① Άλγεβρα ΙΙ Μάθημα 10.
22/03/2023

Ριζικό του Jacobson

Παρατήρηση: Αν $I \subsetneq R$ (αρ. ή δεξιό ή αμφ.) ιδεώδες του R, τότε υπάρχει μεγιστικό (αρ. ή δεξιό ή αμφ. αντίστοιχα) ιδεώδες $m \subseteq R$ με $I \subseteq m$.

απόδ. (Λήμμα Zorn) Έστω
$\mathcal{X} = \{ J \mid J \subsetneq R$ αρ. ιδεώδες, $I \subseteq J \}$.
$\Rightarrow \mathcal{X} \neq \emptyset$, καθώς $I \in \mathcal{X}$.

Πρόταση: Τ.α.ε.ι. για το $r \in R$.
(α) $r \in m$, για κάθε $m \subseteq R$ μεγιστικό ιδεώδες.
(β) $1 - xr \in$ είναι αρισ. αντιστρέψιμο, $\forall x \in R$
(γ) $rM = 0$, $\forall$ απλό R-πρότ. M.
(δ) $rM = 0$, $\forall$ ημιαπλό " "

απόδ (α) → (β) Έστω $x \in R$ τω. $1 - xr$ δεν είναι αρ. αντιστρ. $\Rightarrow$ $R(1-xr) \subsetneq R$ και άρα υπάρχει μεγιστικό αρ. ιδ. $m \subseteq R$: $R(1-xr) \subseteq m$ ②

$$\left.\begin{array}{l} r\in m \\ 1-xr \in m \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in m \Rightarrow R = m \quad \#$$

(γ) → (δ) Εστω ότι υπάρχει απλό R-πρότ. M τ.ω. $rM \neq 0 \Rightarrow \exists a \in M$:

$$ra \neq 0 \xRightarrow{M \text{ απλό}} M = R(ra) \Rightarrow \exists x \in R : a = xra$$

$$\Rightarrow \underset{}{\overset{1-xr \text{ αρ. αντ.}}{(1-xr)}} \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \#$$

(δ) ⟷ (δ) ✓ (δ) → (α)

Εστω $m \subseteq R$ αρ. μεγιστικό ιδ. ⟹ R/m αρ. απλό R-πρότ. ⟹ $r(R/m) = 0$

⟹ $r \in m$.

<u>Ορσ</u>: $rad(R) = \bigcap \{ m \mid m \subseteq R$ μεγιστικό αρ. ιδ. $\}$

<u>Πόρισμα</u> $rad(R) \subseteq R$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες.

<u>απόδ</u>:

$$rad(R) = \bigcap_{\substack{M\text{-απλό} \\ R\text{-πρότ.}}} ann_R(M) = \bigcap_{\substack{M\text{-ημιαπλό} \\ R\text{-πρότ.}}} ann_R(M)$$

□

~~Πρότ~~ <u>Πόρισμα</u>: Τα ε.ι. για ένα $r \in R$: (3)

(α) $r \in rad(R)$

(β) $1 - xry$ είναι αντιστρ. $\forall x, y \in R$.

<u>απόδ</u>: (β) → (α) ✓ (α) → (β)

Έστω $r \in rad(A) \Rightarrow 1 - x\underbrace{(ry)}_{\in rad(R)}$ αρ. αντ.

$\Rightarrow \exists u \in R : u(1 - xry) = 1$ ⊛

$\Rightarrow u = 1 + uxry = 1 - (-ux)\underbrace{ry}_{\in rad(R)}$ αρ. αντ.

$\overset{⊛}{\Rightarrow}$ $1 - xry$ δεξιά αντιστρ.

$\square$

<u>Πόρισμα</u>:

$rad(R) = \bigcap \{ w \mid w \leq R$ δεξιό μεγιστικό ιδεώδ$\}$.

$= \bigcap \{ ann_R N \mid N$ απλό δεξιό R-πρότ.$\}$.

<u>Ορσ</u> Ο R καλείται <u>Jacobson ημιαπλός</u> αν $rad(R) = 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $I \leq R$ ιδεώδ.

$I \subseteq rad(R) \Rightarrow rad(R/I) = \dfrac{rad(R)}{I}$

<u>Απόδ</u>: κάθε μεγιστικό αρ. ιδεώδ. $\overline{m} \subseteq R/I$ είναι της μορφής m/I για κάποιο μεγιστικό αρ. ιδ. $I \subseteq m$.

Αντίστροφα, αν $m \subseteq R$ αρ. μεγιστ. ιδ. $\to I \subseteq rad(R) \subseteq m \to m/I$ μεγιστικό αρ. ιδεώδες του R/I.

$$\to rad(R/I) = \bigcap \{ m/I \mid m \subseteq R \text{ μεγιστικό αρ. ιδεώδ} \}$$

$$= \frac{\bigcap \{ m \mid m \subseteq R \text{ αρ. ιδεώδ. μεγιστικό} \}}{I}$$

$$= rad(R)/I$$

<u>Πόρισμα</u>: Το $rad(R/rad(R)) = 0$, δηλ. $R/rad(R)$ είναι Jacobson ημιαπλός.

<u>Παρατηρήσεις</u>: (α) Οι δακτύλιοι R και $R/rad(R)$ έχουν ακριβώς τα ίδια απλά πρότυπα.

Πράγματι κάθε $R/rad(R)$-προτ. M είναι ένα R-προτ. μέσω του ομομορφ. $R \to \frac{R}{rad(R)}$

Αντίστροφα, αν N ένα απλό R-πρότυπο.

$R \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(N,+)$ μηδενίζεται στο

$\mathrm{rad}(R)$ και άρα επάγεται ομομορφ.

$\bar{\ell}$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{End}_R(M) \\ R/\mathrm{rad}(R) \arrow[ur, dashed, "\bar{\ell}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ N προφανώς είναι $R/\mathrm{rad}(R)$ πρότυπο το οποίο είναι προφανώς απλό.

(γ) $\mathcal{U}\left(R/\mathrm{rad}(R)\right) = p\left(\mathcal{U}(R)\right)$ ↳ προβολή.

<u>αποδ</u>: "$\supseteq$"

"$\subseteq$" Έστω $r \in R$: $\exists s \in S$: $1 - rs \in \mathrm{rad}(R)$ και $1 - sr \in \mathrm{rad}(R)$.

$\Rightarrow 1-(1-rs) = rs \in \mathcal{U}(R)$, $1-(1-sr) = sr \in \mathcal{U}(R)$

δεξιά αντ.   αριστ. αντ.

$\Rightarrow$ r <u>δεξιά αντιστρ.</u> , r <u>αριστ. αντιστρ.</u>

$\Rightarrow r \in \mathcal{U}(R)$

<u>Στόχος</u>: σχέση $\mathrm{rad}(R)$ με "μηδενοδύναμα".

<u>Ορσ.</u>: $r \in R$ καλείται <u>μηδενοδύναμο</u> αν $r^n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

- Το (αρ., δεξιό, αμφ.) ιδεώδες $\mathcal{I}$ καλείται *nil* αν $\forall x \in \mathcal{I}$, το x είναι μηδ/μο.
- Το (αρ. ή δεξιό ή αμφ.) ιδεώδες $\mathcal{I} \subseteq R$ καλείται *μηδενοδύναμο* αν $\mathcal{I}^n = 0$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{I}$ μηδενοδύναμο $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ nil.