Μάθημα 13ο: Αρμονική Ανάλυση Σκαλοβόρανας

- **Θεώρημα:** Αν $(K_n)_{n\geq 1}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας και $f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι: $\|K_n * f - f\|_1 \longrightarrow 0$ όταν $n\to+\infty$.

▸ **Απόδειξη:** Έχουμε αρχικά ότι: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\, f(t-s)\,ds - f(t) = (K_n * f)(t) - f(t)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(K_n(s) f(t-s) - f(t) K_n(s)\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right) ds \quad (*)$$

αφού: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\,ds = 1$

$$\Rightarrow \cancel{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right)ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\right.}$$

$$\|K_n * f - f\|_1 = \cancel{\int_0^{2\pi} |K_n(s)|}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n * f(t) - f(t)|\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f_s(t)-f(t)\right)ds\right| dt$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t)-f(t)|\,ds\,dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t)-f(t)|\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\left(\int_0^{2\pi} |f_s(t)-f(t)|\,dt\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,\|f_s - f\|_1\,ds = \frac{1}{2\pi}\left(\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds\right.$$

$$\left. + \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(s)|\,\|f_s - f\|_1\,ds\right).$$ Τώρα για το πρώτο παρατηρούμε ότι: $\|f_s - f\|_1 \leq \|f_s\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ και άρα: $\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds \leq 2\|f\|_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}|K_n(s)|\,ds \xrightarrow{n\to\infty} 0$ εξ' ορισμού. Τώρα για το δεύτερο ολοκλήρωμα: επειδή: $\|f_s - f\|_1 \xrightarrow{s\to 0} 0$

έπεται ότι: $\forall \varepsilon>0$: $\exists$ [redacted] $\delta\in(0,\pi)$ ώστε αν: $s\in[-\delta,\delta]$ έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 < \varepsilon$.

Έτσι: επιλέγουμε τυχόν $\varepsilon>0$ και τότε βρίσκουμε ένα τέτοιο $\delta>0$ $(\delta\in(0,\pi))$ και έχουμε ότι:

$$\int_{-\delta}^{\delta} |K_n(s)|\,\|f_s-f\|_1\,ds \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(s)|\,ds \leq \varepsilon\, 2\pi\, \|K_n\|_1 \leq \varepsilon 2\pi \sup_{n\in\mathbb{N}} \|K_n\|_1 = 2\pi\varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|K_n\|$$

[redacted] $= 2\pi\varepsilon C$ και άρα αφήνοντας $n\to+\infty$: $\limsup_{n\to+\infty} \|K_n * f - f\|_1 \leq 2\pi\varepsilon C,\ \forall \varepsilon>0$

και άρα αφήνοντας $\varepsilon\to 0^+$ έχουμε το ζητούμενο.

- Πυρήνας Dirichlet: $D_n(t)=\sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$, $t\in\mathbb{T}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, και αυτό είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Τότε έχουμε ότι: $D_n * f(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)\, e^{ijt} = (S_n * f)(t)$ από πόρισμα που έχουμε δει.

▷ Λήμμα: $D_n(t)=\dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$:

- Απόδειξη:

$$D_n(t)=\sum_{j=0}^{n} e^{ijt} + \sum_{j=-n}^{0} e^{ijt} - 1 = \sum_{j=0}^{n} e^{ijt} + \sum_{j=0}^{-n} e^{-ijt} - 1 = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{1-e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}}$$

$$-1 = \frac{e^{-it/2}-e^{i(n+1/2)t}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}} + \frac{e^{\frac{it}{2}}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}} - 1 = \frac{e^{-\frac{it}{2}}-e^{i(n+1/2)t}-e^{it/2}+e^{-i(n+1/2)t}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} - 1$$

$$= \frac{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}} - \frac{e^{it(n+1/2)}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{it/2}} - 1 = 1 - \cancel{\frac{e^{\frac{it}{2}}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}} \qquad \left(\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} - 1 = \frac{2i\sin(n+1/2)t}{2i\sin(t/2)} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

- **Άσκηση:** $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0:\ \|D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\log n$: Επομένως έχουμε ότι: ο πυρήνας D_n δεν είναι πυρήνας αθροισιμότητας όπως θα θέλαμε αφού δεν είναι φραγμένος ως προς $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|D_n\|_1=+\infty$.

- **Πυρήνας Fejér:** $K_n(t)=\frac{1}{n+1}\left(D_0(t)+D_1(t)+\dots+D_n(t)\right)$ (οι μέσοι όροι του πυρήνα Dirichlet).

• Τώρα: $(K_n*f)(t)=\frac{1}{n+1}\left(D_0*f(t)+D_1*f(t)+\dots+D_n*f(t)\right)=\frac{1}{n+1}\left(S_0(f)(t)+\dots+S_n(f)(t)\right)$ = οι μέσοι όροι των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f [redacted]

- **Λήμμα 1ο:** 1). $K_n(t)=\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt},\ n\in\mathbb{N}_0,\ t\in\mathbb{T}$

2). $K_n(t)=\frac{1}{n+1}\,\frac{\sin^2(\text{[redacted]}\,(n+1)\frac{t}{2})}{\sin^2(t/2)}\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}_0,\ \forall t\in\mathbb{T}$

- **Απόδειξη:** 1). Ένας τρόπος είναι ο εξής: $K_n(t)=\frac{1}{n+1}\Big(1+(1+e^{it}+e^{-it})+(1+e^{it}+e^{-it}+e^{i2t}+e^{-2it})+\dots+(1+e^{it}+e^{-it}+e^{i2t}+e^{-i2t}+\dots+e^{int}+e^{-int})\Big)$

$=\frac{1}{n+1}\Big((n+1)\cdot 1+ne^{it}\cancel{+(n-1)e^{2it}}+n(e^{it}+e^{-it})+\dots+(e^{int}-e^{-int})\Big)$

$=1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)(e^{it}-e^{it})+\dots+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)(e^{int}+e^{-int})=\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}$

1). **Άλλος τρόπος:** $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k}e^{ijt}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}e^{ijt}+\sum_{j=0}^{k}e^{-ijt}\right)-1$

$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(e^{ijt}+e^{-ijt})-1=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(e^{ijt}+e^{-ijt})$ [redacted] $-1=\dots=\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)e^{ijt}=K_n(t)$

2). Παρατηρούμε ότι: $\sin^2(t/2)=\left(\frac{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}}{2i}\right)^2=-\frac{e^{it}+e^{-it}-2\text{[redacted]}}{4}$

$=\frac{2-e^{it}-e^{-it}}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}-\frac{1}{4}e^{-it}$ και επίσης: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}-\frac{1}{4}e^{-it}\right)K_n(t)$

$$=\left(-\frac{1}{4}e^{it}-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = -\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t} = \sin^2\frac{(n+1)t}{2}$$

γιατί: πράξεις με επιμεριστική ιδιότητα και βγαίνει.

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin((k+1/2)t)}{\sin(t/2)} = \frac{1}{2(n+1)\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin(t/2)\sin((k+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}2\sin(t/2)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(kt)-\cos((k+1)t)\right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\sin^2(t/2)}\left(1-\cos(n+1)t\right) = \frac{1-\cos((n+1)t)}{2(n+1)\sin^2(t/2)} = \frac{1}{2(n+1)\sin^2 t/2}\cdot 2\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{(n+1)\sin^2 t/2} \quad \left(1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\right)$$

- <u>Πόρισμα:</u> Ο πυρήνας του Fejér είναι πυρήνας άθροισης:

▷ <u>Απόδειξη:</u> <u>i).</u> $\int_0^{2\pi}K_n(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}\,dt = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi}e^{ijt}\,dt$

μόνο για $j=0$
$= 2\pi$

<u>ii).</u> Επίσης: $K_n(t)\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \|K_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(t)\,dt = 1<+\infty$

<u>iii).</u> $\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{\sin^2\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^2(t/2)}\,dt$ (*). Όμως: για $\delta<t<2\pi-\delta$

έχουμε ότι: $\frac{\delta}{2}<\frac{t}{2}<\pi-\frac{\delta}{2} \Rightarrow \sin^2(t/2)\geq\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)>0$ και άρα:

$$(*)\leq\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}\,dt = \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \leq \frac{\pi}{\pi\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)(n+1)} = \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\xrightarrow{n\to+\infty}0$$