Άλγεβρα ΙΙ

• $|G| < \infty \Rightarrow \mathbb{C}G$ ημιαπλός.

__Παρατήρηση:__ Αν V είναι $\mathbb{C}G$-πρ. $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ και $V' \subseteq V$ $\mathbb{C}G$-υποπρ.

$\Rightarrow \chi_V = \chi_{V'} + \chi_{V/V'} : G \to \mathbb{C}$.

__απόδειξη:__ για κάθε $g \in G$

$\chi_V(g) = \chi_{V'}(g) + \chi_{V/V'}(g)$, δηλ. ότι

$$tr\left[V \xrightarrow{g} V\right] = tr\left[V' \xrightarrow{g} V'\right] + tr\left[\frac{V}{V'} \xrightarrow{g} \frac{V}{V'}\right]$$

Θεωρώ μια βάση $v_1, \dots, v_k$ του V' και την επεκτείνω σε μια βάση $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ του V. Ο πίνακας της $V \xrightarrow{g} V$ ως προς την βάση αυτή έχει την μορφή

$g.v_1 \in V'$
$g.v_2 \in V'$
$\vdots$
$g.v_k \in V'$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & \Gamma \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{C}) = (\theta_{ij})$$

② Συνεπώς, $tr[V \xrightarrow{g} V]$

$= tr(A) + tr(\Gamma) \quad \left(\begin{array}{l} A \in M_k(\mathbb{C}) \\ \Gamma \in M_{n-k}(\mathbb{C}) \end{array} \right)$

Προφανώς, ο $A \in M_k(\mathbb{C})$ είναι ο πίνακας ~~...~~ της $V' \xrightarrow{g} V'$ περιορισμένος στον $v_1 \dots v_k$ $V' \Rightarrow$

$$tr(A) = tr[V' \xrightarrow{g} V'].$$

$$g \cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} v_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} v_i}_{\in V'} + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{ij} v_i$$

Άρα (στο CG-πρ. V/V'): $g \cdot \bar{v}_j = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{ij} \bar{v}_i$

για $j = 1, \dots, n$. Καθώς $\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n$ αποτελούν μια βάση του V/V' $\Rightarrow$ ο πίνακας της $g : V/V' \to V/V'$ είναι ο Γ. Άρα $tr[V/V' \xrightarrow{g} V/V']$ $= tr(\Gamma)$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $V = V_1 \oplus V_2$ ως CG-πρ. και $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, τότε

$\chi_V = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$ (3)

<u>Πόρισμα</u>: Αν $V = V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}$

και $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty \Rightarrow \chi_V = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_{V_i}$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω U, V δύο

$\mathbb{C}G$-πρ. και $e_U : G \to GL_{\mathbb{C}}(U)$

$e_V : G \to GL(V)$ οι αντ. ομομορφ.

Τότε, τα $\mathbb{C}G$-πρ. U, V είναι ισόμορφα $\Leftrightarrow$ υπάρχει ισομ. $\mathbb{C}$-δx τω. $f : U \to V$

$e_U(g) = f^{-1} \circ g_V(g) \circ f : U \to U \quad \forall g \in G$.

<u>απόδειξη</u>: αν $f : U \to V$ είναι ένας ισομορφ. $\mathbb{C}G$ προτ. $\Rightarrow$ f ισομ. $\mathbb{C}$-δx. τ.ω. $f(g.u) = g.f(u)$

$\forall g \in G, u \in U$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ g \downarrow & G & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $U = \mathbb{C}$ και $V = \mathbb{C}$ δύο μονοδιάστατες αναπαρ. της G με αντιστ. ομομορφ.
$\rho_U : G \to \mathbb{C}^* = GL_{\mathbb{C}}(U)$ τότε
$\rho_V : G \to \mathbb{C}^* = GL_{\mathbb{C}}(V)$
τα $\mathbb{C}G$-πρ. U, V είναι ισόμορφα $\Leftrightarrow$
$\rho_U(g) = \rho_V(g), \ \forall g \in G \Leftrightarrow \rho_U = \rho_V$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $U_1 = \mathbb{C}$ μια μονο 1-διάστατη $\mathbb{C}$-αναπαρ. της G με αντ. ομομ. $\rho_U : G \to \mathbb{C}^* \Rightarrow$ ο χαρακτήρας $\chi_U : G \to \mathbb{C}$ είναι η σύνθεση $G \xrightarrow{\rho_U} \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$.

<u>Συμπέρασμα</u>: $\left\{ \begin{array}{l} \text{κλάσεις ισομορφίας} \\ \text{των 1-διάστατων} \\ \text{αναπ. της } G \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \rho : G \to \mathbb{C}^* \;\middle|\; \text{ομομ. ομάδων} \right\}$.

1

<u>Υπενθύμιση</u>: G ομάδα

$D(G) = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$ ⑤

$\trianglelefteq G$

Παράγωγος υποομ.

$\Rightarrow \underbrace{G/D(G)}_{G_{ab}}$ αβελιανή

Παρατήρηση: Η απεικόνιση

$\pi : G \longrightarrow \dfrac{G}{D(G)} = G_{ab}$ ~~...~~ επαγω

για καθε ομαδα Η ομάδα. Μια

1-1 απεικ.

$\{ f : G_{ab} \to H \mid f \text{ ομομ.} \} \xrightarrow{\pi^*} \{ \varphi : G \to H \mid \varphi \text{ ομομ.} \}$

$f \mapsto f \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi = f\circ\pi"'] & G_{ab} \arrow[d, "f"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Καθώς π είναι επί $f \circ \pi = f' \circ \pi \Rightarrow f = f'$

Αν Η είναι αβελιανή, η π^*

είναι επί ...

Από ①, $\alpha \longleftrightarrow \{ e : G_{ab} \to \mathbb{C}^* \mid e \text{ ομομ.} \}$

$\xleftarrow{|G| < \infty} \{ e : G_{ab} \to S^1 \mid e \text{ ομ.} \} = \widehat{G_{ab}}$.

Ορσ.: Αν A αβελιανή ομάδα, τότε η δυϊκή ομάδα $\hat{A}$ ορίζεται ως

$$\hat{A} = \{ g : A \to S^1 \mid g \text{ ομομορφ.} \}.$$

Παραδείγματα:

(α) $A = \mathbb{Z}_n$, τότε ένας ομομορφ. $\varphi : \mathbb{Z}_n \to S^1$ καθορίζεται πλήρως από ένα $k \in \mathbb{Z}_n$, έτσι ώστε $\varphi[1] = e^{2\pi i k/n} \in S^1$. Άρα, $\hat{\mathbb{Z}}_n \cong \mathbb{Z}_n$

(β) Αν A, B αβελιανές, τότε η απεικόνιση $\widehat{A \oplus B} \to \hat{A} \oplus \hat{B}$

$$(\varphi : A \oplus B \to S^1) \mapsto (\varphi|_A, \varphi|_B)$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

(γ) Αν A πεπερ. ~~παραγ.~~ αβελιανή ομάδα $\Rightarrow$ $\hat{A}$ είναι πεπερ. και μάλιστα $\hat{A} \cong A$ (Ειδικότερα $|\hat{A}| = |A|$)

↳ όχι φυσικός

7

<u>Παρατήρηση</u>: (Γρ. άλγεβρα)

Αν V δ.χ. με πεπερ. με $\dim V < \infty$
και $V' \subseteq V$ δ υπόχ. $\Rightarrow \dim V = \dim V' + \dim V/V$

(αβελ.) Αν A είναι αβελ.
με $|A| < \infty$. και $A' \subseteq A$ είναι
υποομ. $\Rightarrow \ln |A| = \ln |A'| + \ln |A/A'|$