- Μάθημα 12ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαρμόγιαννης

▷ <u>Συνέλιξη Συναρτήσεων:</u> Έστω $f,g \in L^1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε την συνέλιξη των f και g ως: $(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds$ ως την συνέλιξη των f και g.

- Η $f*g$ είναι καλά ορισμένη: Αρχικά η $s \longmapsto t-s$ είναι συνεχής και η f είναι μετρήσιμη και άρα η συνάρτηση: $s \longmapsto f(t-s)$ είναι μετρήσιμη ως σύνθεση συνεχούς με μετρήσιμη. Έτσι και η $s \longmapsto f(t-s)g(s)$ είναι μετρήσιμη ως γινόμενο τέτοιων.
Επίσης έχουμε ότι: $\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,dt\,ds = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,dt\,ds = \int_{\mathbb{T}} |g(s)|\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)|\,dt\right)ds$

$= \left(\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\,ds\right)\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt\right)$ αφού $f,g \in L^1(\mathbb{T})$.

Τώρα από το Θεώρημα Tonelli: $s \longmapsto f(t-s)g(s) \in L^1(\mathbb{T})$ για σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{T}$

▷ <u>Πρόταση:</u> Έστω $f,g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε:

1. $f*g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
2. $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n),\ \forall n \in \mathbb{Z}$

- <u>Απόδειξη:</u> 1. $\|f*g\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f*g(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds \right| dt$

$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)||g(s)|\,ds\,dt \overset{\text{Tonelli}}{=} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{T}} |g(s)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-s)|\,dt\right) ds$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\,ds\right)\left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt\right) = \|f\|_1 \|g\|_1$ και άρα έχουμε το 1.

2. $\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f*g)(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds\right)e^{-int}\,dt$

$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t-s)e^{-int}\right)g(s)\,ds = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t-s)e^{-in(t-s)}\,dt\right)g(s)e^{-ins}\,ds$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s)e^{-ins}\,ds\right)$

Scanned with CamScanner

$= \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

- **Πρόταση:** Έστω $f,g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε έχουμε ότι:

(α). $f*g = g*f$ (μεταθετική)

(β). $(f*g)*h = f*(g*h)$ (προσεταιριστική)

(γ). $f*(g+h) = f*g + f*h$ (

- **Απόδειξη:** $(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds \overset{\substack{u=t-s \\ du=-ds}}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_t^{t-2\pi} f(u)g(t-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{t-2\pi}^{t} g(t-u)f(u)\,du = (g*f)(t)$

↳ 2π-περιοδική

- $((f*g)*h)(t) = \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(}$ .... με απλές πράξεις και όμοια και το (γ).

▷ **Λήμμα:** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ορίζω $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$ και τότε: $(e_n * f)(t) = e_n(t)\hat{f}(n)$

- **Απόδειξη:** $(e_n * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_n(t-s) f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-s)} f(s)\,ds = e^{int}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins} f(s)\,ds$

$= e_n(t)\hat{f}(n)$

- **Πόρισμα:** Έστω $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο, $c_j \in \mathbb{C}$. Τότε $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε ότι: $P*f(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) c_j e^{ijt}$

Scanned with CamScanner

- **Πυρήνες Αθροισιμότητας:**

- **Ορισμός:** Ένας πυρήνας αθροισιμότητας στο $\mathbb{T}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(K_n)_{n\geq 1}$ στο $\mathbb{T}$ ή ισοδύναμα 2π-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ ($K_n: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ή $K_n: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-περιοδική) τέτοια ώστε: (α). $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt = 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$, (β). $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt < +\infty$ και (γ). $\lim_{n\to\infty} \int_\delta^{2\pi} |K_n(t)|\,dt = 0,\ \forall \delta>0$

- Ένας πυρήνας αθροισιμότητας είναι θετικός αν $K_n(t)\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{T}$.

Στην περίπτωση αυτή η (β). του ορισμού προκύπτει άμεσα από την (α).

- **Πρόταση:** (Δύο βασικές ιδιότητες του $L^1(\mathbb{T})$):

1. Αν $f\in L$[redacted]$(\mathbb{T})$ και $f_s(t) = f(t-s)$, $t,s\in\mathbb{T}$ τότε: $f_s\in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f_s\|_1 = \|f\|_1$
2. Για κάθε $f\in L^1(\mathbb{T})$ [redacted] έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 \xrightarrow{s\to 0} 0$ και επίσης $\|f_s - f_t\|_1 \xrightarrow{s\to t} 0$

- **Απόδειξη:**

1. Το έχουμε δει
2. Έστω αρχικά $f\in C(\mathbb{T})$. Έστω και $\varepsilon>0$. Τότε έχουμε ότι: $\exists\,\delta>0$ τέτοιο ώστε: αν $p(s,t) = \min\{|s-t|, 2\pi-|s-t|\}<\delta$ τότε: $|f(t)-f(s)|<\varepsilon$ (ομοιόμορφα συνεχής) Έτσι έχουμε ότι αν $0<s<\delta$ τότε ~~έχουμε~~ ότι: ή $2\pi-\delta<s<2\pi$ τότε έχουμε ότι: [redacted] $|f_s(t)-f(t)| = |f(t-s)-f(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in\mathbb{T}$. Άρα τώρα έχουμε ότι: $\|f_s - f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(t)-f(t)|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\, 2\pi = \varepsilon$ και άρα αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι: $\lim_{s\to 0}\|f_s - f\|_1 = 0$. Γενικά: $\|f_t - f_s\|_1 = \|f_{t-s} - f\|_1$ με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και άρα: $\lim_{s\to t}\|f_t - f_s\|_1 = \lim_{s\to t}\|f_{t-s}$[redacted]$- f\|_1 = 0$. Τώρα γενικά: αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$ τυχαίο βρίσκουμε $g\in C(\mathbb{T})$ με: $\|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$. Τότε όμως: $\|f_s - f\|_1 \leq \|f_s - g_s\|_1 + \|g_s - g\|_1 + \|g-f\|_1$ [redacted] $= \|f-g\|_1 + \|g_s - g\|_1 + \|f-g\|_1$ $= 2\|f-g\|_1 + \|g_s-g\|_1 < \varepsilon + \|g_s - g\|_1$ και άρα παίρνοντας $\overline{\lim_{s\to 0}}$ έχουμε ότι: $\overline{\lim_{s\to 0}}\|f_s - f\|_1 \leq \varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$ και άρα αφήνοντας $\varepsilon\to 0^+$: $\limsup_{s\to 0}\|f_s - f\|_1 = 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Scanned with CamScanner

- **Τύπος Αλλαγής Μεταβλητής:**

Αν $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $T: \mathcal{U} \to V$ είναι διαφορίσιμη, επί, 1-1 (και [redacted] $\det J_T(x) \neq 0$, $\forall x \in V$) τότε: $\int_V f(T(x))|\det J_T(x)|\,dx =$

$$\int_V f(y)\,dy$$

- **Θεώρημα:** Αν $(K_n)_{n\geq 1}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας και $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι:

$\|K_n * f - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to +\infty$.

- **Απόδειξη:** Έχουμε αρχικά ότι: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t) = (K_n * f)(t) - f(t)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(K_n(s)f(t-s) - f(t)K_n(s)\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s) - f(t)\right)ds \quad (*)$$

αφού: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\,ds = 1$

$$\Rightarrow \cancel{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s) f(t-s)\,ds - f(t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f(t-s)-f(t)\right)ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0\right|}$$

$$\|K_n * f - f\|_1 = \cancel{\int_0^{2\pi}|K_n(s)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n * f(t) - f(t)|\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(s)\left(f_s(t) - f(t)\right)ds\right|dt$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t) - f(t)|\,ds\,dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,|f_s(t) - f(t)|\,dt\,ds$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\left(\int_0^{2\pi} |f_s(t) - f(t)|\,dt\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(s)|\,\|f_s - f\|_1\,ds$$

Scanned with CamScanner