- Μάθημα 9ο: Αρμονική Ανάλυση: Σπαρμόγραμμα

▷ <u>Ορισμός:</u> Μια μετρήσιμη συνάρτηση f του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>τοπικά ολοκληρώσιμη</u> αν $\forall x \in \mathbb{R}^n : \exists \delta_x > 0 : f \cdot 1_{B(x,\delta_x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Αυτό είναι ισοδύναμο με $f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Οι τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμβολίζονται με $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- <u>Θεώρημα:</u> (Παραγώγισης του Lebesgue): Για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ανοικτή} \\ \text{μπάλα}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y)| \, d\lambda_n(y) = f(x)$ λ_n-σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$.

▷ <u>Απόδειξη:</u> Έστω $m \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την $f \cdot 1_{B(0,m)}$ για την δοσμένη $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Τώρα παρατηρούμε ότι $B(0,m)$ περιέχεται σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αφού: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έπεται ότι: $f \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε K συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ και άρα έχουμε ότι: και $f \cdot 1_{B(0,m)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($B(0,m) \subseteq \overline{B}(0,m) =$ κλειστό και φραγμένο $=$ συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$).

Εφαρμόζουμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για την $f \cdot 1_{B(0,m)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έχουμε ότι: $\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B$ [redacted] $f \cdot 1_{B(0,m)} \, d\lambda_n \xrightarrow[\substack{x\in B \\ =\text{ανοικτή} \\ \text{μπάλα}}]{\lambda_n(B)\to 0} f(x) 1_{B(0,m)}(x)$ σε ένα σύνολο E_m όπου: $\lambda(E_m^c) = 0$. Για $x \in B(0,m)$ οι μέσοι όροι: $\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \cdot 1_{B(0,m)} \, d\lambda_n = \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_{B \cap B(0,m) = B} f \, d\lambda_n$ για B με $\lambda(B)$ αρκετά μικρό ώστε: $B(0,m)$ [redacted] B.

Έπεται ότι για $x \in B(0,m) \cap E_m$: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda = f(x)$ και $\lambda(B(0,m) \setminus E_m) = 0$

και άρα για $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} (B(0,m) \cap E_m)$ έχουμε ότι: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f \, d\lambda = f(x)$ και:

$\lambda(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (B(0,m) \cap E_m)) \leq \lambda(\mathbb{R}^n \setminus B(0,m) \cap E_m) = 0$ και άρα η ⊛ ισχύει λ_n-σχεδόν παντού.

▷ <u>Ορισμός:</u> Για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ το <u>σύνολο Lebesgue</u> ($Leb(f)$) της f είναι τα $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει: $\lim\limits_{\substack{x\in B \\ \lambda_n(B)\to 0 \\ B:\text{ανοικτή} \\ \text{μπάλα}}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B$ [redacted] $|f(y) - f(x)| \, d\lambda_n(y) = 0$

▸ **Θεώρημα:** Έστω $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Τότε το σύνολο Lebesgue της f ικανοποιεί $\lambda(\mathbb{R}^n\setminus Leb(f))=0$.

– **Απόδειξη:** Έστω $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, και από το Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue για την $f-r\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ (r: σταθερά) η οποία είναι $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B:\ \text{ανοικτή}}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B |f(y)-r|\,d\lambda_n = |f(x)-r|$$ για x σε ένα σύνολο E_r όπου: $\lambda(E_r^c)=0$. Έστω $E=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}} E_r$ και τότε: $\lambda(E^c)=0$ και έστω τώρα: $x\in E$ και έστω και $\varepsilon>0$: και έστω τώρα και $r\in\mathbb{Q}$: $|f(x)-r|<\frac{\varepsilon}{2}$ και τότε

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy \le \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy+\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(x)-r|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}+2|f(x)-r| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2$$

για $\lambda(B)$ αρκετά μικρό

αφού: $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-r|\,dy < |f(x)-r|+\varepsilon$

▸ **Ορισμός:** Έστω $E\subseteq\mathbb{R}^n$ μετρήσιμο. Ένα $x\in\mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο πυκνότητας του E

αν: $$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda_n(B)}=1.$$

~~– Απόδειξη: Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για $f=\mathbb{1}_E\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$~~

~~$\lim_{x\in B}$~~

▸ **Θεώρημα:** Αν $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E)>0$ τότε σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E και σχεδόν κάθε σημείο του E^c δεν είναι σημείο πυκνότητας του E. Μάλιστα: $\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)}=0$ σχεδόν για κάθε $x\in E^c$.

– **Απόδειξη:** Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ όπου: $f=\mathbb{1}_E$:

$$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B:\ \text{ανοικτή}}} \frac{1}{\lambda_n(B)}\int_B \mathbb{1}_E\,d\lambda_n = \lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B:\ \text{ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)} = \mathbb{1}_E(x)=1$$ για x σε ένα σύνολο A

με $\lambda_n(A^c)=0$. Για $x\in E\cap A$: $$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B:\ \text{ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E)}{\lambda_n(B)}=1$$ και όμοια για $x\in E^c\cap A$:

$$\lim_{\substack{x\in B\\ \lambda_n(B)\to 0\\ B:\ \text{ανοικτή}}} \frac{\lambda_n(B\cap E^c)}{\lambda_n(B)}=0$$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. ($\lambda(E\setminus E\cap A)=\lambda(E\setminus A)\le\lambda(A^c)=0$
$\Rightarrow \lambda(E\setminus E\cap A)=0$)

▶ <u>Θεώρημα:</u> Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ τότε η $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$ είναι λ-σχεδόν παντού διαφορίσιμη και $F'(x)=f(x)$ λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

- <u>Απόδειξη:</u> $\cancel{\left|\frac{1}{h}\int\right.}$ $\cancel{\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))\right|}$ Παρατηρούμε ότι: $\forall a,h>0$:

$$\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x\text{[redacted]}}^{x\text{[redacted]}-a} f(y)\,dy + \frac{1}{h}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right|$$

$$= \left|\frac{h+a}{h}\cdot\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy + \frac{1}{h}\int_{x\text{[redacted]}}^{x-a} f(y)\,dy - f(x)\right| \le \cancel{\left|\frac{1}{h\text{[redacted]}+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy\right| + \left|\frac{a}{h}\int_{x-a}^{x} f(y)\,dy\right|}$$

$$\left(\frac{h+a}{h}=1+\frac{a}{h}\right) \quad \left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right| + \frac{a}{h}\frac{1}{h+a}\left|\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy\right| + \frac{1}{h}\left|\int_{x-a}^{x} f(y)\,dy\right|$$

(για να εφαρμόσουμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue θέλουμε το x να βρίσκεται στο εσωτερικό της μπάλας $(x-a,x+h)$). Τώρα όπως στο και από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue σχεδόν $\forall x\in\mathbb{R}$: $\exists \delta_x>0$: τ.ω αν $h,a>0$ και $h+a<\delta_x$ τότε: $\left|\frac{1}{h+a}\int_{x-a}^{x+h} f(y)\,dy - f(x)\right|<\varepsilon$. Τώρα αν πάρουμε: $0<h<\delta_x$ και $0<a<\delta_x-h$ τότε έχουμε ότι: $\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| \le \varepsilon + \frac{a}{h}\cdot\frac{1}{a+h}\|f\|_1 + \frac{1}{h}\int_{x-a}^{x}|f(y)|\,dy$

και παίρνοντας όριο $a\to 0$: $\left|\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))-f(x)\right| \le \varepsilon+0+0=\varepsilon$ και αυτό αποδεικνύει ότι το όριο: $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))=f(x)$ και όμοια: $\lim_{h\uparrow 0}\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x)) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα για κάθε τέτοιο x ισχύει ότι: $F'(x)=f(x)$. ⊛ 2ος τρόπος

▷ <u>Ορισμός:</u> Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ όπου: I: φραγμένο διάστημα και ή $I=\mathbb{R}$ ονομάζεται <u>απολύτως συνεχής</u> αν $\forall\varepsilon>0: \exists\delta>0$: τ.ω: αν $(a_1,b_1),\dots,(a_N,b_N)$ είναι πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανά 2 ανοιχτά διαστήματα με $\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)<\delta$, τότε: $\sum_{i=1}^{N}(f(b_i)-f(a_i))<\varepsilon$.

▷ <u>Ορισμός:</u> Μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>φραγμένης κύμανσης</u> αν: [redacted] $\infty > V([a,b]) = \sup\sum_{i=1}^{N}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ όπου το supremum είναι ως προς όλες τις διαμερίσεις $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_N=b\}$ του $[a,b]$. Η ποσότητα $V([a,b])$ λέγεται <u>κύμανση</u> της f στο $[a,b]$.

(*)

<u>2ος τρόπος:</u> $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_{x\,\text{[redacted]}}^{x+h}(f(y)-f(x))\,dy\right| \le \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy$

$$\le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy = \frac{2}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow{h\to 0} 0$$ για κάθε $x \in Leb(f)$

και άρα σχεδόν για κάθε x και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Παρατηρήσεις:</u> 1. Κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν είναι ορισμένη σε συμπαγή διάστημα είναι και φραγμένης κύμανσης.

2. Αν $F, G: I \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχείς και $c \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι: οι cF και cG είναι απολύτως συνεχείς όπως και η $F+G$. Επιπλέον [redacted] αν I είναι συμπαγές διάστημα τότε η FG είναι απολύτως συνεχής.