Άλγεβρα ΙΙ.

$$G = A_4 = \langle \underbrace{(12)(34)}_{a}, (123) \rangle$$

$$= \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^3 \rangle$$

$$G_{ab} = \langle b \mid b^3 \rangle = \mathbb{Z}_3 \quad (V = DA_4)$$

→ ομάδα του Klein

3 μονοδιάστατες αναπαραστάσεις.

χ_1, χ_2, χ_3.

	e	$(12)(34)$	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	w	w^2
χ_3	1	1	w^2	w
χ_μ	3	-1	0	0

$$\mathbb{C}A_4 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_3(\mathbb{C}).$$

Άρα υπάρχει μια 3-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση.

$$V: \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$$

με την φυσιολογική δράση της S_4.

(Π.χ: $(123)e_1 = e_2$, $(123)\cdot e_4 = e_4$.)

Θεωρώ το $\mathbb{C}(S_4)$-υποπρότυπο

$\mathcal{U} = \mathbb{C}(e_1 + \dots + e_4)$ και θέτω $\mathcal{M} = \frac{V}{\mathcal{U}}$.

Θεωρώ το $\mathcal{M}$ ως $\mathbb{C}A_4$-πρότ.

$(\mathbb{C}A_4 \subseteq \mathbb{C}S_4)$. Είναι $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{C}\bar{e_i}$

$= \mathbb{C}\bar{e_1} \oplus \mathbb{C}\bar{e_2} \oplus \mathbb{C}\bar{e_3}$ $(\bar{e_4} = -\bar{e_1} - \bar{e_2} - \bar{e_3})$

Τα στοιχεία $(12)(34)$, (123), (132) δρουν

ως πίνακες.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Ισχυρισμός</u>. Το $\mathbb{C}A_4$ πρότ.-$\mathcal{M}$ είναι

απλό.

<u>Παράδειγμα</u>: $S_4 = \langle (12), (1234) \rangle$.

$S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ αβελ.

$\underbrace{S_4 \trianglerighteq A_4}_{2} \underbrace{\trianglerighteq V}_{3} \underbrace{\trianglerighteq 1}_{1}$,

$\Rightarrow DS_4 \subseteq A_4$.

(3)

$DA_4 = V \subseteq DS_4 \subseteq A_4$. —ν.

$DS_4 = A_4$ ή $DS_4 = V$: όμως

$DS_4 \neq V$ αφού S_4/V δεν είναι

αβελιανή.

Συνεπώς $(S_4)_{ab} = S_4/A_4 = \mathbb{Z}_2$. Άρα υπάρχουν 2 1-διάστατες αναπαραστάσεις.

	(1) e	(6) (12)	(8) (123)	(6) (1234)	(3) $(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1 (τετρ)
χ_2	1	-1	1	-1	1 (προσ.)
χ_N	2	0	-1	-1	2
χ	3	1	0	-1	-1
$\chi_2 \otimes \chi$	3	-1	0	1	-1

ή μια 3-διάστατη ~~αναπαράσταση~~ ανάγωγη αναπαράσταση.

(α) όπως πριν. $M = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_3$.

πηλίκο του κανονικού $\mathbb{C}S_4$-προτύπου.

$\sum_{i=1}^{4} \mathbb{C} e_i$ modulo $\mathbb{C}(e_1 + \cdots + e_4)$).

Για την 2-αναπαράσταση υπάρχει ισομορφισμός $S_4/N \cong S_3$ και άρα η διδιάστατη ανάγωγη αναπαράσταση N της S_3 ορίζει μια 2-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση της S_4.

$$S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/N \cong S_3 \xrightarrow{\rho_N} GL_2(\mathbb{C}).$$

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= \mathbb{C}\bar{e}_1 + \mathbb{C}\bar{e}_2 + \mathbb{C}\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 &= -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \end{aligned}}$$

- $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G \xrightarrow{mult} \mathbb{C}G$

$\xi \otimes w \mapsto \xi w.$

$g \otimes g' \mapsto gg'$

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{\Delta} \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G \xrightarrow{e_M \otimes e_N} M \otimes_{\mathbb{C}} N$$

$g \mapsto g \otimes g.$

<u>Παρατήρηση.</u> Έστω D διαιρετικός δακτύλιος τ.ω. $\mathbb{C} \subseteq Z(D) = \{d \in D \mid d'd = dd', \forall d' \in D\}$ και $\dim_{\mathbb{C}} D < \infty$. Τότε $D = \mathbb{C}$.

<u>Απόδειξη</u>: αν $d \in D \Rightarrow 1, d, d^2, \ldots, d^n, \ldots$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικά εξαρτημένα, δηλ. υπάρχει $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ με $f(z) \neq 0$ ώστε $f(d) = 0 \in D$. Θεωρώ ένα <u>μονικό</u> τέτοιο $f(z)$ ελάχιστου βαθμού.

<u>Ισχ.</u> $\deg f(z) = 1$. [άρα $f(z) = z + e$, $e \in \mathbb{C} \Rightarrow d + e = 0 \Rightarrow d = -e \in \mathbb{C}$.]

Αν $\deg f(z) > 1$ μπορώ να βρω $g(z), h(z) \in \mathbb{C}[z]$ μονικά με $\deg g(z), \deg h(z) \geq 1$ με $f(z) = g(z)h(z)$

$\Rightarrow f(d) \overset{!!}{=} g(d)h(d) = 0 \xrightarrow{D.S.} g(d) = 0$ ή $h(d) = 0$. <u>άτοπο</u>

(!!): $\mathbb{C}[z] \xrightarrow{\varphi} D$, $f(z) \longmapsto f(d)$.

φ είναι πολλαπλασιαστική $\Leftarrow da = ad, \forall a \in \mathbb{C}$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $|G| < \infty$, τότε στην διάσπαση Wedderburn-Artin $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ είναι $D_i = \mathbb{C}, \forall i$.

<u>απόδειξω</u>: $\mathbb{C} \subseteq Z(\mathbb{C}G) =$

$$Z\left[\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)\right] = \prod_{i=1}^{r}\left[Z(M_{n_i}(D_i))\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{r} Z(D_i) I_{n_i} \xrightarrow{\text{προβολή}} Z(D_i) \cdot I_{n_i} \cong Z(D_i).$$

$\to D_i = \mathbb{C}, \ \forall i = 1, \ldots, r.$

<u>Πόρισμα</u>: Με τον προηγούμενο.

συμβ. $|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$.

<u>απόδειξω</u>: $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$.

$$\xrightarrow{\dim_{\mathbb{C}}} |G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$$

$\square$.