{x \in X : |f(x) - g(x)| \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

και άρα

$$0 \leq \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{19}$$

όπου

$$A_n = \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όμως

$$\mu(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και άρα απο την (19)*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

και άρα $f = g$ μ*-σχεδόν παντού.*

Πρόταση (Ανισότητα Markov).

Αν $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *είναι ένας χώρος μέτρου και* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$*.Τότε για κάθε* $a > 0$ *ισχύει*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int |f| \, d\mu.$$

Απόδειξη.

Έστω $a > 0$ *και τότε*

$$\int |f|\, d\mu = \int_{[|f| \le a]} |f|\, d\mu + \int_{[|f|<a]} |f|\, d\mu$$

$$\ge \int_{[|f| \ge a]} |f|\, d\mu$$

$$\ge \int_{[|f| \ge a]} a\, d\mu$$

$$= a\mu(\{x \in X : |f(x)| \ge a\})$$

και άρα

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \ge a\}) \le \frac{1}{a} \int |f|\, d\mu.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου,* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *ακολουθία συναρτήσεων στον* $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *και έστω και* $f : X \to \mathbb{C}$ *με* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Αν

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||_1} f$$

τότε $f_n \to f$ *κατά μέτρο.*

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $\epsilon > 0$ *τότε απο την Ανισότητα Markov έχουμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon} ||f_n - f||_1$$

και άρα παίρνοντας όριο $n \to \infty$*,αφού*

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||_1} f$$

,έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Αφού όμως το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο.*

Άσκηση .

Να εξετάσετε ως προς τα διάφορα είδη σύγκλισης τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων στον $(0,\infty)$:

1.
$$f_n = \frac{1}{n}\mathcal{X}_{(0,n)}.$$

2.
$$g_n = \mathcal{X}_{(n,n+1)}.$$

3.
$$h_n = n\mathcal{X}_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}.$$

4. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n = 2^k + j$ *όπου* $0 \leq j < 2^n$ *ορίζουμε*
$$w_n = \mathcal{X}_{\left[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}\right]}.$$

Λύση 1. 1. *Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

και άρα
$$f_n \Longrightarrow f = 0.$$

Επομένως έχουμε ότι και
$$f_n \longrightarrow f = 0.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*
$$\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n}n = 1$$

και άρα

$$f_n \nrightarrow f = 0$$

στον L^1.

Τέλος παρατηρούμε ότι αν πάρουμε τυχόν $\epsilon > 0$ *έχουμε ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει ότι*

$$\frac{1}{n} < \epsilon \implies |h_n(x)| < \epsilon$$

για κάθε $x \in (0, \infty)$.

Επομένως έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ *έχουμε ότι*

$$\mu(\{x \in (0, \infty) : |f_n(x)| > \epsilon) = 0 \to 0$$

και άρα

$$f_n \longrightarrow f = 0$$

κατά μέτρο.

2. *Αρχικά παρατηρούμε για τυχόν* $x \in (0, +\infty)$ *υπάρχει* $n_x \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$x \in (n_x, n_x + 1)$$

και τότε για κάθε $n \geq n_x$ *έχουμε ότι*

$$x \notin (n, n+1) \implies g_n(x) = 0 \longrightarrow 0$$

και άρα τελικά

$$g_n \longrightarrow g = 0.$$

Απο την άλλη αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$||g_n||_\infty = \sup_{x \in [0,+\infty)} |g_n(x)| \geq \left| g\left(\frac{2n+1}{2}\right) \right| = 1$$

έχουμε ότι

$$g_n \not\rightrightarrows g = 0.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$\int g_n \, d\lambda = 1$$

και άρα

$$g_n \nrightarrow g = 0$$

στον L^1.

3. *Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$||h_n||_\infty = \sup_{x \in [0,+\infty)} |h_n(x)| \geq \left| h\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1$$

και άρα

$$h_n \not\rightrightarrows h = 0.$$

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x \in (0, +\infty)$ *έχουμε ότι υπάρχει* $n_x \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq n_x$ *να ισχύει ότι*

$$\frac{1}{n} < x \implies h_n(x) = 0 \longrightarrow 0$$

και άρα

$$h_n \longrightarrow h = 0.$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *παρατηρούμε ότι*

$$\int h_n \, d\lambda = n\frac{1}{n} = 1$$

και άρα

$$h_n \nrightarrow h = 0$$

στον L^1*. Εύκολα παρατηρούμε ότι* $h_n \longrightarrow h = 0$ *κατά μέτρο.*

4. *Παρατηρούμε ότι για κάθε* $x \in (0, \infty)$ *υπάρχουν υπακολουθίες* (w_{k_n}) *και* (w_{l_n}) *της* (w_n) *ώστε*

$$w_{k_n}(x) \to 0$$

και

$$w_{l_n}(x) \to 1$$

και άρα απο αυτό έπεται ότι η (w_n) *δεν συγκλίνει κατά σημείο και άρα ούτε και ομοιόμορφα στο* $(0, \infty)$ *(Η εξήγηση του παραπάνω ισχυρισμού βασίζεται στο ότι για τυχόν* $x \in (0, \infty)$ *σε κάθε βήμα υπάρχει ένα ολόκληρο διάστημα που το* x *θα είναι μέσα σε αυτό και άρα η συνάρτηση θα δίνει την τιμή 1 και ένα άλλο που δεν βρίσκεται μέσα σε αυτό και άρα η συνάρτηση είναι 0).*
Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *με* $n = 2^k + j$ *και* $0 \leq j < 2^n$ *έχουμε ότι*

$$\int w_n \, d\lambda = \frac{1}{2^k}$$

και άρα παίρνοντας όριο $n \to \infty$ *αφού τότε και* $k \to \infty$ *έπεται ότι*

$$w_n \xrightarrow{||\cdot||_1} 0.$$

*Απο πορηγούμενη **Πρόταση** έπεται ότι και*

$$w_n \longrightarrow w$$

κατά μέτρο.

Λήμμα (Λήμμα Borel-Cantelli)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *μια ακολουθία απο την σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}$ *με*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Τότε

$$\mu(\limsup E_n) = 0.$$

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε αρχικά την ακολουθία συνόλων

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$*,τότε έχουμε ότι*

$$0 \leq \mu(\limsup E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \qquad (20)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

έπεται ότι

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \longrightarrow 0$$

και άρα απο την (17) έχουμε τελικά ότι

$$\mu(\limsup E_n) = 0.$$

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου και έστω και* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *μια ακολουθία μετρήσιμων* *συναρτήσεων που είναι κατά μέτρο Cauchy.*

Τότε υπάρχει $f : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμη συνάρτηση όπου* $f_n \to f$ *κατά μέτρο.Επίσης υπάρχει υπακολουθία* $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *της* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *όπου* $f_{k_n} \longrightarrow f$ μ*-σχεδόν παντού.*

Απόδειξη.

Αρχικά αφού η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι κατά μέτρο Cauchy έπεται ότι για κάθε* $l \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $k_l \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n, m \geq k_l$ *να ισχύει ότι*

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^l}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^l}. \tag{21}$$

Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε την ακολουθία (k_l) *να είναι γνησίως αύξουσα.*

Θέτουμε τώρα

$$E_l = \left\{x \in X : |f_{k_l}(x) - f_{k_{l+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^l}\right\}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ *και απο την (21) έχουμε ότι*

$$\mu(E_l) < \frac{1}{2^l}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$ *και άρα*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(E_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 < \infty.$$

Τότε όμως απο το Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι

$$\mu(\limsup E_l) = 0.$$

Παρτηρούμε όμως ότι

$$(\limsup E_l)^c = \liminf E_l^c = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=l}^{\infty} E_n^c$$

και άρα αν $x \notin \limsup E_l$ *τότε έχουμε ότι υπάρχει* $l_x \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \geq l_x$ *να* ισχύει ότι

$$x \notin E_n^c \implies |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+1}}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Τότε όμως αν πάρουμε $\epsilon > 0$ τότε έχουμε ότι υπάρχει l' τέτοιο ώστε

$$\sum_{j=l'}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \epsilon.$$

Άρα αν θέσουμε $l_0 = \max\{l_x, l'\}$ τότε για $n > m \geq l_0$ ισχύει ότι

$$|f_{k_n}(x) - f_{k_m}(x)| = \left| \sum_{j=m}^{n-1} f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x) \right| \leq \sum_{j=m}^{n-1} |f_{k_j}(x) - f_{k_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq \sum_{j=l'}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \epsilon$$

και άρα αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν η $(f_{k_l}(x))$ είναι βασική ακολουθία.

Επομένως για $x \notin E_l$ έχουμε ότι η ακολουθία $(f_{k_l}(x))$ είναι μια βασική ακολουθία στο $\mathbb{C}$ και άρα και συγκλίνουσα αφού ο $\mathbb{C}$ είναι πλήρης.

Άρα υπάρχει $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη με

$$f_{k_l} \longrightarrow f$$

μ-σχεδόν παντού,όπου $f = 0$ στο E_l^c.

Τώρα έστω $\epsilon > 0$ και έστω και $l_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2^{l_0 - 1}} < \epsilon$$

και τότε παρατηρούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{l=l_0}^{\infty} E_l\right) \leq \sum_{l=l_0}^{\infty} \mu(E_l) \leq \sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l_0} - 1} < \epsilon.$$

Όμως για κάθε $l \geq l_0$ *έχουμε ότι*

$$\{x \in X : |f_{k_l}(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset \bigcup_{l=l_0}^{\infty} E_l$$

και άρα

$$\mu(\{x \in X : |f_{k_l}(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu\left(\bigcup_{l=l_0}^{\infty} E_l\right) < \epsilon$$

και άρα αφού το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν,έπεται ότι*

$$f_{k_l} \longrightarrow f$$

κατά μέτρο.

Τελος παρατηρούμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f_l(x) - f_{k_l}(x)| \geq \epsilon\}) = \mu(\{x \in X : |f_l(x) - f_{k_l}(x) + f_{k_l}(x) - f(x)| \geq \epsilon\})$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_l(x) - f_{k_l}(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f_{k_l}(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και αφού όμως η* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι Cauchy κατά μέτρο,έπεται ότι*

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_l(x) - f_{k_l}(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0.$$

και αφού και

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_{k_l}(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0$$

έπεται τελικά ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_l(x) - f_{k_l}(x)| \geq \epsilon\}) \longrightarrow 0$$

και άρα $f_n \longrightarrow f$ *κατά μέτρο.*

Θεώρημα (Θεώρημα Egorov)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος πεπερασμένου μέτρου και έστω και* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμες* *συναρτήσεις με* $f_n \longrightarrow f$ *μ-σχεδόν παντού. Τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $E \in \mathcal{F}$ *τέτοιο ώστε* $\mu(E) < \epsilon$ *και* $f_n \Longrightarrow f$ *στο* E^c.

Απόδειξη.

Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ *θεωρούμε τα σύνολα*

$$E_{n,k} = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι η ακολουθία* $(E_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ *είναι φθίνουσα και άρα απο την συνέχεια του μέτρου αφού και* $\mu(X) < \infty$ *έχουμε ότι*

$$\lim_n \mu(E_{n,k}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} \right).$$

Όμως αφού $f_n \to f$ *μ-σχεδόν παντού έπεται ότι*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} \right) = 0$$

και άρα και

$$\lim_n \mu(E_{n,k}) = 0.$$

Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $n_k \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geq n_k$ *να ισχύει ότι*

$$\mu(E_{n,k}) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

και άρα

$$\mu(E_{n_k,k}) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και αν θέσουμε τώρα*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k} \in \mathcal{F}$$

τότε έχουμε ότι

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Επίσης

$$E^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^c_{n_k,k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_k}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

και άρα $f_n \Longrightarrow f$ *στο* E^c.

2.5 Μέτρα γινόμενα

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ δύο χώροι μέτρου και τότε έχουμε ορίσει την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ και σκοπός μας είναι να ορίσουμε ένα μέτρο πάνω σε αυτήν που θα το ονομάσουμε μέτρο γινόμενο.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}$$

και θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι elementary οικογένεια.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, (Y, \mathcal{G})$ *δύο μετρήσιμοι χώροι και έστω και η οικογένεια*

$$\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\} \subset X \times Y.$$

Τότε η $\mathcal{E}$ *είναι elementary οικογένεια.*

Απόδειξη.

Αρχικα παρατηρούμε ότι

$$X \times Y \in \mathcal{E}$$

και άρα η $\mathcal{E}$ *είναι μη κενή.*

Παρατηρούμε επίσης ότι αν πάρουμε $C_1 = A_1 \times B_1$ *και* $C_2 = A_2 \times B_2$ *στοιχεία απο την* $\mathcal{E}$*,τότε*

$$C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{E}$$

αφού οι $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *είναι σ-άλγεβρες και άρα* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ *και* $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}$.
Απο την άλλη παρατηρούμε γεωμετρικά ότι

$$C_1^c = (A_1^c \times B_1) \cup (A_1 \times B_1^c) \cup (A_1^c \times B_1^c)$$

όπου οι τρείς συνιστώσες είναι ξένα ανά δύο σύνολα απο την $\mathcal{E}$ *και άρα τελικά η* $\mathcal{E}$ *είναι elementary.*

Πόρισμα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, (Y, \mathcal{G})$ *δύο μετρήσιμοι χώροι και έστω και η οικογένεια*

$$\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\} \subset X \times Y.$$

Αν $\mathcal{A}$ *είναι η οικογένεια τωνν πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της* $\mathcal{E}$*,τότε η* $\mathcal{A}$ *είναι άλγεβρα και*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}.$$

Λήμμα.

Αν $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{E}$ *με*

$$E_n = A_n \times B_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$*,τότε*

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$$

όπου $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *με*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$.

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{E}$ *με*

$$E_n = A_n \times B_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *τότε έχουμε ότι αν θέσουμε*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

και

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$$

ισχύει ότι

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$$

και άρα

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \int \mathcal{X}_A(x)\, d\mu(x) \cdot \int \mathcal{X}_B(y)\, d\nu(y) = \int \int \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int \int \mathcal{X}_{A \times B}(x, y) d\mu(x)\, d\nu(y)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού και οι ακολουθίες $(A_n)_{n=1}^{\infty}, (B_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθίες ξένων ανά δύο συνόλων,έπεται ότι*

$$\mathcal{X}_{A \times B} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_n \times B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{E_n}.$$

Επίσης η συνάρτηση

$$x \longrightarrow \mathcal{X}_{B_n}(y)\mathcal{X}_{A_n}(x)$$

για κάθε $y \in Y$ *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη και η συνάρτηση*

$$y \longrightarrow \mathcal{X}_{A_n}(x)\mathcal{X}_{B_n}(y)$$

για κάθε $x \in X$ *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη και άρα απο το Θεώρημα Beppo Levi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \int \mathcal{X}_{B_n}(y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mu(A_n)\mathcal{X}_{B_n}(y)\, d\nu(y)$$

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\mathcal{X}_{B_n}(y)\, d\nu(y)$$

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{B_n}(y) \left(\int \mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \right)\, d\nu(y)$$

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int \mathcal{X}_{B_n}(y)\mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \right)\, d\nu(y)$$

$$= \int \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{B_n}(y)\mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_n \times B_n}(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \int \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A \times B}(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

$$= \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ *δύο χώροι μέτρου και έστω και* $\mathcal{E}$ *η elementary οικογένεια που ορίσαμε παραπάνω και* $\mathcal{A}$ *η παραγόμενη άλγεβρα απο αυτήν.*

Ορίζουμε επίσης $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$*,όπου*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε $A \times B \in \mathcal{E}$ *και* $\pi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *με*

$$\pi\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \rho(E_k)$$

για κάθε $(E_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{E}$ *ξένα ανά δύο.*

Τότε η π *είναι καλά ορισμένο προμέτρο στην* $\mathcal{A}$ *που επεκτείνει τη* ρ.

Πόρισμα.

Η συνάρτηση $\pi^* : \mathcal{P}(X \times Y) \to [0, +\infty]$ *όπου*

$$\pi^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \pi(E_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, (E_k) \subset \mathcal{E} \text{ ξένα ανά δύο}\right\}$$

για κάθε $A \subset X \times Y$ *είναι εξωτερικό μέτρο και αν* $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ *τότε*

$$\pi^*|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$$

είναι μέτρο στην $\mathcal{H}$ *που επεκτείνει το προμέτρο* π *και το συμβολίζουμε με* $\mu \otimes \nu$.

Ειδικότερα,για κάθε $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ *ισχύει ότι*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Απόδειξη.

Η προηγούμενη ***Πρόταση*** *και το* ***Θεώρημα*** *επέκτασης του Καραθεοδωρή μας δίνουν το ζητούμενο κατά τετριμμένο τρόπο.*

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *δύο χώροι μέτρου. Αν τα* μ, ν *είναι σ-πεπερασμένα μέτρα τότε και το* $\mu \otimes \nu$ *είναι σ-πεπερασμένο μέτρο στον* $(X \times Y, \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G})$.

Επομένως στην περίπτωση που τα μ, ν *είναι σ-πεπερασμένα το* $\mu \otimes \nu$ *είναι το μοναδικό μέτρο στην* $\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ *που επεκτείνει το προμέτρο* π *και έχει την ιδιότητα* $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$*,για κάθε* $A \in \mathcal{F}$ *και* $B \in \mathcal{G}$.

Η παραπάνω διαδικάσια γενικεύεται και όταν έχουμε πεπερασμένους το πλήθος χώρους μέτρου και αυτο μας οδηγεί τελικά στον γενικευμένο ορισμό του μέτρου γινόμενο.

Ορισμός .

Έστω $(X_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)_{i=1}^n$ *μια πεπερασμένη οικογένεια χώρων μέτρου.Τότε το μέτρο που κατασκευάσαμε*

$$\bigotimes_{i=1}^n \mu_i : \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \to [0, +\infty]$$

όπου για κάθε $(A_i)_{i=1}^n$ *με* $A_i \in \mathcal{F}_i$ *ικανοποιεί την*

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n \mu_i \right) \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i)$$

ονομάζεται ***μέτρο γινόμενο*** *και αν κάθε* μ_i *είναι σ-πεπερασμένο μέτρο τότε είναι το μοναδικό μέτρο με τις παραπάνω ιδιότητες.*

Ορισμός .

Έστω X, Y *σύνολα και έστω και* $E \subset X \times Y$ *και έστω και* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *μια συνάρτηση.*

1. *Ορίζουμε για κάθε* $x \in X$ *το* ***x-section του E*** *ώς* $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$.

2. *Ορίζουμε για κάθε* $y \in Y$ *το* ***y-section του E*** *ώς* $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.

3. *Ορίζουμε για κάθε* $x \in X$ *το* ***x-section της f*** *ως την συνάρτηση* $f_x : Y \to \mathbb{C}$ *όπου* $f_x(y) = f(x, y)$,*για κάθε* $y \in Y$.

4. *Ορίζουμε για κάθε* $y \in Y$ *το* ***y-section της f*** *ως την συνάρτηση* $f^y : X \to \mathbb{C}$ *όπου* $f_y(x) = f(x, y)$,*για κάθε* $x \in X$.

Πρόταση .

Έστω X, Y *σύνολα,*$E \subset X \times Y$ *και έστω και* $x \in X, y \in Y$. *Τότε ισχύουν τα εξής*

$$(\mathcal{X}_E)_x = \mathcal{X}_{E_x} \quad \text{και} \quad (\mathcal{X}_E)^y = \mathcal{X}_{E^y}.$$

Απόδειξη.

Πραγματι παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in Y$.

$$\mathcal{X}_{E_x}(y) = 1 \iff y \in E_x \iff (x, y) \in E \iff (\mathcal{X}_E)_x(y) = \mathcal{X}_E(x, y) = 1$$

και όμοια και για το άλλο.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ *δύο μετρήσιμοι χώροι.Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. *Αν* $E \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ *τότε για κάθε* $x \in X$ *και* $y \in Y$ *ισχύει ότι* $E_x \in \mathcal{G}$ *και* $E^y \in \mathcal{F}$.
2. *Έστω* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *μια* $\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$*-μετρήσιμη συνάρτηση.Τότε για κάθε* $x \in X$ *η* f_x *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη και για κάθε* $y \in Y$ *η* f^y *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη.*

Απόδειξη.

1. *Αρχικά θεωρούμε την κλάση των ΄καλών συνόλων΄ ως προσ την ιδιότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και έστω*

$$\mathcal{R} = \{E \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G} : E_x \in \mathcal{G}, E^y \in \mathcal{F} \ \text{για κάθε} \ x \in X, y \in Y\}$$

αυτή. Αν αποδείξουμε ότι αυτή είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ *τότε απο τον ορισμό της σ-άλγεβρας γινόμενο,θα έχουμε ότι*

$$\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G} \implies \mathcal{R} = \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$$

που θα μας δώσει το ζητούμενο.

Αρχικκα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε το $E = X \times Y \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ *τότε έχουμε ότι*

$$E_x = Y \in \mathcal{G} \ \text{και} \ E^y = X \in \mathcal{F}$$

για κάθε $x \in X$ *και* $y \in Y$ *και άρα* $E \in \mathcal{R}$.

Έστω τώρα $E \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$ *και τότε παρατηροούμε ότι για το συμπλήρωμα του* E^c *ισχύει* *ότι για κάθε* $x \in X$

$$(E^c)_x = \{y \in Y : (x,y) \in E^c\} = \{y \in Y : y \notin E_x\} = (E_x)^c \in \mathcal{G}$$

αφού $E_x \in \mathcal{G}$ *και η* $\mathcal{G}$ *είναι σ-άλγεβρα και όμοια για κάθε* $y \in Y$

$$(E^c)^y = (E^y)^c \in \mathcal{F}$$

αφού $E^y \in \mathcal{F}$ *και η* $\mathcal{F}$ *είναι σ-άλγεβρα. Τελικά* $E^c \in \mathcal{R}$.

Έστω τώρα ακολουθία (E_n) *συνόλων απο την* $\mathcal{R}$ *και τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και κάθε* $x \in X, y \in Y$ *ισχύει ότι*

$$(E_n)_x \in \mathcal{G} \;\; \textit{και} \;\; (E_n)^y \in \mathcal{F}.$$

Τότε όμως παρατηρούμε ότι αν $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *τότε για* $x \in X$

$$y \in E_x \iff (x,y) \in E \iff \textit{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} : (x,y) \in E_{n_0}$$

$$\iff \textit{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} : y \in (E_{n_0})_x$$

$$\iff y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x.$$

και άρα

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{G}$$

για κάθε $x \in X$*,αφού η* $\mathcal{G}$ *είναι σ-άλγεβρα.*

Επίσης με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι για κάθε $y \in Y$

$$E^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^y \in \mathcal{F}$$

και άρα τελικά $E \in \mathcal{R}$ *και η* $\mathcal{R}$ *είναι σ-άλγεβρα.*

Αν τώρα $E = A \times B$ *όπου* $A \in \mathcal{F}$ *και* $B \in \mathcal{G}$ *τότε*

$$E_x = B \in \mathcal{G}$$

και

$$E^y = A \in \mathcal{F}$$

για κάθε $x \in X, y \in Y$ *και άρα* $E \in \mathcal{R}$ *και αφού το* E *ήταν τυχόν*

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subset \mathcal{R}.$$

2. *Έστω* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ *και τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $x \in X$ *ισχύει ότι*

$$(f_x)^{-1}(B) = \{y \in Y : f_x(y) \in B\} = \{y \in Y : f(x,y) \in B\} = \{y \in Y : (x,y) \in f^{-1}(B)\}$$

$$= (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{G}$$

απο το 1. ερώτημα,αφού η f *είναι μετρήσιμη και άρα* $f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$.

Όμοια για κάθε $y \in Y$ *έχουμε ότι*

$$(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y \in \mathcal{F}$$

γιατί η f *είναι μετρήσιμη και άρα* $f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$.

Τελικά οι f_x, f^y *είναι μετρήσιμες για κάθε* $x \in X$ *και κάθε* $y \in Y$.

Ορισμός .

Έστω X *σύνολο και έστω και μια κλάση* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$.*Τότε η* $\mathcal{M}$ *καλείται* ***μονότονη*** *ικανοποιεί τις εξής δύο ιδιότητες:*

1. *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων απο την* $\mathcal{M}$,*τότε* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

2. *Αν* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων απο την* $\mathcal{M}$,*τότε* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Παρατηρήσεις .

1. *Κάθε σ-άλγεβρα είναι μονότονη κλάση και αυτό είναι άμεσο αφού καθέ σ-άλγεβρα περιέχει αριθμήσιμες ενώσεις ανεξαρτήτως αν προέρχονται απο φθίνουσες ή αύξουσες ακολουθίες*

2. *Αν X είναι ένα σύνολο και $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια μονότονων κλάσεων,τότε και η $\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i$ είναι μονότονη κλάση.*

Ορισμός .

Έστω X σύνολο και $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(X)$.Ορίζουμε

$$\mathcal{M}(\mathcal{C})=\bigcap\{\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X):\mathcal{C}\subset\mathcal{M},\mathcal{M}:\textit{μονότονη κλάση}\}$$

την ***παραγόμενη μονότονη κλάση της*** *$\mathcal{C}$.*

Παρατηρήσεις .

Έστω X σύνολο και $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(X)$.

1. *Η $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ είναι μονότονη κλάση(απο την προηγούμενη παρατήρηση).*

2. *Αν $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ είναι μια άλλη μονότονη κλάση με $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}$,τότε $\mathcal{M}(\mathcal{C})\subset\mathcal{M}$,δηλαδή η $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ είναι η μικρότερη μονότονη κλάση που περίεχει την $\mathcal{C}$.*

3. *Ισχύει ότι αφού κάθε σ-άλγεβρα είναι μονότονη κλάση και η $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ είναι μικρότερη μονότονη κλάση που την περιέχει,ότι $\mathcal{M}(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{C})$.*

4. *Αν $\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ είναι μονότονη άλγεβρα,τότε η $\mathcal{M}$ είναι και σ-άλγεβρα(δείχουμε απλά ότι τότε ειναι κλειστή ως πρός τις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις και άρα απο* ***Πρόταση*** *του 1ου Κεφαλαίου έπεται ότι θα είναι και σ-άλγεβρα).*

Λήμμα.

Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ άλγεβρα.Τότε $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{A})$.

Θεώρημα.

Έστω $(X,\mathcal{F},\mu),(Y,\mathcal{G},\nu)$ *δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και έστω και* $E \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$.

Ορίζουμε $h_E : Y \to [0,+\infty]$ *όπου*

$$h_E(y) = \mu(E^y)$$

για κάθε $y \in Y$ *και* $g_E : X \to [0,+\infty]$ *με*

$$g_E(x) = \nu(E_x)$$

για κάθε $x \in X$.

Τότε η h_E *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη,η* g_E *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη και*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int g_E(x)\, d\mu(x) = \int h_E(y)\, d\nu(y).$$

Απόδειξη.

Αρχικά έστω $X_0 \in \mathcal{F}$ *και* $Y_0 \in \mathcal{G}$ *με* $\mu(X_0) < \infty$ *και* $\nu(X_0) < \infty$ *και έστω και* $C_0 = X_0 \times Y_0 \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ *ισχύει ότι η* $h_{E\cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη και η* $g_{E\cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη και ισχύει ότι*

$$\int g_{E\cap C_0}(x)\, d\mu(x) = \int h_{E\cap C_0}(y)\, d\nu(y). \tag{22}$$

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G} : h_{E\cap C_0} \text{ είναι } \mathcal{G}\text{-μετρήσιμη}, g_{E\cap C_0} \text{ είναι } \mathcal{F}\text{ -μετρήσιμη και ικανοποιείται η (22)}\}.$$

Ισχυρισμός 1:*Για κάθε* $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ *ισχύει* $A \times B \in \mathcal{M}$.

Παρατηρούμε ότι αν $A_0 = A \cap X_0$ *και* $B_0 = B \cap Y_0$ *τότε έχουμε ότι*

$$(A \times B) \cap C_0 = (A \times B) \cap (X_0 \times Y_0) = A_0 \times B_0$$

και άρα

$$g_{(A\times B)\cap C_0} = g_{A_0 \times B_0} = \nu(B_0)\mathcal{X}_{A_0}$$

και

$$h_{(A\times B)\cap C_0} = h_{A_0 \times B_0} = \mu(A_0)\mathcal{X}_{B_0}.$$

Αφού όμως $A_0 \in \mathcal{F}$ *και* $B_0 \in \mathcal{G}$ *έπεται ότι η* $h_{(A\times B)\cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη και η* $g_{(A\times B)\cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη.*
Επίσης παρατηρούμε ότι

$$(\mu \otimes \nu)(A_0 \times B_0) = \mu(A_0)\nu(B_0) = \mu(A_0)\int \mathcal{X}_{B_0}(y)\, d\nu(y) = \int h_{A_0\times B_0}(y)\, d\nu(y)$$

και

$$(\mu \otimes \nu)(A_0 \times B_0) = \mu(A_0)\nu(B_0) = \nu(B_0)\int \mathcal{X}_{A_0}(x)\, d\mu(x) = \int g_{A_0\times B_0}(x)\, d\mu(x)$$

και άρα ικανοποιείται και η (22) και τελικά

$$(A \times B) \cap C_0 \in \mathcal{M}.$$

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια $\mathcal{A}$ *των ενώσεων ξένων ορθογωνίων η οποία είναι άλγεβρα υποσυνόλων του* $X \times Y$ *και παρατηρούμε ότι*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}.$$

Ισχυρισμός 2:*Η οικογένεια* $\mathcal{M}$ *είναι μονότονη κλάση.*

Έστω $(E_n) \subset \mathcal{M}$ *μια φθίσουσα ακολουθία συνόλων και τότε παρατηρούμε ότι αν θέσουμε*

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

τότε αν πάρουμε $x \in X$ *έχουμε ότι η* $(E_n)_x$ *είναι επίσης φθίνουσα ακολουθία συνόλων αφού*

$$y \in (E_n)_x \implies (x,y) \in E_n \subset E_{n+1} \implies (x,y) \in E_{n+1} \implies y \in (E_{n+1})_x$$

και επίσης έχουμε ότι $E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ *γιατί*

$$y \in E_x \iff (x,y) \in E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \iff (x,y) \in E_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \iff y \in (E_n)_x \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)_x.$$

Επομένως απο αυτό έπεται ότι και η $(E_n \cap C_0)_x$ *είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων και*

$$(E \cap C_0)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap C_0)_x$$

και άρα απο την συνέχεια του μέτρου έχουμε ότι

$$\nu((E_n \cap C_0)_x) \longrightarrow \nu((E \cap C_0)_x) \implies g_{E_n \cap C_0}(x) \longrightarrow g_{E \cap C_0}(x)$$

για κάθε $x \in X$*,αφού αυτό επιλέχθηκε τυχόν.*

Όμως αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχυέι ότι* $E_n \in \mathcal{M}$*,έπεται ότι η οι* $g_{E_n \cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμες και άρα απο* ***Πρόταση*** *έπεται ότι και η κατα σημείο συνάρτηση* $g_{E \cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη.*

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq g_{E_n \cap C_0}(x) = \nu((E_n \cap C_0)_x) \leq \nu((C_0)_x) = \nu(Y_0)\mathcal{X}_{X_0}(x) = g(x)$$

για κάθε $x \in X$*,και αφού* $\mu(X_0) < +\infty$ *έπεται ότι η* g *είναι ολοκληρώσιμη και άρα απο το*

Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης και την συνέχεια του μέτρου έχουμε ότι

$$\int g_{E\cap C_0}\, d\mu = \lim_n \int g_{E_n\cap C_0}\, d\mu = \lim_n (\mu\otimes\nu)(E_n\cap C_0) = (\mu\times\nu)(E\cap C_0).$$

Με όμοιο τρόπο με παραπάνω αποδεικνύουμε ότι η $h_{E\cap C_0}$ *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη και*

$$(\mu\times\nu)(E\cap C_0) = \int h_{E\cap C_0}\, d\nu$$

και τελικά $E\in\mathcal{M}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και ότι αν (E_n) *είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων,τότε*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$$

και τελικά η $\mathcal{M}$ *είναι μονότονη κλάση.*

Αφού τώρα η $\mathcal{M}$ *είναι μονότονη κλάση και* $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$*,έπεται ότι*

$$\mathcal{M}(A)\subset\mathcal{M}\subset\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{G}.$$

Αφού όμως η $\mathcal{A}$ *είναι άλγεβρα έπεται απο* ***Λήμμα*** *ότι*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}\bigotimes\mathcal{G}$$

και άρα τελικά

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}\bigotimes\mathcal{G}.$$

Έστω τώρα $E\in\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{G}$ *και τότε έχουμε ότι αφού οι χώροι μέτρου είναι σ-πεπερασμένοι έχουμε ότι και ο χώρος γινόμενο είναι σ-πεπερασμένος και επομένως υπάρχει αύξουσα ακολουθία* $(C_n)\subset\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ *μετρήσιμων ορθογωνίων ώστε*

$$X\times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

και

$$(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty.$$

Τότε

$$g_{C_n \cap E} \longrightarrow g_E$$

και

$$h_{C_n \cap E} \longrightarrow h_E$$

απο την συνέχεια του μέτρου,γιατί η $(E \cap C_n)$ *είναι αύξουσα ακολουθία και*

$$E = E \cap (X \times Y) = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap C_n)$$

απο όπου έπεται ότι

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap E)_x$$

για κάθε $x \in X$ *και*

$$E^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap E)^y$$

για κάθε $y \in Y$ *και επίσης οι* $(C_n \cap E)_x, (C_n \cap E)^y$ *είναι αύξουσες ακολουθίες για κάθε* $x \in X$ *και* $y \in Y$ *αντίστοιχα.*

Θεώρημα.

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ *δύο σ-πεπρασμένοι χώροι μέτρου.*

1. *(Tonelli).Αν* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ *είναι* $\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}$*-μετρήσιμη,τότε αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις* $g : X \to [0, \infty]$ *όπου*

$$g(x) = \int f_x(y)\, d\nu(y)$$

   και $h : Y \to [0, +\infty]$ *με*

$$h(y) = \int f^y(x)\, d\mu(x)$$

τότε αυτές είναι μετρήσιμες και

$$\int\int f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int\left[\int f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int\left[\int f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x).$$

2. (Fubini).Αν $f \in L^1(\mu\otimes\nu)$ τότε $f_x \in L^1(\nu)$ μ-σχεδόν παντού και $f^y \in L^1(\mu)$ ν-σχεδόν παντού και οι σχεδόν παντού ορισμένες συναρτήσεις $g : X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int f_x(y)\, d\nu(y)$$

και $h : Y \to \mathbb{R}$ με

$$h(y) = \int f^y(x)\, d\mu(x)$$

είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int\int f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int\left[\int f(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int\left[\int f(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x).$$

Απόδειξη.

1. Αρχικα παρατηρούμε ότι αν η f είναι χαρακτηριστική συνάρτηση τότε απο την προηγούμενη ***Πρόταση*** έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

   Εύκολα τώρα αποδείκνύεται το ζητούμενο και όταν η f είναι απλή συνάρτηση.

   Αν τώρα $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ είναι μια $\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε απο ***Θεώρημα*** έχουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων (f_n) με $f_n \geq 0$ και

$$f_n \longrightarrow f.$$

   Τότε όμως για κάθε $x \in X$

$$(f_n)_x \longrightarrow f_x$$

   και για κάθε $y \in Y$

$$(f_n)^y \longrightarrow f^y$$

και οι $(f_n)_x, (f_n)^y$ *είναι αύξουσες ακολουθίες για κάθε* $x \in X, y \in Y$ *αντίστοιχα.*

Επομένως απο το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$g_n(x) = \int (f_n)_x \, d\nu \longrightarrow \int f_x \, d\nu = g(x)$$

$$h_n(y) = \int (f_n)^y \, d\mu \longrightarrow \int f^y \, d\mu = h(y)$$

και αφού οι g_n, h_n *είναι μετρήσιμες έπεται ότι και οι* g, h *είναι μετρήσιμες ως το κατα σημείο όριο τους.*

Τώρα αφού και οι $(h_n), (g_n)$ *είναι αύξουσες ακολουθίες μη αρνητικών συναρτήσεων εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης για αυτές παίρνουμε την ζητούμενη ισότητα.*

2. *Γνωρίζουμε ότι αν* $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ *τότε*

$$f = f^+ - f^-$$

όπου f^+, f^- *είναι μη αρνητικές και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και άρα εφαρμόζοντας Tonelli για αυτές αλλά και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε το ζητούμενο.*

Θεώρημα (Θεώρημα Fubini-Tonelli για πλήρεις χώρους μέτρου)**.**

Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu), (Y, \mathcal{G}, \nu)$ *δύο πλήρεις,σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και έστω και* $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ *η πλήρωση του χώρου μέτρου γινόμενο* $(X \times Y, \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$*.*

Τότε αν (α). $f \geq 0$ *ή (β).* $f \in L^1(\lambda)$ *τότε η* f_x *είναι* $\mathcal{G}$*-μετρήσιμη* μ*-σχεδόν παντού και η* f^y *είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη* ν*-σχεδόν παντού και στην περίπτωση (β). οι* f_x, f^y *είναι ολοκληρώσιμες σχεδόν παντού.*

Επίσης οι συναρτήσεις $x \to \int f_x \, d\nu$ *και* $y \to \int f^y \, d\mu$ *είναι μετρήσιμες και στην (β). περίπτωση είναι και ολοκληρώσιμες και ισχύει ότι*

$$\int f d\lambda = \int \int f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x)$$

2.6 Το n-διάστατο ολοκλήρωμα Lebesgue

Ορισμός .

Έστω $n \in \mathbb{N}$.Τότε με λ_n συμβολίζουμε την πλήρωση του μέτρου γινομένου $\lambda \otimes \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ και με $\mathcal{L}_n$ συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού του λ_n.

Τα στοιχεία του $\mathcal{L}_n$ καλούνται Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός .

Έστω $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$ ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^n$,όπου $T_i \in \mathcal{L}_1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.Τότε κάθε T_i καλείται πλέυρά του T.

Πρόταση .

Για κάθε $A \in \mathcal{L}_n$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ ορθογωνίων με $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(T_k) < \lambda_n(A) + \epsilon.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι ορίσαμε

$$\lambda_n(R_1 \times R_2 \times \cdots R_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(R_i)$$

για κάθε $R_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}$.

Τώρα αν θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathcal{E} = \{T \subset \mathbb{R}^n : T \text{ ορθογώνιο}\}$ τότε έχουμε ότι η $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ με

$$\lambda_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^*(T_k) : (T_k) \subset \mathcal{E}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \right\}$$

είναι εξωτερικό μέτρο. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\lambda_n^*|_{\sigma(\mathcal{E})}$ είναι μέτρο και ορίσαμε

$$\lambda_n = \overline{\lambda_n^*|_{\sigma(\mathcal{E})}}$$

και άρα απο το ϵ-χαρακτηρισμό του $\inf$ *έχουμε το ζητούμενο.*

Για το υπόλοιπο της παραγράφου αντί για λ_n θα γράφουμε λ για το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα.

Έστω $A \in \mathcal{L}_n$.

1. *Τότε $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U, U$ ανοιχτό$\}$.*
2. *Τότε $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A, K$ συμπαγές$\}$.*
3. *Τότε $A = A_1 \setminus N_1 = A_2 \cup N_2$,όπου $N_1, N_2 \in Null$,A_1 είναι G_δ και A_2 είναι F_σ.*
4. *Αν $\lambda(E) < +\infty$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και πεπερασμένη ακολουθία $(T_k)_{k=1}^n$ ορθογωνίων με πλευρές ανοιχτά διαστήματα,ώστε*

$$\lambda\left(A\triangle\left(\bigcup_{k=1}^{n} T_k\right)\right) < \epsilon.$$

Απόδειξη.

Η αποδείξη γίνεται με όμοιο τρόπο όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση και με χρήση της προηγούμενης πρότασης.

Θεώρημα.

Έστω $f \in L^1(\lambda)$.Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{T_k}$ απλή,όπου κάθε T_k είναι ορθογώνιο με πλευρές ανοιχτά διαστήματα και για την οποία ισχύει ότι

$$||f - \phi||_1 < \epsilon$$

και υπάρχει και g συνεχής με συμπαγή φορέα ώστε

$$||f - g||_1 < \epsilon.$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση.

Θεώρημα.

Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ και $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ όπου

$$\tau_a(x) = a + x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

1. *Αν $A \in \mathcal{L}_n$ τότε $\tau_a(A) \in \mathcal{L}_n$ και $\lambda(\tau_a(A)) = \lambda(A)$.*

2. *Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε $f \circ \tau_a$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.Επιπλέον αν $f \geq 0$ ή $f \in L^1(\lambda)$ τότε*

$$\int f \circ \tau_a \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Απόδειξη.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνάρτηση τ_a είναι 1-1 και επί και ισχύει ότι*

$$(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$$

και επίσης οι τ_a, τ_a^{-1} είναι συνεχείς συνάρτήσεις και άρα και $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-μετρήσιμη. Παρατηρούμε τώρα ότι αν

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$$

μετρήσιμο ορθογώνιο έχουμε ότι

$$\tau_a(A) = (a_1 + A_1) \times (a_2 + A_2) \times \cdots \times (a_n + A_n)$$

και συνεπώς αφού έχουμε αποδείξει ότι κάθε $a_i + A_i \in \mathcal{L}$ *και*

$$\lambda_1(a_i + A_i) = \lambda_1(A_i)$$

έχουμε ότι

$$\lambda(\tau_a(A)) = \lambda_1(a_1+A_1)\lambda_1(a_2+A_2)\cdots\lambda_1(a_n+A_n) = \lambda_1(A_1)\lambda_1(A_2)\cdots\lambda_1(A_n) = \lambda_n(A)$$

όπου λ_1 *είναι το μέτρο Lebesgue του* $\mathbb{R}$.

Έστω τώρα $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και τότε απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *έχουμε ότι*

$$\lambda(\tau_a(E)) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda(T_k) : (T_k) \in \mathcal{E}, \tau_a(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right\}$$

και αφού τώρα

$$\tau_a(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \iff \tau_{-a}\tau_a(E) = E \subset \tau_{-a}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right)$$

$$\iff E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau_{-a}(T_k)$$

όπου $\tau_{-a}(T_k)$ *είναι ορθογώνια και άρα*

$$\lambda(\tau_a(E)) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda(T_k) : (T_k) \in \mathcal{E}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right\} = \lambda(E).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για κάθε $N \in \mathcal{L}_n$ *για το οποίο υπάρχει* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *με* $N \subset B$ *και* $\lambda(B) = 0$,*έχουμε ότι*

$$\tau_a(N) \subset \tau_a(B)$$

και

$$\lambda(\tau_a(B)) = \lambda(B) = 0.$$

Τότϵ όμως λόγω πληρότητας έχουμϵ ότι

$$\lambda(\tau_a(N)) = 0 \text{ και } \tau_a(N) \in \mathcal{L}_n.$$

Επομένως έχουμϵ ότι αν $A \in \mathcal{L}_n$ *τότϵ υπάρχϵι* F *που ϵίναι* F_σ *και* $N \in \mathcal{L}_n$ *ξένα μϵ* $\lambda(N) = 0$ *και τέτοια ώστϵ*

$$A = F \cup N.$$

Τότϵ όμως έχουμϵ ότι

$$\tau_a(A) = \tau_a(F) \cup \tau_a(N)$$

όπου $\tau_a(F) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *αφού* $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και* $\tau_a(N) \in \mathcal{L}_n$ *απο τα παραπάνω.*
Επίσης τα $\tau_a(F), \tau_a(N)$ *ϵίναι ξένα αφού η* τ_a *ϵίναι 1-1 και* $\lambda(\tau_a(N)) = 0$.
Άρα

$$\lambda(\tau_a(A)) = \lambda(\tau_a(F)) = \lambda(F) = \lambda(F \cup N) = \lambda(A)$$

και άρα αποδϵίχθηκϵ.

2. *Έστω αρχικά* $E \in \mathcal{L}$ *και τότϵ έχουμϵ ότι* $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}_n$ *και άρα υπάρχουν* $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και* $N \in \mathcal{L}_n$ *ξένα,μϵ* $\lambda(N) = 0$ *και*

$$f^{-1}(E) = F \cup N$$

και άρα

$$(f \circ \tau_a)^{-1}(E) = \tau_a^{-1}(f^{-1}(E)) = \tau_a^{-1}(F \cup N) = \tau_a^{-1}(F) \cup \tau_a^{-1}(N).$$

Όμως έχουμϵ ότι η τ_a *ϵίναι* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *ϵίναι Borel μϵτρήσιμη και άρα* $\tau_a^{-1}(F) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και ϵπίσης*

$$\tau_a^{-1}(N) = \tau_{-a}(N) \implies \lambda(\tau_a^{-1}(N)) = \lambda(\tau_{-a}(N)) = \lambda(N) = 0$$

απο το πρώτο μέρος της απόδειξης και άρα τελικά

$$(f \circ \tau_a)^{-1}(E) \in \mathcal{L}_n$$

και άρα η $f \circ \tau_a$ *είναι Lebesgue μετρήσιμη.*

Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{L}_n$ *ισχύει ότι*

$$\int \mathcal{X}_E \circ \tau_a \, d\lambda = \int \mathcal{X}_E \, d\lambda.$$

γιατί έπειτα απο την γραμμικότητα του ολοκληρώματος θα ισχύει και για απλές συναρτήσεις και λόγω του ορισμόυ του ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις θα το έχουμε και για μη αρνητικές συναρτήσεις.

Παρατηρούμε όμως ότι αν $E \in \mathcal{L}_n$ *τότε έχουμε ότι*

$$\mathcal{X}_E \circ \tau_a(x) = 1 \iff \tau_a(x) \in E \iff x \in \tau_a^{-1} = \tau_{-a}(E) \iff \mathcal{X}_{\tau_{-a}(E)}(x) = 1$$

και άρα

$$\int \mathcal{X}_E \circ \tau_a \, d\lambda = \int \mathcal{X}_{\tau_{-a}(E)} \, d\lambda = \lambda(\tau_{-a}(E)) = \lambda(E) = \int \mathcal{X}_E \, d\lambda$$

απο το πρώτο μέρος της απόδειξης.

Ορισμός .

Με $GL(n, \mathbb{R})$ *συμβολίζουμε το σύνολο των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και ως συνήθως κάθε* $T \in GL(n, \mathbb{R})$ *ταυτίζεται με τον πίνακα* $A_T = (a_{ij})$ *όπου*

$$a_{ij} =< e_i, T(e_j) >$$

για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *και με κανόνα*

$$T((x_i)_{i=1}^n) = A_T x$$

όπου $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Για κάθε $T, S \in GL(n, \mathbb{R})$,*με* $\det T, \det S$ *συμβολίζουμε την ορίζουσα των* T, S *αντίστοιχα, και έχουμε ότι*

$$\det(T \circ S) = \det T \det S$$

Ορίζουμε επίσης

1.
$$Type\ 1 =$$
$$\{T \in GL(n, \mathbb{R}) : \text{υπάρχουν } j_0 \in [n], c \neq 0 \ \text{ ώστε } T((x_i)_{i=1}^n) = (x_1, \ldots, x_{j_0-1}, cx_{j_0}, x_{j_0+1}, \ldots, x_n)\}$$
όπου $\det T = c$ *για κάθε* T *που είναι* $Type\ 1$.

2.
$$Type\ 2 =$$
$$\{T \in GL(n, \mathbb{R}) : \text{υπάρχουν } k_0 \neq j_0, \ \text{ ώστε } T((x_i)_{i=1}^n) = (x_1, \ldots, x_{j_0-1}, x_{j_0}+x_{k_0}, x_{j_0+1}, \ldots, x_n)\}$$
όπου $\det T = 1$ *για κάθε* T *που είναι* $Type\ 2$.

3.
$$Type\ 3 =$$
$$\{T \in GL(n, \mathbb{R}) : \text{υπαρχουν } j_0 < k_0 \ \text{ ώστε } T((x_i)_{i=1}^n) = (x_1, \ldots, x_{j_0-1}, x_{k_0}, \ldots, x_{k_0-1}, x_{j_0}, \ldots, x_n)\}$$
όπου $\det T = -1$ *για κάθε* T *που είναι* $Type\ 3$.

Παρατηρήσεις .

Για κάθε $T \in GL(n, \mathbb{R})$ *υπάρχουν* $k \in \mathbb{N}$ *και* $S_1, \ldots, S_k \in GL(n, \mathbb{R})$ *που είναι των παραπάνω* *μορφών(Type 1, Type 2, Type 3) ώστε*

$$T = S_k \circ S_{k-1} \circ \cdots \circ S_1.$$

Πρόταση .

Έστω $f \in L^1(\lambda_1)$ *και* $a, c \in \mathbb{R}$ *με* $c \neq 0$.

Τότε

$$\int f(x)\, d\lambda_1(x) = \frac{1}{|c|} \int f(cx)\, d\lambda_1(x)$$

και

$$\int f(x)\, d\lambda(x) = \int f(x+a)\, d\lambda(x).$$

Θεώρημα.

Έστω $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

1. *Αν* f *είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση στον* $\mathbb{R}^n$ *τότε και η* $f \circ T$ *είναι Lebesgue μετρήσιμη και αν* $f \geq 0$ *ή* $f \in L^1(\lambda)$ *τότε*

$$\int f\, d\lambda = |\det T| \int f \circ T\, d\lambda. \tag{23}$$

2. *Για κάθε* $E \in \mathcal{L}_n$ *ισχύει ότι* $T(E) \in \mathcal{L}_n$ *και*

$$\lambda(T(E)) = |\det T| \lambda(E).$$

Απόδειξη.

1. *Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η* T *είναι συνεχής έπεται ότι είναι* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*-μετρήσιμη και άρα αν* f *είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση,τότε και η* $f \circ T$ *θα είναι Borel μετρήσιμη.*

Επίσης αν η ισχύει για $T, S \in GL(n, \mathbb{R})$ τότε ισχύει και για τον $T \circ S$ γιατί

$$\int f \circ T \circ S \, d\lambda = \frac{1}{|\det S|} \int f \circ T \, d\lambda = \frac{1}{|\det T|} \frac{1}{|\det S|} \int f \, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \int f \, d\lambda = |\det T| |\det S| \int f \circ T \circ S \, d\lambda = |\det(T \circ S)| \int f \circ T \circ S \, d\lambda.$$

Επομένως λόγω της προηγούμενης παρατήρησης αρκεί να αποδείξουμε ότι η ισχύει για τις $T \in GL(n\mathbb{R})$ που είναι Type 1, Type 2 και Type 3.

Έστω επομένως ότι η T είναι Type 1 και τότε έχουμε ότι απο το Θεώρημα Fubini ισχύει ότι

$$\int f \circ T(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{j_0-1}, cx_{j_0}, x_{j_0+1}, \dots, x_n) d\lambda_1(x_{j_0}) d\lambda_{n-1}((x_j)_{j \neq j_0})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{|c|} \int f(x_1, \dots, x_n) \, d\lambda_1(x_{j_0}) d\lambda_{n-1}((x_j)_{j \neq j_0})$$

$$\frac{1}{|c|} \int f(x) \, d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{|\det T|} \int f(x) \, d\lambda(x)$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ***Πρόταση***.

Έστω τώρα ότι $T \in GL(n, \mathbb{R})$ είναι Type 2 και τότε απο Fubini έχουμε ότι

$$\int f \circ T(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0} + x_{k_0}, x_{j_0+1}, \dots, x_n) d\lambda_1(x_{j_0}) d\lambda_{n-1}((x_j)_{j \neq j_0})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{j_0}, \dots, x_n) \, d\lambda_1(x_{j_0}) d\lambda_{n-1}((x_j)_{j \neq j_0})$$

$$\int f(x) \, d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{|\det T|} \int f(x) \, d\lambda(x).$$

Όμοια δουλέυουμε στην περίπτωση που η T είναι Type 3.

2. *Έστω $E \in \mathcal{L}_n$ και τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την $f = X_E$ έχουμε ότι*

αυτή είναι Lebesgue μετρήσιμη και

$$(f \circ T)(x) = 1 \iff T(x) \in E \iff x \in T^{-1}(E) \iff \mathcal{X}_{T^{-1}(E)} = 1$$

είναι Lebesgue μετρήσιμη απο το 1..

Τότε όμως το $T^{-1}(E) \in \mathcal{L}_n$ *και*

$$\int f \circ T \, d\lambda = \int \mathcal{X}_{T^{-1}(E)} \, d\lambda = \lambda(T^{-1}(E))$$

και απο την άλλη

$$\int f \, d\lambda = \lambda(E).$$

Επομένως απο το 1. έχουμε ότι

$$\lambda(E) = |\det T|\lambda(T^{-1}(E)) \implies \lambda(T^{-1}(E)) = \frac{1}{|\det T|}\lambda(E) = |\det T^{-1}|\lambda(E)$$

αφού $T \circ T^{-1} = I$ *και άρα* $(\det T)(\det T^{-1}) = 1$.

Τελικά βάζοντας στην θέση του T *τον* T^{-1} *έχουμε το ζητούμενο.*

3 Προσημασμένα μέτρα

3.1 Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός (προσημασμένο μέτρο).

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε η ν καλείται ***προσημασμένο μέτρο*** *αν ικανοποιεί τα παρακάτω:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$.

2. *Η ν παίρνει το πολύ μια απο τις δύο τιμές $+\infty, -\infty$.*

3. *Αν $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την $\mathcal{A}$, τότε ισχύει ότι*

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$$

   και μάλιστα αν ισχύει ότι $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ συγκλίνει απολύτως.

Παραδείγματα 2.

1. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και μ_1, μ_2 δυό μέτρα στον μετρήσιμο χώρο αυτό όπου τουλαχίστον ένα απο τα δύο αυτά είναι πεπερασμένο μέτρο.*

   Τότε θεωρούμε την συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ όπου $\nu = \mu_1 - \mu_2$ και τότε εύκολα παρατηρούμε ότι αυτή είναι ένα προσημασμένο μέτρο.

2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι τουλάχιστον ένα απο τα ολοκληρώμτα $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu$ είναι πραγματικός αριθμός.*

   Θεωρούμε την συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ όπου

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι λόγω των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος έχουμε ότι αυτή είναι προσημασμένο μέτρο.

Παρατηρήσεις .

Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και ν είναι προσημασμένο μέτρο στον χώρο αυτόν,τότε το ν ικανοποιέι την πεπερασμένη προσθετικότητα.

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα προσημασμένο μέτρο σε αυτόν.

1. *Το $E \in \mathcal{A}$ καλείται* ***θετικό για το ν-ν θετικό****,αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset E$ ισχύει ότι $\nu(A) \geq 0$.*

2. *Το $E \in \mathcal{A}$ καλείται* ***αρνητικό για το ν-ν αρνητικό****,αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset E$ ισχύει ότι $\nu(A) \leq 0$.*

3. *Το $E \in \mathcal{A}$ καλείται* ***μηδενικό για το ν-ν μηδενικό****,αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset E$ ισχύει ότι $\nu(A) = 0$.*

Άσκηση .

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι τουλάχιστον ένα απο τα ολοκληρώμτα $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu$ είναι πραγματικός αριθμός.
Θεωρούμε την συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ όπου

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ηοποία είδαμε στο πορηγούμενο παράδειγμα ότι ορίζει προσημασμένο μέτρο.
Ισχυει ότι το ένα $E \in \mathcal{A}$ είναι ν-θετικό αν και μόνο αν $f \geq 0$ μ-σχεδόν παντού στο E:
Πράγματι,υποθέτουμε αρχικά ότι το E είναι ν-θετικό. Τότε έχουμε ότι αν υποθέσουμε προς άτοπον ότι δεν ισχύει ότι $f \geq 0$ μ-σχεδόν πνατού στο E,τότε έχουμε ότι υπάρχει $A \subset E$

όπου $A \in \mathcal{A}$,$\mu(A) > 0$ *και* $f < 0$ *στο* A.

Τότε όμως έχουμε ότι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{ f < -\frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

και άρα αφού $\mu(A) > 0$ *έπεται ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\mu(F_{n_0}) > 0$*(διαφορεικά θα είχαμε ότι* $\mu(A) - 0$*).*

Τότε όμως $F_{n_0} \in \mathcal{A}$,$F_{n_0} \subset A \subset E$ *και αφού το* E *έχει υποτεθεί* ν*-θετικό έπεται ότι*

$$\nu(F_{n_0}) \geq 0.$$

Απο την άλλη όμως

$$\nu(F_{n_0}) = \int_{F_{n_0}} f \, d\mu \leq -\frac{1}{n_0}\mu(F_{n_0}) < 0$$

και άρα έχουμε το άτοπο.

Αντίστροφα,υποθέτουμε ότι $f \geq 0$ *στο* E *και έστω και* $A \in \mathcal{A}$ *με* $A \subset E$.

Τότε έχουμε ότι $f \geq 0$ *σχεδόν παντού στο* A *και άρα*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \geq 0$$

και άρα αφού το A *ήταν τυχόν ως προς τις παραπάνω ιδιότητες έπεται ότι το* E *είναι* ν*-θετικό.*

Πρόταση (συνέχεια προσημασμένων μέτρων)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* ν *ένα προσημασμένο μέτρο σε αυτόν.*

1. *Αν* $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων απο την* $\mathcal{A}$,*τότε αν* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\nu(A) = \lim_k \nu(A_k).$$

2. *Αν* $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων απο την* $\mathcal{A}$ *και* $\nu(A_1) \in \mathbb{R}$,*τότε αν* $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\nu(A) = \lim_k \nu(A_k).$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη για τα θετικά μέτρα.

Λήμμα.

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και ν ένα προσημασμένο μέτρο σε αυτόν.

1. *Αν $E \in \mathcal{A}$ είναι ν-θετικό τότε και κάθε υποσύνολό του $A \subset E$ με $A \in \mathcal{A}$ είναι ν-θετικό.*

2. *Αν $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ν-θετικών συνόλων τότε και η ενωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ν-θετικό σύνολο.*

3. *Αν $E \in \mathcal{A}$ είναι ν-αρνητικό τότε και κάθε υποσύνολό του $A \subset E$ με $A \in \mathcal{A}$ είναι ν-αρνητικό.*

4. *Αν $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ν-αρνητικών συνόλων τότε και η ενωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ν-αρνητικό σύνολο.*

5. *Αν $E \in \mathcal{A}$ είναι ν-μηδενικό τότε και κάθε υποσύνολό του $A \subset E$ με $A \in \mathcal{A}$ είναι ν-μηδενικό.*

6. *Αν $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ν-μηδενικών συνόλων τότε και η ενωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ν-μηδενικό σύνολο.*

Απόδειξη.

1. *Αν αρχικά πάρουμε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ τότε έχουμε ότι και $B \subset E$ και αφού το E είναι ν-θετικό έπεται ότι $\nu(B) \geq 0$.Τελικά αφού το B ήταν τυχόν έχουμε ότι το A είναι ν-θετικό.*

2. *Αρχικά θεωρούμε την ακολουθία (A_n) όπου για κάθε $n \geq 2$*

$$A_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right)$$

και $A_1 = E_1$,τότε παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια ακολουθία συνόλων απο την $\mathcal{A}$ με

$$A_n \subset E_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τα A_n είναι ξένα ανά δύο σύνολα.

Αφού τώρα κάθε E_n είναι ν-θετικό,έπεται απο το 1. ότι και κάθε A_n είναι θετικό σύνολο.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

και άρα αν πάρουμε τώρα $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ τότε έχουμε ότι

$$B = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n$$

και αφού τα $B \cap A_n$ είναι ξένα ανά δύο γιατί τα A_n είναι ξένα ανά δύο,έπεται απο την ιδιότητα 3. του προσημασμένου μέτρου,ότι

$$\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B \cap A_n).$$

Αφού όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $B \cap A_n \in \mathcal{A}$ και $B \cap A_n \subset A_n$ και το A_n είναι ν-θετικό,έπεται απο το 1. ότι

$$\nu(B \cap A_n) \geq 0 \implies \nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B \cap A_n) \geq 0.$$

Αφού το B ήταν τυχόν ως προς τισ παραπάνω ιδιότητες,έπεται ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ν-θετικό σύνολο.

3. Όμοια με την 1.

4. Όμοια με την 2.

5. Όμοια με την 1.

6. Όμοια με την 2.

Θεώρημα (Θεώρημα διάσπασης του Hahn)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και ν ένα προσημασμένο μέτρο σε αυτόν. Τότε υπάρχουν ξένα $P, N \in \mathcal{A}$ με το P να είναι ν-θετικό, το N να είναι ν-αρνητικό και $X = P \cup N$. Επίσης αν P', N' είναι ένα άλλο τέτοιο ζευγάρι συνόλων, τότε τα $P \triangle P'$ και $N \triangle N'$ είναι ν-μηδενικά.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι το ν δεν παίρνει την τιμή $+\infty$(όμοια δουλεύουμε στην περίπτωση όπου το ν δεν παίρνει την τιμή $-\infty$). Τότε θεωρούμε το

$$m = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{A}, E : \nu\text{-θετικό}\}$$

και απο τον χαρακτηρισμό του $\sup$ *έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία (P_k) απο την $\mathcal{A}$ που είναι ν-θετικά και $\nu(P_k) \to m$.*

Τότε αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

*έχουμε ότι απο το προηγούμενο **Λήμμα** έχουμε ότι το P είναι ν-θετικό και παρατηρούμε ότι για κάθε k έχουμε ότι $P_k, P \setminus P_k$ είναι ξένα σύνολα απο την $\mathcal{A}$ και*

$$P = (P \setminus P_k) \cup P_k \implies \nu(P) = \nu(P_k) + \nu(P \setminus P_k) \geq \nu(P_k)$$

γιατί $\nu(P \setminus P_k) \geq 0$ αφού $P \setminus P_k \subset P$ και το P είναι ν-θετικό.

Άρα παίρνοντας όριο στην έχουμε ότι τελικά

$$\nu(P) \geq m \implies m < +\infty.$$

Απο την άλλη έχουμε ότι το P είναι ν-θετικό σύνολο όπως ίδαμε και άρα απο τον ορισμό *του* m *έχουμε ότι*

$$\nu(P) \leq m$$

και τελικά απο τις δύο παραπάνω ανισότητες έχουμε ότι $m = \nu(P)$.

Θέτουμε τώρα $N = P^c \in \mathcal{A}$ *και τότε τα* N, P *είναι ξένα σύνολα και* $X = P \cup N$.

Μένει να αποδείξουμε ότι το N *είναι* ν*-αρνητικό και υποθέτουμε προς άτοπον ότι το* N *δεν είναι* ν*-αρνητικό.*

Τότε απο την άρνηση του ορισμού έχουμε ότι υπάρχει $A_1 \in \mathcal{A}$ *όπου* $A_1 \subset N$ *και* $\nu(A_1) > 0$.

Επομένως υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ *ώστε*

$$\nu(A_1) > \frac{1}{n_1}$$

και έστω ότι ο n_1 *είναι ο ελάχιστος ως πρός αυτήν την ιδότητα φυσικός αριθμός.*

Παρατηρούμε τώρα ότι το A_1 *δεν είναι* ν*-θετικό γιατί αν ήταν θα είχαμε ότι και το* $A_1 \cup P$ *θα ήταν* ν*-θετικό απο το* ***Λήμμα*** *και αφού τα* A_1, P *είναι ξένα γιατί τα* N, P *είναι ξένα και* $A_1 \subset N$

$$\nu(A_1 \cup P) = \nu(A_1) + \nu(P) = \nu(A_1) + m > m$$

το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως το A_1 *δεν είναι* ν*-θετικό και άρα υπάρχει* $C \in \mathcal{A}$ *με* $C \subset A_1$ *και* $\nu(C) < 0$.

Τότε όμως για $A_2 = A_1 \setminus C \in \mathcal{A}$,*έχουμε ότι* $A_2 \subset A_1$ *και* $\nu(A_2) = \nu(A_1) - \nu(C) > \nu(A_1)$ *και έστω* n_2 *ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο*

$$\nu(A_2) > \nu(A_1) + \frac{1}{n_2} > \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

Επαγωγικά τώρα βρίσκουμε φθίνουσα ακολουθία (A_n) *συνόλων απο την* $\mathcal{A}$ *με* $\nu(A_k) > 0$ *και όπου για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$\nu(A_{k+1}) > \nu(A_k) + \frac{1}{n_{k+1}} > \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{n_j}.$$

Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *έχουμε ότι*

$$\nu(A_k) \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_k}.$$

Άρα αν θεωρήσουμε τώρα το σύνολο

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

τότε αφού $0 < \nu(A_1) < +\infty$ *έχουμε απο προηγούμενη* ***Πρόταση*** *έχουμε ότι*

$$+\infty > \nu(A) = \lim_k \nu(A_k) \geq \lim_k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$$

και άρα $n_j \to +\infty$.

Τώρα αφού $A \subset N$ *και* $\nu(A) > 0$ *έχουμε ότι υπάρχει* $B \subset A$ *με* $\nu(B)\nu(A)$ *και άρα υπάρχει και φυσικός αριθμός* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε*

$$\nu(B) > \nu(A) + \frac{1}{n_0}. \tag{24}$$

Αφού όμως $n_j \to +\infty$ *έπεται ότι υπάρχει* $j_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n_{j_0} > n_0$ *και άρα*

$$\frac{1}{n_{j_0}} < \frac{1}{n_0}.$$

Όμως παρατηρούμε ότι

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \implies B \subset A_{j-1}$$

για κάθε j *και άρα απο τον ορισμό των* n_j *έχουμε ότι*

$$\nu(B) \leq \nu(A_{j_0-1}) + \frac{1}{n_{j_0}} \leq \nu(A) + \frac{1}{n_0} \tag{25}$$

και άρα έχουμε το άτοπο απο τις (24),(25) και το N *είναι* ν*-αρνητικό και στην τεέυταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών,*$(\nu(A_k))$ *είναι αύξουσα* *και συγκλίνει στο* $\nu(A)$.

Για την μοναδικότητα τώρα παρατηρούμε ότι αν P', N' *είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος συνόλων,έχουμε ότι αρχικά εύκολα παρατηρούμε ότι*

$$P \triangle P' = N \triangle N'$$

και άρα αρκεί να αποδείξουμε μόνο ότι το $P \triangle P'$ *είναι* ν*-μηδενικό.*
Άρα τώρα έχουμε ότι αφού

$$P \triangle P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P)$$

και οι δύο συνιστώσες $P \setminus P', P' \setminus P$ *είναι ξένα σύνολα,έπεται ότι απο την πεπερασμένη προσθετικότητα του προσημασμένου μέτρου* ν *έχουμε ότι*

$$\nu(P \triangle P') = \nu(P' \setminus P) + \nu(P \setminus P').$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι τα $P \setminus P', P' \setminus P$ *είναι* ν*-θετικά σύνολα.*
Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$P \setminus P' \subset P$$

και αφού το P *είναι* ν*-θετικό,απο προηγούμενο* ***Λήμμα*** *έχουμε ότι και το* $P \setminus P'$ *είναι* ν*-θετικό.*
Επίσης έχουμε ότι

$$P \setminus P' = P \cap (X \setminus P') = P \cap N' \subset N'$$

και αφού το N' *είναι* ν*-αρνητικό έπεται απο το* ***Λήμμα*** *έχουμε ότι και το* $P \setminus P'$ *είναι* ν*-αρνητικό.*
Τελικά το $P \setminus P'$ *είναι* ν*-μηδενικό σύνολο.Όμοια δουλεύουμε και για το* $P' \setminus P$.

Ορισμός (αμοιβαία ιδιάζοντα προσημασμένα μέτρα).

Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ,ν δύο προσημασμένα μέτρα σε αυτόν.Λέμε ότι τα μ,ν είναι **αμοιβαία ιδιάζοντα** *και το συμβολίζουμε με $\mu \perp \nu$ εάν υπάρχουν ξένα $E,F \in \mathcal{A}$ με $E \cup F = X$ τέτοια ώστε το E να είναι μ-μηδενικό και το F να είναι ν-μηδενικό.*

Θεώρημα (Θεώρημα διάσπασης του Jordan).
Εάν ν είναι ένα προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{A})$ τότε υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα ν^+,ν^- ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και τα ν^+,ν^- είναι αμοιβαία ιδιάζοντα.

Απόδειξη.
Αρχικά παρατηρούμε ότι απο το Θεώρημα διάσπασης του Hahn έχουμε ότι υπάρχουν $P,N \in \mathcal{A}$ που είναι ξένα,$X = P \cup N$ και το P είναι ν-θετικό και το N είναι ν-αρνητικό.
Τότε ορίζουμε

$$\nu^+ : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \nu^+(A) = \nu(A \cap P)$$

$$\nu^- : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$$

και τότε έχουμε ότι πράγματι $\nu^+,\nu^- \geq 0$ γιατί έχουμε ότι αν πάρουμε τυχόν $A \in \mathcal{A}$ τότε αφού το P είναι ν-θετικό και $A \cap P \subset P$ και $A \cap P \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι

$$\nu(A \cap P) = \nu^+(A) \geq 0.$$

Επίσης αφού το $A \cap N \subset N$ και το N είναι ν-αρνητικό,έχουμε ότι

$$\nu(A \cap N) \leq 0 \implies \nu^-(A) = -\nu(A \cap N) \geq 0$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.
Το ότι τα ν^+,ν^- ικανοποιούν τις ιδιότητες του θετικού μέτρου,ελέγχεται εύκολα.
Επίσης έχουμε ότι το P είναι n^--μηδενικό:γιατί παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset P$ τότε έχουμε ότι αφού τα P,N είναι ξένα,έχουμε ότι και το A,N είναι ξένα και άρα

$$\nu^-(A) = \nu(A \cap N) = 0$$

και αφού το A ήταν τυχόν ως προς τις παραπάνω ιδίοτητες έπεται ότι το P είναι ν^--μηδενικό.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι το N είναι ν^+-μηδενικό και άρα $\nu^+ \perp \nu^-$.

Για την μοναδικότητα υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν και θετικά μέτρα μ^+, μ^- τα οποία είναι αμοιβαία ιδιάζοντα και $\nu = \mu^+ - \mu^-$.
Θα αποδείξουμε ότι $\mu^+ = \nu^+$ και $\mu^- = \nu^-$ και θα έχουμε το ζητούμενο.
Αφού τα μ^+, μ^- είναι αμοιβαία ιδιάζοντα έπεται ότι υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$ τα οποία είναι ξένα,$E \cup F = X$ και το E είναι μ^+-μηδενικό και το F είναι μ^--μηδενικό.
Τότε όμως έχουμε ότι το ζεύγος E, F είναι μια διάσπαση Hahn του ν γιατί αν πάρουμε $A \in \mathcal{A}$ με $A \subset E$ έχουμε ότι $\mu^+(A) = 0$ και άρα

$$\nu(A) = -\mu^-(A) \leq 0$$

αφού το μ^- είναι θετικό μέτρο.
Τελικά το E είναι ν-αρνητικό και όμοια δείχνουμε ότι και το F είναι ν-θετικό.
Επομένως απο την μοναδικότητα του Θεωρήματος διάσπασης του Hahn έχουμε ότι το

$$P \triangle F = N \triangle E$$

είναι ν-μηδενικά σύνολα. Τελικά έχουμε ότι

Ορισμός (κυμάνσεις προσημασμένου μέτρου)**.**
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα προσημασμένο μέτρο με ανάλυση Jordan

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

*Τότε το ν^+ ονομάζεται **θετική κύμανση του ν** και το ν^- ονομάζεται **αρνητική κύμανση του ν**.*
*Επίσης ορίζουμε το μέτρο $|\nu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ώς $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ και το ονομάζουμε **ολική κύμανση του ν**.*

Ορισμός .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα προσημασμένο μέτρο με ανάλυση Jordan

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Αν $f \in L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$ τότε ορίζουμε

$$\int f \ d\nu := \int f \, d\nu^+ - \int f \, d\nu^-.$$

Πρόταση .

Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος,ν είναι ένα προσημασμένο μέτρο σε αυτόν με ανάλυση Jordan την $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και έστω και μ ένα άλλο προσημασμένο μέτρο,να αποδείξετε τα παρακάτω:

1. *Ένα $E \in \mathcal{A}$ είναι ν-μηδενικό αν και μόνο αν $|\nu|(E) = 0$.*

2. *Ισχύει ότι*

$$\nu \perp \mu \iff |\nu| \perp \mu \iff \nu^+ \perp \mu \ \text{ και } \nu^- \perp \mu.$$

3. *Για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι*

$$\nu(E) = \int_E (\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_N) \, d|\nu|$$

αν P, N είναι τα σύνολα στην διάσπαση του Hahn.

Απόδειξη.

1. *Αρχικά αν ισχύει ότι $|\nu|(E) = 0$,τότε αν ν^+, ν^- είναι οι κυμάνσεις του ν ως προς την ανάλυση Jordan,τότε έχουμε ότι αφού αυτα είναι θετικά μέτρα και*

$$|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = 0 \implies \nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$$

και άρα τελικά αν πάρουμε και $A \subset E$ *με* $A \in \mathcal{A}$*,τότε απο την μονοτονία των θετικών μέτρων* ν^+, ν^- *έχουμε ότι και* $\nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$.

Τότε όμως και $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = 0$ *και άρα το* E *είναι* ν*-μηδενικό.*

Αντίστροφα,αν το E *είναι* ν*-μηδενικό,τότε παρατηρούμε αν* (P, N) *είναι μια διάσπαση Hahn (την εξασφαλίζει το Θεώρημα διάπασης του Hahn)τότε για τα* ν^+, ν^- *που ορίζονται μέσω των σχέσεων*

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P) \ \ \textit{και} \ \ \nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$*,έχουμε ότι*

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = 0$$

και

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = 0$$

αφού $E \cap P, E \cap N \subset E$ *και το* E *είναι* ν*-μηδενικό.*

Τελικά,

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$$

και έχουμε και την αντίστροφη ανισότητα.

2. *Αποδεικνύεται εύκολα.*

3. *Για* $E \in \mathcal{A}$ *έχουμε ότι*

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = |\nu|(E \cap P) - |\nu|(E \cap N)$$

$$= \int_E \mathcal{X}_P \, d|\nu| - \int_E \mathcal{X}_N \, d|\nu|$$

$$= \int_E (\mathcal{X}_P - \mathcal{X}_N) \, d|\nu|$$

και παραπάνω χρησιμοποίησαμε ότι

$$|\nu|(E \cap P) = \nu^+(E \cap P) - \nu^-(E \cap P) = \nu^+(E \cap P)$$

γιατί το $E \cap P \subset P$ και το P είναι ν^--μηδενικό.

Επίσης χρησιμοποιήσαμ ότι

$$|\nu|(E \cap N) = \nu^+(E \cap N) - \nu^-(E \cap N) = -\nu^-(E \cap N)$$

γιατί $E \cap N \subset N$ και το N είναι ν^+-μηδενικό.

3.2 Θεώρημα Radon-Nikodyn

Ορισμός (απόλυτη συνέχεια προσημασμένου μέτρου)**.**
Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα προσημασμένο μέτρο και μ ένα θετικό μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε λέμε ότι ***το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ*** *και το συμβολίζουμε με $\nu << \mu$ αν: για κάθε $E \in \mathcal{A}$ που ισχύει ότι $\mu(E) = 0$ συνεπάγεται ότι $\nu(E) = 0$.*

Πρόταση .
Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα προσημασμένο μέτρο και μ ένα θετικό μέτρο στον χώρο αυτόν.

1. *Τότε ισχύει ότι*

$$\nu << \mu \iff |\nu| << \mu.$$

2. *Τότε ισχύει ότι*

$$\nu \perp \mu \text{ και } \nu << \mu \implies \nu = 0.$$

Απόδειξη.

1. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε ότι $|\nu| << \mu$ τότε έχουμε ότι αν πάρουμε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$,τότε παρατηρούμε ότι

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$$

όπου τα ν^+, ν^- είναι θετικά μέτρα και άρα $\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$.
Αφού όμως

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = 0$$

και το $E \in \mathcal{M}$ ήταν τυχόν έπεται ότι $\nu << \mu$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $\nu << \mu$ και τότε παρατηρούμε ότι αφού το ν είναι προσημασμένο μέτρο έχουμε ότι υπάρχει διάσπαση Hahn έστω (P, N) του ν και μοναδικά θετικά μέτρα ν^+, ν^- με $\nu^+(E) = \nu(P \cap E)$ και $\nu^-(E) = \nu(E \cap N)$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$.
Άρα αν πάρουμε τώρα $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = 0$ τότε παρατηρούμε ότι και $\mu(E \cap P) = 0$ αφού το μ είναι θετικό μέτρο και αφού $\nu << \mu$ έχουμε ότι

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = 0 \text{ και } \nu^-(E) = \nu(E \cap N) = 0.$$

Αφού όμως έχουμε ότι

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$$

και το $E \in \mathcal{A}$ ήταν τυχόν,έπεται ότι $|\nu| << \mu$.

2. Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού $\nu \perp \mu$ έπεται ότι υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$ με $E \cup F = X$ τα οποία είναι ξένα και το E είναι ν-μηδενικό και το F είναι μ-μηδενικό.Αν τώρα πάρουμε $A \in \mathcal{A}$,τότε παρατηρούμε ότι

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap F)$$

και αφού $A \cap E \subset E$ *και το* E *είναι* ν*-μηδενικό,έπεται ότι* $\nu(A \cap E) = 0$*.Απο την άλλη όμως,αφού* $A \cap F \subset F$ *και το* F *είναι* μ*-μηδενικό,έπεται ότι* $\mu(A \cap F) = 0$ *και άρα και* $\nu(A \cap F) = 0$*,αφού* $\nu << \mu$*.*

Τελικά,

$$\nu(A) = 0$$

και αφού τα $A \in \mathcal{A}$ *ήταν τυχόν,έπεται ότι* $\nu = 0$*.*

Θεώρημα (χαρακτηρισμός απόλυτης συνέχειας)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και* ν *ένα προσημασμένο μέτρο και* μ *ένα θετικό μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε* $\nu << \mu$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A) < \delta$ *να ισχύει ότι* $|\nu(A)| < \epsilon$*.*

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $\nu << \mu$ *και θα κάνουμε την απόδειξη της συνεπαγωγής στην περίπτωση όπου το* ν *είναι και αυτό θετικό μέτρο.*

Έστω δηλαδή ότι $\nu << \mu$ *όπου τα* ν*,*μ *είναι και τα δύο θετικά μέτρα.Τότε υποθέτουμε προς άτοπον ότι δεν ισχύει το ζητούμενο,δηλαδή υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε για κάθε* $\delta > 0$ *να υπάρχει* $A_\delta \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A_\delta) < \delta$ *και* $\nu(A_\delta) \geq \epsilon$*.*

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *και* $\delta_n = \frac{1}{2^n} > 0$ *βρίσκουμε* $A_n \in \mathcal{A}$ *ώστε* $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ *και* $\nu(A_n) \geq \epsilon$*.*

Θεωρούμε τώρα το $A = \limsup A_n \in \mathcal{A}$ *και παρατηρούμε ότι αφού*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

έπεται απο το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli ότι $\mu(A) = 0$*.*

Αφού όμως $\nu << \mu$ *και αυτά είναι θετικά μέτρα,έχουμε ότι και* $\nu(A) = 0$*.*

Απο την άλλη,

$$\nu(A) = \nu(\limsup A_n)) \geq \limsup \nu(A_n) \geq \epsilon$$

και άρα

$$\nu(A) = 0 \geq \epsilon$$

το οποίο είναι άτοπο.

Για την γενική περίπτωση,όπου δηλαδή το ν *είναι προσημασμέννο μέτρο και* $\nu << \mu$ *έχουμε απο προηγούμενη Άσκηση ότι και* $|\nu| << \mu$ *και άρα αφού το* $|\nu|$ *είναι θετικό μέτρο αν πάρουμε* $\epsilon > 0$ *τυχόν,τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε αν* $A \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A) < \delta$*,τότε* $|\nu|(A) < \epsilon$*.*
Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A) < \delta$ *έχουμε επομένως ότι*

$$\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) \implies |\nu(A)| \leq |\nu^+(A)| + |\nu^-(A)| = \nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu|(A) < \epsilon$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο αφού το $\epsilon > 0$ *ήταν τυχόν.*

Για την αντίστροφη κατεύθυνση έχουμε ότι αν πάρουμε $E \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A) = 0$ *και* $\epsilon > 0$ *τυχόν,τότε απο την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε* $E \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(E) < \delta$ *να ισχύει ότι* $|\nu(E)| < \epsilon$*. Αφού όμως* $\mu(A) =< \delta$ *έχουμε ότι τελικά* $|\nu(A)| < \epsilon$*.*
Το $\epsilon > 0$ *όμως ήταν τυχόν και άρα* $\nu(A) = 0$ *και τελικά* $\nu << \mu$*.*

Παραδείγματα 3.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου και* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι τουλάχιστον ένα απο τα ολοκληρώμτα* $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu$ *είναι πραγματικός αριθμός.*
Θεωρούμε την συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ *όπου*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ *η οποία είδαμε στο πορηγούμενο παράδειγμα ότι ορίζει προσημασμένο μέτρο.*
Παρατηρούμε ότι $\nu << \mu$ *γιατί αν πάρουμε* $A \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(A) = 0$ *και τότε όπως έχουμε αποδείκει σε προηγούμενο Κεφάλαιο*

$$\int_A f^+ \, d\mu = \int_A f^- \, d\mu = 0$$

και άρα

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu = 0$$

και αφού το $A \in \mathcal{A}$ *ήταν τυχόν έχουμε ότι* $\nu << \mu$.

Πόρισμα (Απολύτη συνέχεια του ολοκληρώματος Lebesgue)**.**

Αν $f \in L^1(\mu)$ *με την εκτετάμενη μορφή,δηλαδή ένα τουλάχιστον απο τα ολοκληρώματα των* f^+, f^- *είναι πεπερασμένο,τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε αν* $A \in \mathcal{A}$ *και* $\mu(A) < \delta$*,τότε*

$$\left| \int_A f\,d\mu \right| < \epsilon.$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο ν με

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

για το οποίο δείξαμε στα προηγούμενα Παραδείγματα ότι είναι προσημασμένο μέτρο με $\nu << \mu$ *και εφαρμόζοντας τώρα την προηγούμενη Πρόταση,έπεται άμεσα το ζητούμενο.*

Λήμμα.

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* μ,ν *θετικά και πεπερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο αυτόν.Τότε είτε* $\nu \perp \mu$ *είτε μπορούμε να βρούμε ένα* $E \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(E) > 0$ *και* $\epsilon > 0$ *τέτοια ώστε το* E *να είναι θετικό* $\nu - \epsilon\mu$.

Απόδειξη.

Αρχικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *θεωρούμε το* $\nu - \frac{1}{n}\mu$ *και αυτό είναι προσημασμένο μέτρο αφού τα* μ,ν *είναι πεπερασμένα θετικά μέτρα και άρα κάθε τέτοιο μέτρο έχει μια διάσπαση Hahn ,έστω* (P_n, N_n).

Θέτουμε τώρα

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{A}$$

και

$$N = X \setminus P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{A}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $N \subset N_n$ *και αφού κάθε* N_n *είναι* $\nu - \frac{1}{n}\mu$ *αρνητικό έπεται ότι*

$$\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N) \longrightarrow 0$$

και άρα $\nu(N) = 0$ *αφού το* ν *είναι θετικό μέτρο.*

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. *Έστω ότι* $\mu(P) = 0$ *και τότε αφού το* μ *είναι θετικό μέτρο έχουμε ότι το* P *είναι* μ*-μηδενικό.Επίσης αφού* $\nu(N) = 0$ *και το* ν *είναι θετικό μέτρο έχουμε ότι το* N *είναι* ν*-μηδενικό και άρα τελικά* $\nu \perp \mu$.

2. *Έστω ότι* $\mu(P) > 0$ *και τότε παρατηρούμε ότι αφού*

   $$\mu(P) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) > 0$$

   έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\mu(P_{n_0}) > 0$.

   Για $E = P_{n_0} \in \mathcal{A}$ *και* $\epsilon = \frac{1}{n_0} > 0$ *έχουμε ότι* $\mu(E) > 0$ *και το* E *είναι θετικό για το* $\nu - \epsilon\mu$ *και άρα έχουμε το ζητούμενο.*

Ορισμός (σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *ένας χώρος μέτρου και έστω και* ν *ένα προσημασμένο μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε το* ν *καλείται* ***σ-πεπερασμένο*** *αν το* $|\nu|$ *που είναι ένα θετικό μέτρο είναι σ-πεπερασμένο μέτρο υπο την συνήθη έννοια. Ισοδύναμα,το* ν *καλείται σ-πεπερασμένο αν τα* ν^+, ν^-*,που είναι θετικά μέτρα, είναι σ-πεπερασμένα μέτρα.*

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *προσημασμένα μέτρα και* μ *θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτόν.*

Τότε ισχύουν τα εξής:

1.

$$\lambda_1 << \mu, \lambda_2 << \mu, \cdots, \lambda_n << \mu \implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i << \mu.$$

2.

$$\lambda_1 << \mu, \lambda_2 << \mu \implies \lambda_1 - \lambda_2 << \mu$$

3. *Αν ν είναι ένα άλλο προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$,τότε*

$$\lambda_1 \perp \nu, \lambda_2 \perp \nu \implies \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \perp \nu.$$

Απόδειξη.

1. *Είναι προφανές.*

2. *Είναι προφανές.*

3. *Αρχικά αφού $\lambda_1 \perp \nu$ έχουμε ότι υπάρχουν $E_1, F_1 \in \mathcal{F}$ ξένα με $E_1 \cup F_1 = X$ και το E_1 είναι λ_1-μηδενικό και το F_1 είναι ν-μηδενικό.Επίσης αφού $\lambda_2 \perp \nu$ έχουμε ότι υπάρχουν και $E_2, F_2 \in \mathcal{A}$ ξένα με $X = E_2 \cup F_2$ και το E_2 είναι λ_2-μηδενικό και το F_2 είναι ν-μηδενικό.*

   Τότε παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τα $E = E_1 \cap E_2$ έχουμε ότι αυτό είναι $\lambda_1 - \lambda_2$-μηδενικό και αν θέσουμε

$$F = X \setminus E = E_1^c \cap E_2^c = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{A}$$

   τότε τα E, F είναι ξένα και $X = E \cup F$.

   Επίσης έχουμε ότι αν πάρουμε $A \subset F$ τότε

$$A \subset F \subset F_1 \implies \nu(A) = 0$$

   και άρα το F είναι ν-μηδενικό και τελικά $\lambda_1 - \lambda_2 \perp \nu$.

   Όμοια ακριβώς η απόδειξη δουλέυει και για το $\lambda_1 + \lambda_2$.

Θεώρημα (Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodyn).

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα σ-πεπερασμένα προσημασμένο μέτρο και μ ένα σ-πεπρασμένο θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτόν.Τότε υπάρχουν σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα λ,ρ στον $(X, \mathcal{A})$ και $f \in Ł^1(\mu)$ υπο την εκτεταμένη έννοια, ώστε

$$\rho(A) = \int_A f \, d\mu \ \ , \lambda \perp \mu \ \ , \rho << \mu \ \ \text{και} \ \ \nu = \lambda + \rho.$$

Μάλιστα αν υπάρχει και ένα άλλο ζευγάρι μιγαδικών μέτρων (λ', ρ') και μια άλλη $f' \in L^1(\mu)$ που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες,τότε

$$\lambda = \lambda' \ \ \text{και} \ \ \rho = \rho'$$

και

$$f = f'$$

μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

Βήμα 1ο:*Θα το αποδείξουμε στην περίπτωση όπου ν,μ είναι και τα δύο θετικά και πεπερασμένα μέτρα.*

Έστω επομένως ότι μ,ν είναι θετικά και πεπερασμένα μέτρα και τότε θεωρούμε την κλάση συναρτήσεων

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \to [0, +\infty] : f - \text{μετρήσιμη}, \int_A f \, d\mu \leq \nu(A) \ \ \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι η $\mathcal{F}$ είναι μη κενή: γιατί αν θεωρήσουμε την μηδενική συνάρτηση $f = 0$ τότε $f \in \mathcal{F}$ αφού το ν είναι θετικό μέτρο.

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{F}$ τότε αν $h = \max\{f, g\}$ έχουμε ότι $h \in \mathcal{F}$: γιατί προφανώς η h είναι μη αρνητική και μετρήσιμη συνάρτηση ως max *2 τέτοιων συναρτήσεων καιεπίσης αν θεωρήσουμε το σύνολο $E = \{f > g\} \in \mathcal{A}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$*

ισχύει ότι

$$\int_A h\, d\mu = \int_{A\cap E} h\, d\mu + \int_{A\setminus E} h\, d\mu$$
$$= \int_{E\cap A} f\, d\mu + \int_{A\setminus E} g\, d\mu$$
$$\leq \nu(A\cap E) + \nu(A\setminus E) = \nu(A)$$

αφού το ν *είναι θετικό μέτρο,και άρα έχουμε το ζητούμενο.*

Επαγωγικά τώρα αποδεικνύουμε ότι αν $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ *τότε και* $h = \max\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{F}$.

Τώρα ορίζουμε

$$a = \sup\left\{\int f\, d\mu : f \in \mathcal{F}\right\}$$

και αυτό είναι καλά ορισμένο γιατί η $\mathcal{F}$ *είναι μη κενό σύνολο όπως αποδείξαμε.*

Επίσης παρατηρούμε ότι $a < \infty$*: γιατί για κάθε* $f \in \mathcal{F}$ *έχουμε ότι αφού* $X \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*

$$\int f\, d\mu \leq \nu(X) < \infty$$

αφού το ν *είναι πεπερασμένο μέτρο,και άρα και*

$$a < \infty.$$

Απο τον ϵ*-χαρακτηρισμό του* sup *έχουμε τώρα ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων* (f_n) *απο την* $\mathcal{F}$ *ώστε*

$$\int f_n\, d\mu \longrightarrow a$$

και ορίζουμε $f = \sup_n f_n$.

Παρατηρούμε ότι $f \in \mathcal{F}$ *και μάλιστα* $\int f\, d\mu = a$ *γιατί: αρχικά η* f *είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση ως* sup *τέτοιων και αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων* (g_n) *όπου* $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*,τότε απο προηγούμενη παρατήρηση αφού* *κάθε* $f_n \in \mathcal{F}$ *έχουμε ότι και* $g_n \in \mathcal{F}$ *και η* g_n *είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων με*

$$\sup_n g_n = \sup_n f_n = f \implies g_n \longrightarrow \sup_n g_n = f.$$

Άρα απο το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu \geq \lim_n f_n = a$$

και για κάθε $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f \, d\mu = \lim_n \int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A)$$

και άρα $f \in \mathcal{F}$ *και*

$$\int f \, d\mu \leq a \implies \int f \, d\mu = a.$$

Τελικά βρήκαμε $f \in \mathcal{F}$ *όπου*

$$\int f \, d\mu = \max_{h \in \mathcal{F}} \int h \, d\mu = a < \infty.$$

Επομένως η $f \in L^1(\mu)$ *και* $f(x) < \infty$ μ*-σχεδόν παντού.*

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *όπου*

$$\rho(A) = \int_A f \, d\mu$$

και αυτή είναι καλά ορισμένη αφού η f *είναι μη αρνητική και* μ*-ολοκληρώσιμη.Επίσης όπως έχουμε αποδείξει σε Άσκηση η* ρ *είναι θετικό μέτρο και* $\rho << \mu$*.*

Θέτουμε τώρα $\lambda = \nu - \rho$ *και έχουμε ότι αυτή είναι θετικό μέτρο αφού* $\lambda \geq 0$ *γιατί απο τον τρόπο κατασκεής της* f *έχουμε ότι για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*

$$\rho(A) = \int_A f \, d\mu \leq \nu(A) \implies \lambda(A) \geq 0.$$

Επίσης το λ *είναι και πεπερασμένο μέτρο αφού είναι διαφορά δύο πεπερασμένων μέτρων.*

Μένει να αποδείξουμε ότι $\lambda \perp \mu$ *και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Λήμμα: υποθέτουμε προ άτοπον ότι υπάρχει* $E \in \mathcal{A}$ *και* $\epsilon > 0$ *ώστε* $\mu(E) > 0$ *και το* E *να είναι* $\lambda - \epsilon\mu$ *θετικό.*

Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f + \epsilon\mathcal{X}_E$ *και παρατηρούμε ότι* $h \in \mathcal{F}$ *γιατί προφανώς αυτή είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση ως άθροισμα τέτοιων και για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*

$$\int_A h \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \epsilon \int_A \mathcal{X}_E \, d\mu = \rho(A) + \epsilon\mu(A \cap E) \leq \rho(A) + \lambda(A \cap E)$$

$$\leq \rho(A) + \lambda(A) = \nu(A).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\int h \, d\mu = \int f \, d\mu + \epsilon \int \mathcal{X}_E \, d\mu = a + \epsilon\mu(E) > a$$

αφού $\mu(E) > 0$ *και άρα άτοπο απο την κατασκεύη του* a.

Για την μοναδικότητα τώρα υποθέτουμε ότι $\nu = \lambda_1 + \rho_1 = \lambda + \rho$ *όπου* $\lambda, \lambda_1 \perp \mu$ *και* $\rho_1(A) = \int_A f_1 \, d\mu$ *και* $\rho(A) = \int_A f \, d\mu$ *όπου* $f, f_1 \in L^1(\mu)$.

Τότε όμως παρατηρούμε ότι απο προηγούμενη Άσκηση έχουμε ότι

$$\lambda - \lambda_1 \perp \mu$$

και αφού

$$\lambda - \lambda_1 = \rho_1 - \rho << \mu$$

αφού $\rho, \rho_1 << \mu$ *έπεται απο άλλη Άσκηση ότι*

$$\lambda - \lambda_1 = 0 \implies \lambda = \lambda_1.$$

Τότε όμως και $\rho = \rho_1$ *και άρα και* $f = f_1$ μ*-σχεδόν παντού.*

Βήμα 2ο:*Θα αποδείξουμε το Θεώρημα στην περίπτωση όπου τα μ,ν είναι δύο σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα.*

Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(B_n),(C_n)$ απο ξένα ανά δύο σύνολα της $\mathcal{A}$ που έχουν πεπρασμένο μέτρο πάνω στα μ και ν αντίστοιχα και

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Τότε όμως έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_n \cap C_k)$$

όπου για την οικογένεια $(B_n \cap C_k)_{n,k=1}^{\infty}$ ισχύει ότι

$$\mu(B_n \cap C_k) < \infty \;\; \textit{και} \;\; \nu(B_n \cap C_k) < \infty$$

και αυτά είναι ξένα ανά δύο σύνολα απο την $\mathcal{A}$.
Τώρα έστω ότι την οικογένεια αυτήν την αριθμούμαι και έστω $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση τους.
Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα θετικά μέτρα μ_n,ν_n όπου

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n) \;\; \textit{και} \;\; \nu_n(A \cap A_n)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
Αφού όμως παραπάνω αποδείξαμε ότι $\mu(A_n),\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι τα μ_n,ν_n είναι και πεπερασμένα μέτρα.
Άρα απο το Βήμα 1ο,έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ζεύγος (ρ_n,λ_n) θετικών και πεπερασμένων μέτρων αλλά και ακολουθία (f_n) μ-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με την εκτεταμένη έννοια,ώστε να ικανοποιούντα τα εξής:

$$\nu_n = \lambda_n + \rho_n \;, \lambda_n \perp \mu_n \;,\; \rho_n << \mu_n \;\; \textit{και} \; \rho_n(A) = \int_A f_n d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Ορίζουμε τώρα

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \;\; f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \;\; \rho(A) = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ *και εύκολα ελέγχουμε ότι*

$$\lambda \perp \mu \;\; \rho << \mu.$$

Βήμα 3ο*:Το αποδεικνύουμε στην γενική περίπτωση όπου το* ν *είναι ένα σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και το* μ *είναι ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο.*

Αφού το ν *είναι προσημασμένο σ-πεπρασμένο μέτρο έπεται απο ορισμό ότι τα* ν^+, ν^- *που είναι δύο θετικά μέτρα ότι είναι σ-πεπερασμένα και αναγόμενοι στα προηγούμενα 2 βήματα αποδεικνύουμε το ζητούμενο.*

Θεώρημα (Θεώρημα Radon-Nikodyn)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος,*ν *σ-πεπρασμένο προσημασμένο μέτρο και* μ *ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με* $\nu << \mu$*.Τότε υπάρχει* $f \in L^1(\mu)$*,υπό την εκτεταμένη έννοια,ώστε για κάθε* $E \in \mathcal{A}$ *να ισχύει ότι*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Μάλιστα αν υπάρχει μια άλλη f *που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα τότε*

$$f = f'$$

μ*-σχεδόν παντού.*

Απόδειξη.

Απο το Θεώρημα Lebesgue Radon Nikodyn έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα λ, ρ και μοναδική $f \in L^1(\mu)$,υπό την εκτεταμένη έννοια,ώστε

$$\nu = \lambda + \rho,\ \lambda \perp \mu,\ \rho = \int_A f\, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Αφού όμως

$$\nu << \mu \quad \rho << \mu \implies \lambda = \nu - \rho << \mu$$

απο Άσκηση που είδαμε προηγουμένως και άρα αφού

$$\lambda << \mu \quad \textit{και} \quad \lambda \perp \mu$$

έπεται απο άλλη Άσκηση ότι τελικά

$$\lambda = 0 \implies \nu = \rho \implies \nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Για την μοναδικότητα της f επέται απο τις βασικές ιδιότητες του Ολοκληρώματος,αφού όπως έχουμε δεί

$$\textit{για κάθε } A \in \mathcal{A} : \int_A (f - f')\, d\mu = 0 \implies f = f' \ \mu\text{-}\textit{σχεδόν παντού}.$$

Ορισμός (παράγωγος Radon-Nikodym)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν σ-πεπρασμένο προσημασμένο μέτρο και μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με $\nu << \mu$.

Τότε η μοναδική $f \in L^1(\mu)$,υπο την εκετεταμέννη έννοια,για την οποία ισχύει ότι

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$,ονομάζεται ***παράγωγος Radon-Nikodyn του ν ως προς μ*** *και την* συμβολίζουμε με $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν_1, ν_2 σ-πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα και μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με $\nu_i << \mu$ για $i = 1, 2$.

Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

   μ-σχεδόν παντού.

2. *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$*

   $$\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a\frac{d\nu_1}{d\mu}$$

   μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

1. Αρχικά για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι

   $$(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \int \frac{d\nu_1}{d\mu} d\mu + \int_A \frac{d\nu_2}{d\mu} d\mu = \int_A \left(\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}\right) d\mu.$$

   Απο την άλλη αφού τα ν_1, ν_2 είναι προσημασμένα μέτρα έχουμε ότι και το $\nu_1 + \nu_2$ είναι προσημασμένο μέτρο και μάλιστα αφού $\nu_i << \mu$ για κάθε $i = 1, 2$,έχουμε απο Άσκηση ότι και $\nu_1 + \nu_2 << \mu$.

   Άρα απο το Θεώρημα Radon-Nikodyn ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodyn του $\nu_1 + \nu_2$ ως προς το μ και ισχύει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$

   $$(\nu_1 + \nu_2)(A) = \int_A \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}\, d\mu$$

και τελικά απο τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

μ-σχεδόν παντού.

2. *Όμοια με παραπάνω.*

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν σ-πεπρασμένο προσημασμένο μέτρο και μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με $\nu << \mu$.

1. *Αν ν είναι θετικό μέτρο τότε*

$$\frac{d\nu}{d\mu} \geq 0$$

μ-σχεδόν παντού.

2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu^+}{d\mu} - \frac{d\nu^-}{d\mu}$$

αν $\nu = \nu^+ - \nu^-$ είναι η διάσπαση Jordan του προσημασμένου μέτρου ν.

Μάλιστα ισχύει ότι

$$\frac{d\nu^+}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ \quad \text{και} \quad \frac{d\nu^-}{d\mu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^- .$$

3. *Αν το ν είναι θετικό μέτρο και ισχύει ότι $\nu(E) = 0$ για κάποιο $E \in \mathcal{A}$,τότε*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = 0$$

μ-σχεδόν παντού στο E.

4. *Ισχύει ότι*

$$\frac{d|\nu|}{d\mu} = \frac{d\nu^+}{d\mu} + \frac{d\nu^-}{d\mu}$$

αν $\nu = \nu^+ - \nu^-$ είναι η διάσπαση Jordan του προσημασμένου μέτρου ν.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν σ-πεπερασμένο μέτρο και μ,λ σ-πεπερρασμένα θετικά μέτρα στον μετρήσιμο χώρο αυτόν για τα οποία ισχύει ότι $\nu << \mu$ και $\mu << \lambda$.

1. *Αν $g \in L^1(\nu)$ τότε $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ και*

$$\int g\ d\nu = \int g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

λ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

1. *Αρχικά έστω ότι $g = \mathcal{X}_E$ όπου $\nu(E) < \infty$ τότε έχουμε ότι*

$$\int g\ d\nu = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}d\mu = \int \mathcal{X}_E\frac{d\nu}{d\mu} = \int g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu < \infty$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα αν $g \in L^1(\nu)$ είναι απλή έχουμε ότι απο γραμμικότητας του ολοκληρώματος ως προς τα μέτρα ν,μ έχουμε το ζητούμενο και για τέτοιες.

Τώρα αν g είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση τότε παρατηρούμε ότι απο Θεώρημα υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε

$$\phi_n \longrightarrow g.$$

Τότε παρατηρούμε όμως ότι απο θεώρημα Μονότονης σύγκλισης και το προηγούμενο βήμα,έχουμε ότι

$$\int g\ d\mu = \lim_n \int \phi_n\ d\nu = \lim_n \int \phi_n\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

Απο την άλλη έχουμε και ότι η ακολουθία $\left(\phi_n \frac{d\nu}{d\mu}\right)$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων ως γινόμενο τέτοιων και*

$$\phi_n \frac{d\nu}{d\mu} \longrightarrow g \frac{d\nu}{d\mu}$$

και άρα πάλι απο το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \lim_n \int \phi_n \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

Επομένως απο την μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι

$$\int g \, d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Για γενική τώρα $g \in L^1(\nu)$ *γράφουμε*

$$g = g^+ - g^-$$

και οι g^+, g^- *είναι μη αρνητικές συναρτήσεις και επομένως απο την γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το προηγούμενο βήμα έχουμε ότι*

$$\int g \, d\nu = \int g^+ \, d\nu - \int g^- \, d\nu = \int g^+ \frac{d\nu}{d\mu} d\mu - \int g^- \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int g \frac{d\mu}{d\nu} d\mu$$

και έχουμε το ζητούμενο.

2. *Αφού* $\mu << \lambda$ *έπεται απο το 1. ότι για κάθε* $g \in L^1(\mu)$ *ισχύει ότι*

$$\int g \, d\mu = \int g \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

Έστω τώρα $E \in \mathcal{A}$ *και θεωρούμε την* $g = \mathcal{X}_E \frac{d\nu}{d\mu}$ *και απο τα παρπάνω έχουμε ότι*

$$\int g \, d\mu = \int \mathcal{X}_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \nu(E).$$

Αφού όμως και

$$\int g\, d\mu = \int \mathcal{X}_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

έχουμε τελικά,εξισώνονοντας τα δεξιά μέλη,ότι

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

για κάθε $E \in \mathcal{A}$,αφού αυτό ήταν τυχόν.

Απο το μονοσήμαντο όμως της παραγώγου Radon-Nikodym του ν ως προς το λ(ορίζεται γιατί $\nu << \lambda$),έχουμε ότι

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

λ-σχεδόν παντού και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα.

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ ένα σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο για τα οποια ισχύει ότι $\nu << \mu$ και $\mu << \nu$.Τότε ισχύει ότι

$$\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu} = 1$$

μ-σχεδόν παντού και λ-σχεδόν παντού.

Πρόταση . *(conditional expectation)*

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου,$\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ μια υπο-άλγεβρα της $\mathcal{A}$ και $f \in L^1(\mu)$.Τότε αν θέσουμε $\nu = \mu|_{\mathcal{G}}$ τότε υπάρχει $g \in L^1(\nu)$ ώστε

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\nu$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$.

Μάλιστα αν g' είναι μια άλλη τέτοια συνάρτηση τότε $g = g'$ ν-σχεδόν παντού.

Η g καλείται conditional expectation της f στην $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}[f|\mathcal{G}]$.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $f \geq 0$ *και τότε θεωρούμε το μέτρο* $\lambda : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ *με*

$$\lambda(B) = \int_B f d\mu$$

για κάθε $B \in \mathcal{G}$ *και παρατηρούμε ότι το* λ *είναι ένα θετικό και πεπερασμένο μέτρο(αφού η* f *είναι ολοκληρώσιμη) με* $\lambda << \nu$*.Άρα απο το Θεώρημα Radon-Nikodym,έχουμε ότι υπάρχει* $g \in L^1(X, \mathcal{G}, \nu)$ *ώστε*

$$\lambda(B) = \int_B g d\nu, \text{ για κάθε } B \in \mathcal{G}$$

και άρα τελικά

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\nu, \text{ για κάθε } B \in \mathcal{G}.$$

Για την γενική περίπτωση όπου $f \in L^1(\mu)$ *γράφουμε* $f = f^+ - f^-$ *και αφού* $f^+, f^- \geq 0$ *και είναι ολοκληρώσιμες,έπεται απο το προηγούμενο βήμα ότι υπάρχουν οι conditional expectations των* f^+, f^- *ως προς την* $\mathcal{G}$*,έστω* g_1, g_2 *αντίστοιχα.Τότε αν θέσουμε* $g = g_1 - g_2$*,τότε ελέγχεται ότι αυτή ικανοποίει την ζητούμενη ιδιότητα για την* f.

3.3 Μιγαδικά μέτρα

Ορισμός . *(μ΄ μ΄)*

Μιγαδικό μέτρο *στον μετρήσιμο χώρο* $(X, \mathcal{A})$ *είναι μια συνάρτηση* $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:*

1. *Ισχύει ότι*

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

2. *Για κάθε* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την* $\mathcal{A}$ *ισχύει ότι*

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

όπου η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απόλυτα,δηλαδή το ν *δεν παίρνει την τιμή* ∞.

Παραδείγματα 4.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου και έστω και* $f : X \to \mathbb{C}$ *μια μετρήσιμη συνάρτη-ση.Τότε αν θεωρήσουμε την συνάρτηση* $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *όπου*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$,*τότε εύκολα ελέγχεται ότι αυτό είναι μιγαδικό μέτρο.*

Παρατηρήσεις .

Αν $(X, \mathcal{A})$ *είναι ένας μετρήσιμος χώρος και* ν *είναι ένα μιγαδικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτόν,τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$\nu = \nu_R + i\nu_I$$

όπου ν_R, ν_I *είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του* ν.

Τότε τα ν_R, ν_I *είναι προσημασμένα μέτρα που δεν παίρνουν τις τιμές* $+\infty, -\infty$ *και άρα είναι πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα.*

Ορισμός .

Αν $(X, \mathcal{A})$ *είναι ένας μετρήσιμος χώρος και* ν *είναι ένα μιγαδικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτόν.*

Τότε αν $\nu = \nu_R + i\nu_I$,*ορίζουμε*

$$L^1(\nu) = L^1(\nu_R) \cap L^1(\nu_I)$$

και αν $f \in L^1(\nu)$,*τότε*

$$\int f \, d\nu := \int f \, d\nu_R + i \int f \, d\nu_I$$

Ορισμός (απόλυτη συνέχεια μιγαδικών μέτρων).

Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος,ν ένα μιγαδικό μέτρο και μ ένα θετικό μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε λέμε ότι ***το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ*** *και το συμβολίζουμε με $\nu << \mu$ ανν τα ν_R, ν_I,που είναι προσημασμένα μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$,είναι απολύτως συνεχή ως προς το μ,δηλαδή*

$$\nu_R << \mu \quad \textit{και} \quad \nu_I << \mu.$$

Ορισμός (αμοιβαία ιδιάζοντα μιγαδικά μέτρα).

Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και ν, μ δύο μιγαδικά μέτρα στον χώρο αυτόν.Τότε λέμε ότι τα ν,μ είναι ***αμοιβαία ιδιάζοντα***,*και το συμβολίζουμε με $\nu \perp \mu$,αν:*

$$\nu = \nu_R + i\nu_I \quad \textit{και} \quad \mu = \mu_R + i\mu_I$$

τότε

$$\nu_a \perp \mu_b$$

για κάθε $a, b \in \{R, I\}$.

Θεώρημα (Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym για μιγαδικά μέτρα).

Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος,ν ένα μιγαδικό μέτρο και μ ένα σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε υπάρχουν μιγαδικά μέτρα λ, ρ και $f \in L^1(\mu)$ ώστε

$$\nu = \lambda + \rho, \ \lambda \perp \mu, \rho(A) = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Μάλιστα αν υπάρχει και ένα άλλο ζευγάρι μιγαδικών μέτρων (λ', ρ') και μια άλλη $f' \in L^1(\mu)$ που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες,τότε

$$\lambda = \lambda' \ \textit{και} \ \rho = \rho'$$

και

$$f = f'$$

μ-σχεδόν παντού.

Θεώρημα (Θεώρημα Radon-Nikodyn για μιγαδικά μέτρα).
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν μιγαδικό μέτρο και μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με $\nu << \mu$.Τότε υπάρχει $f \in L^1(\mu)$,υπό την εκτεταμένη έννοια,ώστε για κάθε $E \in \mathcal{A}$ να ισχύει ότι

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Μάλιστα αν υπάρχει μια άλλη f που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα τότε

$$f = f'$$

μ-σχεδόν παντού.

Ορισμός .
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν μιγαδικό μέτρο και μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο αυτό με $\nu << \mu$.
Τότε η μοναδική $f \in L^1(\mu)$,υπο την εκετεταμέννη έννοια,για την οποία ισχύει ότι

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$,ονομάζεται ***παράγωγος Radon-Nikodyn του ν ως προς μ*** *και την συμβολίζουμε με $\frac{d\nu}{d\mu}$.*
Δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος,ν μιγαδικό μέτρο και μ,λ σ-πεπερασμένα θετικά μέτρα στον μετρήσιμο χώρο αυτόν για τα οποία ισχύει ότι $\nu << \mu$ και $\mu << \lambda$.

1. *Αν $g \in L^1(\nu)$ τότε $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ και*

$$\int g \, d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

   λ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη.

Η απόδειξη γίνεται εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες προτάσεις για τα πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα ν_R, ν_I στην ανάλυση του ν.

Ορισμός (κύμανση μιγαδικού μέτρου)**.**

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και ν ένα μιγαδικό μέτρο στον χώρο αυτόν.Τότε ορίζουμε $\mu = |\nu_R| + |\nu_I|$ και αυτό είναι ένα θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο με $\nu << \mu$ και άρα ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodyn του ν ως προς μ. Άρα αν θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση $|\nu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ που ορίζεται ως

$$|\nu|(A) = \int_A \left| \frac{d\nu}{d\mu} \right| \, d\mu$$

*για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε αυτή είναι ένα θετικό μέτρο και ονομάζεται **κύμανση του ν**.*

Παρατηρήσεις .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος,ν ένα μιγαδικό μέτρο και μ_1, μ_2 δύο θετικά και σ-πεπερασμένα μέτρα με $\nu << \mu_1$ και $\nu << \mu_2$.

Τότε ορίζονται οι παράγωγοι Radon-Nikodym του ν ως προς τα δύο μέτρα μ_1, μ_2 και αν θέσουμε $f_1 = \frac{d\nu}{d\mu_1}$ και $f_2 = \frac{d\nu}{d\mu}$,τότε παρατηρούμε ότι

$$\int_A |f_1| \, d\mu_1 = \int |f_2| \, d\mu_2$$

,δηλαδή ο ορισμό της κύμνασης του μιγαδικού μέτρου ν είναι καλά ορισμένος.

Πράγματι αν θεωρήσουμε το θετικό και σ-πεπρασμένο μέτρο $\rho = \mu_1 + \mu_2$ τότε παρατηρούμε ότι αφού κατα προφανή τρόπο ισχύει ότι

$$\mu_1 << \rho \;\text{ και }\; \mu_2 << \rho$$

έχουμε ότι και $\nu << \rho$ και άρα ορίζεται η $\frac{d\nu}{d\rho}$ και ισχύει ότι

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\rho} = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho}$$

ρ-σχεδόν παντού,απο προηγούμενη Πρόταση.

Επίσης αφού μ_1, μ_2, ρ είναι θετικά μέτρα.έπεται ότι

$$\frac{d\mu_1}{d\rho} \geq 0 \;\text{ και }\; \frac{d\mu_2}{d\rho} \geq 0$$

ρ-σχεδόν παντού και επομένως έχουμε ότι

$$|f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho}$$

ρ-σχεδόν παντού.

Επομένως έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A |f_1| d\mu_1 = \int_A |f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = \int_A |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho = \int_A |f_2| d\mu_2$$

απο προηγούμενη Πρόταση και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση .

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω και ν ένα μιγαδικό μέτρο στον μετρήσιμο *χώρο αυτόν. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. *Για κάθε* $A \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*
$$|\nu(A)| \leq |\nu|(A).$$

2. *Ισχύει ότι* $\nu << |\nu|$ *και*
$$\left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right| = 1$$
$|\nu|$*-σχεδόν παντού.*

3. *Ισχύει ότι* $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ *και αν* $f \in L^1(\nu)$ *τότε ικανοποιείται η ανισότητα*
$$\left|\int f\ d\nu\right| \leq \int |f|\ d|\nu|.$$

Απόδειξη.

1. *Αρχικά θεωρούμε θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο* μ *με* $\nu << \mu$ *και τότε παρατηρούμε ότι για κάθε* $A \in \mathcal{A}$
$$|\nu(A)| = \left|\int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu\right| \leq \int_A \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu = |\nu|(A).$$

2. *Αρχικά παρατηρούμε ότι το* $\nu << |\nu|$ *είναι άμεσο, απο τον ορισμό της κύμανσης του* ν*,και επομένως ορίζεται η παράγωγος Radon-Nikodym του* ν *ως προς το* $|\nu|$*. Επίσης παρατηρούμε ότι αφού* $\nu << \mu$ *και* $|\nu| << \mu$ *έχουμε ότι απο προηγούμενη Πρόταση*
$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d|\nu|}\frac{d|\nu|}{d\mu}$$
μ*-σχεδόν παντού και άρα και* ν*-σχεδόν παντού και άρα*
$$\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right|\left|\frac{d|\nu|}{d\mu}\right| = \left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right|\frac{d|\nu|}{d\mu} \tag{26}$$

$|\nu|$-σχεδόν παντού,όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\frac{d|\nu|}{d\mu} \geq 0$$

μ-σχεδόν παντού αφού $|\nu|, \mu$ είναι θετικά μέτρα.

Τώρα παρατηρούμε όμως ότι

$$\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \frac{d|\nu|}{d\mu} > 0$$

$|\nu|$ -σχεδόν παντού και άρα απο την (26) έχουμε ότι

$$\left|\frac{d\nu}{d|\nu|}\right| = 1$$

$|\nu|$-σχεδόν παντού.

3. Έστω αρχικά $f \in L^1(\nu)$ και τότε αν πάρουμε θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο μ με $\nu << \mu$,έχουμε ότι

$$\int |f|\, d|\nu| = \int |f| \frac{d|\nu|}{d\mu} d\mu = \int |f| \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu = \int |f| \left|\frac{d\nu_R}{d\mu} + i\frac{d\nu_I}{d\mu}\right|$$

$$\leq \int |f| \left|\frac{d\nu_R}{d\mu}\right| + \int |f| \left|\frac{d\nu_I}{d\mu}\right|$$

$$= \int |f|\, d|\nu_R| + \int |f|\, d|\nu_I| < \infty$$

γιατί

$$L^1(\nu) = L^1(\nu_R) \cap L^1(\nu_I) = L^1(|\nu_R|) \cap L^1(|\nu_I|)$$

λόγω των ορισμών που έχουμε δώσει.Επομένως έχουμε ότι $f \in L^1(|\nu|)$ και έτσι αποδείξαμε ότι

$$L^1(\nu) \subset L^1(|\nu|).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό τώρα έχουμε ότι αφού για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$|\nu_R(A)| \leq |\nu_R + i\nu_I(A)| = |\nu(A)| \leq |\nu|(A)$$

και αντίστοιχα

$$|\nu_I(A)| \leq |\nu|(A)$$

και τα ν_R, ν_I είναι προσημασμένα μέτρα και το $|\nu|$ είναι θετικό μέτρο,έχουμε ότι

$$|\nu_R| \leq |\nu|$$

και

$$|\nu_I| \leq |\nu|.$$

Επομένως έχουμε ότι αν πάρουμε $f \in L^1(|\nu|)$ έπεται ότι

$$\int |f|\, d|\nu_R| \leq \int |f|\, d|\nu| < \infty \ \ \text{και} \ \int |f|\, d|\nu_I| \leq \int |f|\, d|\nu| < \infty$$

και άρα $f \in L^1(|\nu_R|) \cap L^1(|\nu_I|) = L^1(\nu)$ και έχουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό απο όπου και έπεται η ισότητα.
Επίσης παρατηρούμε ότι αν $f \in L^1(|\nu|)$ έχουμε ότι

$$\left|\int f\, d\nu\right| = \left|\int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu\right| \leq \int |f| \left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu = \int |f| \frac{d|\nu|}{d\mu} d\mu = \int |f|\, d|\nu|$$

και έχουμε και την ζητούμενη ανισότητα.

Θεώρημα.

Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και ν_1, ν_2 είναι δύο μιγαδικά μέτρα στον μετρήσιμο χώρο αυτόν,τότε ισχύει ότι

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|.$$

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε μ ένα σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο με $\nu_i << \mu$ για *κάθε* $i = 1, 2$,*τότε παρατηρούμε ότι και* $\nu_1 + \nu_2 << \mu$ *και έχουμε ότι*

$$\frac{d|\nu_1 + \nu_2|}{d\mu} = \left|\frac{d\nu_1 + d\nu_2}{d\mu}\right| = \left|\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}\right| \leq \left|\frac{d\nu_1}{d\mu}\right| + \left|\frac{d\nu_2}{d\mu}\right| = \frac{d|\nu_1|}{d\mu} + \frac{d|\nu_2|}{d\mu}$$

και άρα για κάθε $A \in \mathcal{A}$

$$|\nu_1 + \nu_2|(A) = \int_A \frac{d|\nu_1 + \nu_2|}{d\mu} d\mu \leq \int \frac{d|\nu_1|}{d\mu} d\mu + \int_A \frac{d|\nu_2|}{d\mu} d\mu = |\nu_1|(A) + |\nu_2|(A)$$

και έχουμε το ζητούμενο.