Άλγεβρα ΙΙ Μάθημα 14

<u>Παρατήρηση</u>: Για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}G$ ισχύει

$\tau(\alpha^*\alpha) \in \mathbb{R}$ και $\tau(\alpha^*\alpha) \geq |\tau(\alpha)|^2$.

<u>αποδ</u>: $\alpha = \sum_g \lambda_g \cdot g \Rightarrow \alpha^* = \sum_g \bar{\lambda}_g g^{-1}$

$\Rightarrow \tau(\alpha^*\alpha) = \sum_g |\lambda_g|^2 \geq |\lambda_e|^2 = |\tau(\alpha)|^2$ □

<u>Πόρισμα</u>: αν $\alpha = \alpha^* \in \mathbb{C}G \Rightarrow \forall n \geq 1$:

$\tau(\alpha^{2^n}) \in \mathbb{R}$ και $\tau(\alpha^{2^n}) \geq |\tau(\alpha)|^{2^n}$.

<u>απόδειξη</u>: επαγωγή στο n.

<u>$n=1$</u>, από παρατήρηση.

<u>επαγωγικό βήμα</u>: $\tau(\alpha^{2^n}) \in \mathbb{R}$ και

έχω ότι α^{2^n} αυτοσυζυγές, ε.υ.

$\tau(\alpha^{2^n} \cdot \alpha^{2^n}) \geq |\tau(\alpha^{2^n})|^2 \geq |\tau(\alpha)|^{2^{n+1}}$ □

<u>Πόρισμα</u>: Αν $rad(\mathbb{C}G) \neq 0 \Rightarrow$

υπάρχει $\alpha \in rad(\mathbb{C}G)$: $\tau(\alpha^{2^n}) \in \mathbb{R}$

και $\tau(\alpha^{2^n}) \geq 1$, $\forall n \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω $t \in rad(\mathbb{C}G)$, $t \neq 0$ ②

$\Rightarrow \tau(t^* t) \neq 0$. Θεωρώ $\alpha = \frac{1}{\tau(t^* t)} t^* t$

και $t(\alpha) = 1$, α αυτοσυζυγές. $\in rad(\mathbb{C}G)$

Από πόρισμα έχουμε το ζητούμενο

□

Στόχος: αν $a \in rad(\mathbb{C}G)$: $\lim_n \tau(a^n) = 0$

$(\Rightarrow rad(\mathbb{C}G) = 0)$.

Θεωρώ απεικόνιση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}G$

$z \mapsto (1 - z\alpha)^{-1}$

Ιδέα: $\varphi(z) = 1 + z\alpha + z^2\alpha^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \alpha^n$.

Ορσ: αν $\alpha \in \mathbb{C}G$: $\alpha = \sum_g \lambda_g \cdot g$ θέτω.

$\|\alpha\|_1 = \sum_g |\lambda_g|$ (συμβ $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$)

Ιδιότητες. ⊛ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}G$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(α) $\|\alpha\| \geq 0$ και $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

(β) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$, (γ) $\|\alpha\beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

απόδ (γ) $\alpha = \sum_g \lambda_g . g$, $\beta = \sum_g \mu_g . g$

$\Rightarrow \alpha\beta = \sum_g \left(\sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y \right) . g$ $\Rightarrow$

$\|\alpha\beta\| = \sum_g \left| \sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y \right| \leq \sum_g \sum_{xy=g} |\lambda_x \mu_y|$

$= \|\alpha\| . \|\beta\|$.

(δ) $|\tau(\alpha)| \leq \|\alpha\|$

Ορίζω $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}G$: $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$

$\Rightarrow (\mathbb{C}G, d)$ μετρικός χώρος.

Παρατηρήσεις. (α) η $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}G$
$z \mapsto (1 - z\alpha)^{-1}$
είναι συνεχής

- $\forall z_0, z \in \mathbb{C}$:

$\varphi(z) - \varphi(z_0) = (z - z_0)\alpha\, \varphi(z)\varphi(z_0)$

(Είναι $(1 - z\alpha)(1 - z_0\alpha) = (1 - z_0\alpha)(1 - z\alpha)$

$\Rightarrow \varphi(z)\varphi(z_0) = \varphi(z_0)\varphi(z)$)

$\Rightarrow \varphi(z) = \varphi(z_0) + (z - z_0)\alpha\, \varphi(z)\varphi(z_0)$

$\Rightarrow \varphi(z)\left[1-(z-z_0)\alpha\varphi(z_0)\right] = \varphi(z_0)$

$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\left[1-(z-z_0)\alpha\varphi(z_0)\right] = 1 \in \mathbb{C}G$

$\Rightarrow \|1-(z-z_0)\alpha\varphi(z_0)\| > \frac{1}{2}$ για

z κοντά στο z_0.

Συνεπώς, για z κοντά στο z_0:

$$\|\varphi(z)\| \leq 2\|\varphi(z_0)\| \quad (*)$$

Από $(*)$:

$\|\varphi(z)-\varphi(z_0)\| = \|(z-z_0)\alpha\varphi(z)\varphi(z_0)\|$

$\leq 2|z-z_0|\cdot\|\alpha\|\,\|\varphi(z_0)\|^2$, για z κοντά

στο z_0 $\Rightarrow \varphi$ είναι συνεχής.

Γνωρίζοντας ότι φ είναι συνεχής θ.δ.ο

φ είναι παράγω.

$(*) \Rightarrow \frac{1}{z-z_0}\left[\varphi(z)-\varphi(z_0)\right] = \alpha\varphi(z)\varphi(z_0)$

$\xrightarrow{z\to z_0} \alpha\varphi^2(z_0)$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> (α) $\tau: \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ (5)

είναι συνεχής. Μιας και $\|\tau(a)\| \leq \|a\|$

$\forall\, a \in \mathbb{C}(G)$

(β) η σύνθεση $\tau \circ \varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι

ολόμορφη και $(\tau\circ\varphi)'(z) = \tau\left[a\,\varphi^2(z)\right]$

Μπορώ να υπολογίσω:

$$(\tau\circ\varphi)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\tau\circ\varphi(z) - \tau\circ\varphi(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \tau\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right) \overset{\tau \text{ συνεχής}}{=}$$

$$= \tau\left(a\,\varphi^2(z_0)\right)$$

(γ) αν $\|za\| < 1$ ισχύει ότι:

$$(\tau\circ\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(a^n)\, z^n \in \mathbb{C}.$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n$

για $\|za\| < 1$ (από συνέχεια και γραμμικότητα της τ). Υπολογίζω:

$$\left\| \varphi(z) - \sum_{n=0}^{N} z^n \alpha^n \right\| = \left\| \varphi(z) - (1 - z^{N+1}\alpha^{N+1}) \cdot \varphi(z) \right\|$$

$$= \left\| \varphi(z)\left[1 - (1 - z^{N+1}\alpha^{N+1})\right] \right\|$$

$$= \left\| \varphi(z) z^{N+1} \alpha^{N+1} \right\| \leq \| \varphi(z) \| \, \| z\alpha \|^{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

$\Rightarrow$ $\tau \circ \varphi$ είναι ολόμορφη. και για

$|z| < \frac{1}{\|\alpha\|}$ και $(\tau\circ\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(\alpha^n) z^n$

$\overset{\dots}{\Longrightarrow}$ $(\tau\circ\varphi)(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(\alpha^n) \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \tau(\alpha^n) = 0 \Rightarrow \operatorname{rad}(\mathbb{C}G) = 0$

$\square$.