Συζυγείς Τελεστές: Μάθημα 7ο: Σκαρμόγιαννης:

- **Θεώρημα:** Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T: H \to H$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Τότε: $\forall y \in H: \exists! T^*(y) \in H$ τέτοιο ώστε: $\forall x \in H: \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. Το T^* ορίζει φραγμένο, γραμμικό τελεστή που ονομάζεται συζυγής γραμμικός τελεστής του T. Επιπλέον έχουμε ότι: $(T^*)^* = T$ και $\|T^*\| = \|T\|$.

- **Απόδειξη:** Έστω $y \in H$ και τότε ορίζουμε το φραγμένο και γραμμικό συναρτησοειδές: $f: H \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) =$ [redacted] $\langle T(x), y \rangle$, $\forall x \in H$ και αυτό παρατηρούμε ότι είναι πραγματι[redacted] γραμμικό και επίσης είναι και φραγμένο γιατί: $\forall x \in H: |f_y(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|T(x)\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\| = K\|x\|$ όπου $K = \|T\| \|y\| < \infty$ αφού ο T είναι φραγμένος. Επομένως τώρα από το θεώρημα Riesz έχουμε ότι: $\exists! z_y \in H: f_y(x) = \langle x, z_y \rangle = \langle T(x), y \rangle$, $\forall x \in H$ και τώρα αν ορίσουμε $T^*: H \to H$ με $T^*(y) = z_y$ τότε έχουμε ότι: $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ $\forall x, y \in H$ και ο T^* είναι καλά ορισμένος.

Τώρα παρατηρούμε ότι ο T^* είναι και γραμμικός γιατί αν πάρουμε $y_1, y_2 \in H$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ τότε έχουμε ότι θα αποδείξουμε ότι: $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$ και άρα αφού $\forall x \in H$: $\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle T(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \langle T(x), \lambda_1 y_1\rangle + \langle T(x), \lambda_2 y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle T(x), y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle T(x), y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x, T^*(y_1)\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, T^*(y_2)\rangle$ $= \langle x, \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)\rangle$ και άρα από μοναδικότητα: $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$ αφού η διαφορά είναι κάθετη σε όλο τον H

Τώρα παρατηρούμε ότι ο T^* είναι και φραγμένος: γιατί για $y \in H$: $\|T^*(y)\|^2 = \langle T^*(y), T^*(y)\rangle = \langle T(T^*(y)), y\rangle \overset{C\text{-}S}{\le} \|T(T^*(y))\|\|y\| \le \|T\|\|T^*(y)\|\|y\| \Rightarrow$ $\|T^*(y)\| \le \|T\|\|y\|$ και άρα ο T^* είναι φραγμένος με: $\|T^*\| \le \|T\|$. Τώρα για το ότι: $(T^*)^* = T$ παρατηρούμε ότι: $\forall x, y \in H$: $\langle T^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(x), y\rangle}$ $= \langle y, T(x)\rangle$ και άρα: $(T^*)^*(y) = T(y)$, $\forall y \in H$. Επομένως τώρα απ' αυτό έπεται ότι και: $\|(T^*)^*\| = \|T\| \le \|T^*\|$ και άρα από τις 2 ανισότητες: $\|T\| = \|T^*\|$.

– Μεγιστική Συνάρτηση Hardy-Littlewood και Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Αν η f είναι συνεχής στο $x \in (a,b$ [redacted] τότε η F είναι διαφορίσιμη στο x και $F'(x) = f(x)$ και άρα: $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \int_x^{x+h} f(y)\,dy = f(x)$ για $x \in (a,b)$ σημείο συνέχειας της f. Όμοια έχουμε ότι: $\lim_{h\to 0} \int_{x-h}^{x} f(y)\,dy = f(x)$ για $x \in (a,b)$ σημείο συνέχειας της f.

Τώρα έχουμε ότι: $\frac{1}{\lambda(I}$ [redacted] $\int_I f(y)\,dy \to f(x)$ όταν $\lambda(I) \to 0$ ⊛ όπου I είναι ανοιχτό διάστημα, $x \in I$, και λ είναι το μέτρο Lebesgue του I, ισχύει σχεδόν παντού για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

▸ Ερώτημα: Ισχύει η ⊛ [redacted] σχεδόν παντού για $f \in L^1(\mathbb{R})$; ή γενικότερα για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ή για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Η απάντηση είναι ναι (Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue)

- Απόδειξη της ⊛ για x σημείο συνέχειας της f: Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και x σημείο συνέχειας της f τότε δοθέντος $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$: $\forall y: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Τώρα αν I είναι ανοιχτό διάστημα με $x \in I$ και $\lambda(I) < \delta$ τότε: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall y \in I$ αφού: $|x-y| \le \lambda(I) < \delta$

και άρα: $\left| \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(y)\,dy - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(y)\,dy - \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f(x)\,dy \right| =$

$\left| \frac{1}{\lambda(I)} \left(\int_I (f(y) - f(x))\,dy \right) \right| = \frac{1}{\lambda(I)} \left| \int_I (f(y) - f(x))\,dy \right| \leq \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f(y) - f(x)|\,dy$

$\leq \frac{\varepsilon \lambda(I)}{\lambda(I)} = \varepsilon$. Ίδια απόδειξη γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$ με I ανοιχτές μπάλες περιοχών του x

- <u>Ορισμός:</u> Για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε: $f^*(x) = \sup\limits_{\substack{B:\text{ ανοιχτή μπάλα} \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y)|\,dy$ η <u>μη κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση της f</u> και $M(f)(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_B |f(y)|\,d\lambda_n(y)$ την <u>κεντραρισμένη μεγιστική συνάρτηση της f.</u>

- <u>Παρατήρηση:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η f^* είναι μετρήσιμη. Συγκεκριμένα για κάθε a [redacted] $\in \mathbb{R}$ το: $(f^*)^{-1}((a, +\infty))$ είναι ανοιχτό.

- Πράγματι έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $x \in \{ y \in \mathbb{R}^n : f^*(y) > a \} = (f^*)^{-1}((a, +\infty))$

$\Rightarrow$ $f^*(x) > a$ και τότε έχουμε ότι: υπάρχει ανοιχτή μπάλα B_x με $x \in B_x$ και $\frac{1}{\lambda_n(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,d\lambda(y) > a$ και άρα τότε για κάθε $z \in B_x$: $f^*(z) \geq \frac{1}{\lambda_n(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,d\lambda(y) > a$

$\Rightarrow$ και άρα: $x \in B_x \subseteq E_a = (f^*)^{-1}((a, +\infty))$ και άρα έχουμε ότι είναι ανοιχτό.

- <u>Παράδειγμα:</u> Έστω $n=1$ και έστω $f(x) = 1_{[a,b]}(x)$ ($a<b$ στο $\mathbb{R}$). Τότε:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{b-x}, & x \leq a \\ \frac{b-a}{x-a}, & x \geq b \\ 1, & a < x < b \end{cases} \quad \text{και} \quad Mf(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)}, & x \leq a \\ 1, & a < x < b \\ \frac{b-a}{2(x-a)}, & x \geq b \end{cases}$$

- $f^*(x) = \sup\limits_{\substack{I \ni x \\ I:\text{ αν. διάστημα}}} \frac{1}{\lambda(I)} \underbrace{\int_I 1_{[a,b]}(y)\,dy}_{\lambda(I \cap [a,b])} = \sup\limits_{\substack{I \ni x \\ I:\text{ αν. διάστημα}}} \frac{\lambda(I \cap [a,b])}{\lambda(I)}$ και τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις και βγάζουμε συμπεράσματα.

- <u>Ορισμός</u>: Ένας ~~γραμμικός~~ τελεστής από έναν υπόχωρο του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου (X,Λ,μ) στις μετρήσιμες συναρτήσεις ενός χώρου μέτρου (Y,B,ν) λέγεται <u>υπογραμμικός</u>: αν: $|T(cf)| = c\,|T(f)|, \ \forall c \geq 0$ και $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$, $\forall f,g$ στο πεδίο ορισμού του T.