Άλγεβρα ΙΙ   Μάθημα 24ο   ①

Λήμμα: V ημιαπλό R-πρότ. $K = End_R V$ και $E = End_K(V)$.

($\exists$ r $e: R \to End(V,+)$ κανονική αναπαράσταση $\Rightarrow K = (Im e)' \subseteq End(V,+)$ και $E = (Im p)'' \subseteq End(V,+)$.)

Τότε $U \subseteq V$ είναι ένα R-υποπρότυπο $\Leftrightarrow$ $U \subseteq V$ είναι ένα E-υποπρότυπο.

απόδειξη: ($\Leftarrow$) ✓

($\Rightarrow$) U R-υποπρ. και άρα υπάρχει $U' \subseteq V$ R-υποπρ.: $V = U \oplus U'$

Θεωρώ την R-γραμμική

$\varphi: V \to V$, $\varphi(u+u') = u$, $\forall u \in U$, $\forall u' \in U'$

$\Rightarrow \varphi(u) = u$, $\forall u \in U$ και $Im\varphi \subseteq U$

Έστω $t \in E$. Αφού $\varphi \in k\text{-}End_R V$

Παρατηρώ ότι $t \circ \varphi = \varphi \circ t : V \to V$

Ωστόσο $t(u) = t \circ p(u) = (p \circ t)(u) \in U$ □.

Πρόταση: (Θεώρημα πυκνότητας)

Έστω R ένας δακτύλιος, V ένα ημιαπλό R-πρ. και $k = End_R(V)$.
Τότε, ο ομομορφισμός $R \xrightarrow{e_0} End_k(V)$ έχει πυκνή εικόνα.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "e_0"] \arrow[dr, "e"'] & End_k(V) = (\mathrm{im}\, e)'' \arrow[d] \\
& End(V,+)
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη: Έστω $f \in End_k(V)$ και $v_1, \dots, v_n \in V$. Πρέπει νδο.

$\mathrm{im}\, e \cap \{ g \in End(V,+) \mid g(v_i) = f(v_i) \} \neq \emptyset$.

Θεωρώ το R-πρότυπο:

(3)

$$V^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in V,\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

και παρατηρώ ότι V^n είναι ημιαπλό R-πρότυπο.

Είναι

$$\mathrm{End}_R(V^n) = \mathrm{End}_R(V \oplus \cdots \oplus V)$$

$$= M_n[\mathrm{End}_R(V)] = M_n(k).$$

Θεωρώ την απεικόνιση $\varphi : V^n \to V^n$

με $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$

Ισχυριζόμαστε ότι $\varphi \in \mathrm{End}_{M_n(k)} V^n$.

Πράγματι, αν $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ και

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V^n$ υπολογίζω.

$$\varphi\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \varphi \begin{pmatrix} \sum a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\sum a_{ij} x_j) \\ \vdots \\ f(\sum a_{nj} x_j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum (\varphi \circ a_{1j})(x_j) \\ \vdots \\ \sum (\varphi \circ a_{nj})(x_j) \end{pmatrix} \overset{(!)}{=} \begin{pmatrix} \sum a_{1j} \circ f(x_j) \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \circ f(x_j) \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα (Bourbaki) για το ημιαπλό R-πρ. V^n γνωρίζω ότι κάθε R-υποπρ. είναι οπωσδήποτε $\mathrm{End}_{M_n(k)} V^n$-αναλλοίωτο. (και άρα φ-αναλλοίωτο).

Θεωρώ $U = R \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \subseteq V^n$ και έχω $\varphi(U) \subseteq U$. Ειδικότερα είναι

$$\begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in U = R \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \exists r \in R : \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r v_1 \\ \vdots \\ r v_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r v_i = f(v_i)$, για κάθε $i = 1, \dots, n$.

<u>Θεώρημα</u> (δομής των αριστερά primitive δακτυλίων).

Έστω R ένας αρ. primitive. V ένα απλό και πιστό R πρότ. (δ.δ.). Τότε και $K = End_R(V)$.

(α) ο R είναι πυκνός υποδακτύλιος του $End_K(V)$.

(β) αν R είναι αριστερά του Artin $\Rightarrow \dim_K(V) = n < \infty$ και $R = End_K(V) = M_n(K^{opp})$.

(γ) αν ο R <u>δεν</u> είναι αριστερά του Artin $\Rightarrow \dim_K(V) = \infty$ και

και για κάθε n υπάρχει υποδακτύλιος $R_n \subseteq R$ ο οποίος επιδέχεται επιμορφισμό $R_n \to M_n(R^{op})$

• Δείξαμε προηγουμένως ότι ο μονομορφισμός $R \xrightarrow{e} End_k(V)$ $= (R)'' \subseteq End(V,+)$ έχει πυκνή εικόνα.

<u>απόδειξη</u>: • αν $\dim_k(V) = n < \infty$ $\Rightarrow$ k-πρότυπο V είναι π.π. άρα η τοπολογία στην $End_k(V)$ είναι διακριτή. Άρα,

$R = End_k(V) = End_k(k \oplus \dots \oplus k)$
$= M_n(End_k(k)) \cong M_n(k^{op})$ (αντίθετος)

<u>Ισχ.</u>: η απεικόνιση $\sigma : S^{op} \to End_S(S)$ είναι ισομορφισμός με $\sigma(s)(x) = x \cdot s$ δακτυλίων.

• Αν $\dim_k(V)=\infty$, επιλέγω (P) γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$, και θέτω $V_n = \sum_{i=1}^{n} k v_i \subset V$.

Θεωρώ $R_n = \{ r \in R \mid r V_n \subseteq V_n \} \subseteq R$ (υποδακτύλιος) και

$I_n = \{ r \in R \mid r V_n = 0 \} \subseteq R_n$ (αριστερό ιδεώδες του R)

Παρατηρώ ότι $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots$

και άρα $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$

<u>Ισχυρισμός</u>: $I_{n+1} \subsetneq I_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(Συνεπώς θα έχω δείξει ότι ο δακτύλιος <u>δεν</u> είναι αριστερά του Artin).

<u>Απόδειξη</u>: (ισχυρισμού).

(8) $\exists$ υπάρχει k-γραμμική απεικόνιση

με $\varphi(v_1) = \dots = \varphi(v_n) = 0$ και

$\varphi(v_{n+1}) = v_{n+1}$ $\left(\varphi : V \to V\right)$.

λόγω της πυκνότητας, υπάρχει

$r \in R$ τ.ω. $r v_i = 0$, $i = 1 \dots n$ και

$r v_{n+1} = v_{n+1}$. $\Rightarrow r \in I_n$, $r \notin I_{n+1}$.

Παρατηρώ ότι η απεικόνιση

$R_n \longrightarrow \mathrm{End}_k(V_n)$ $\left(r \longmapsto r|_{V_n}\right)$.

$= \mathrm{End}_k(V^n) = M_n(k^{op})$ είναι επί

Πράγματι, αν $u : V_n \to V_n$ μια

k-γραμμική, τότε υπάρχει k-γραμ.

$u' : V \to V$ με $u'(v) = u(v) \in V_n$

$\forall v \in V_n$.

λόγω πυκνότητος υπάρχει $r \in R$

τ.ω. $r v_i = u'(v_i) = u(v_i)$, $\forall i = 1 \dots n$

⑨ $\Rightarrow rv_i \in V_{n_i}\ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow rV_n$

Συνεπώς, $r \in R_n$ και $\subseteq V_n$

$r|V_n : V_n \to V_n = n$. □

Παραδείγματα:

(α) $F = \mathbb{Q}$, $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q} e_i$. Ορίζω

$R \leq \mathrm{End}_F(V)$ ως εξής

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} M & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ M \in M_n(\mathbb{Q}) \\ a \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$= \{ f : V \to V \mid f$ $\mathbb{Q}$-γραμμική

και υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$, ώστε $f(e_i) = ae_i$

για $i \gg 0 \}$.

Ο R είναι πυκνός στον $\mathrm{End}_F(V)$

και άρα το R-πρ. V είναι απλό.

Άρα, ο R είναι αριστερά primitive.

Επίσης, είναι $Z(R) = \mathbb{Z} \cdot I_V$.

<u>Ασκ.</u> Αν ο R είναι αρ. primitive $\Rightarrow$ $Z(R)$ ακέραια περιοχή.

(γ). F σώμα, $V = \bigoplus_{i=0}^{\infty} F e_i$, $f: V \to V$

$f(e_i) = e_{i+1}$, $\forall i$ (F-γραμμική)

$g: V \to V$, $g(e_i) = \begin{cases} e_{i-1}, & i \geq 1 \\ 0, & i = 0 \end{cases}$

(F-γραμμ.)

$R = \left\{ \begin{array}{l} \text{υποδ. του } End_F(V) \text{ που παρά-} \\ \text{γεται από } f, g \end{array} \right\}$

$= F\langle f, g \rangle \subseteq End_F(V)$.

<u>Ασκ.</u>: Ο R είναι πυκνός υποδακτύλιος του $End_F(V)$, το V είναι απλό R-πρ. και ο R είναι αρ. primitive.