(1) Άλγεβρα ΙΙ: Μάθημα 09 20/03/2023.

Το $V_1^{n_1}$ είναι R-πρότυπο μέσω της 1ης προβολής

$R = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r) \to M_{n_1}(D_1)$

$\Rightarrow$ V_1 είναι ένα απλό $M_{n_1}(D_1)$-πρότυπο

$\Rightarrow V_1 \simeq D_1^{n_1}$ ως $M_{n_1}(D_1)$ πρότ. (R-πρότ.)

$\Rightarrow n_1 = \dim_{D_1^{op}} V_1 = \dim_{End_R V_1} V_1$

Μοναδικότητα:

Έστω $R \cong M_{k_1}(\Delta_1) \times \cdots \times M_{k_s}(\Delta_s)$. $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ διαιρετικοί $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}^*$ και δακτύλιοι.

$\to$ Γνωρίζω ότι $\Delta_1^{k_1}, \ldots, \Delta_s^{k_s}$ είναι απλά R-πρότυπα.

$\to$ ${}_R R = (\Delta_1^{k_1})^{k_1} \oplus \cdots \oplus (\Delta_s^{k_s})^{k_s}$.

• $\Delta_1^{k_1} \not\simeq \Delta_2^{k_2}$: Αν $\varphi: \Delta_1^{k_1} \to \Delta_2^{k_2}$ ισομορφισμός R-πρότυπων $\Rightarrow$

αν $e_1 = (I_{k_1}, 0, \ldots, 0)$, $\forall x \in \Delta^{k_1}$:

$\varphi(x) = \varphi(e_1 \cdot x) = e_1 \cdot \varphi(x) = 0$ άτοπο

Άρα τα s απλά πρότυπα εξαντλούν ως προς ισομορφία την λίστα των απλών R-προτύπων $\Rightarrow$ $\boxed{r=s}$ (2)

Αναδιατάσσοντας την διάσπαση μπορώ να υποθέσω ότι $\Delta_1^{k_1} = U_1, \dots, \Delta_s^{k_s} = U_s$:

$\left(R \simeq \prod_{i=1}^{s} M_{k_i}(\Delta_i) \right)$. Είναι

$$\Delta_1^{op} = \operatorname{End}_{M_{k_1}(\Delta_1)}(\Delta_1^{k_1}) = \operatorname{End}_R(\Delta_1^{k_1})$$

$$= \operatorname{End}_R(U_1) = D_1^{op}.$$

Τέλος, $k_1 = \dim_{\Delta_1^{op}}(\Delta_1^{k_1}) = \dim_{D_1^{op}}(\underbrace{\Delta_1^{k_1}}_{\substack{\| \\ U_1}})$

$= n_1$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν A, B είναι δακτύλιοι $n, m \in \mathbb{N}$ με $M_n(A) \simeq M_m(B)$ και είναι σωστό ότι $n = m$ και <u>δεν</u> είναι σωστό ότι $A \simeq B$. <u>Π.χ.</u> $M_2(M_2(\mathbb{Z})) \simeq M_4(\mathbb{Z})$.

<u>Πόρισμα</u>: Ο R είναι αριστερά ημιαπλός $\Leftrightarrow$ R^{op} είναι ~~δεξιά~~ αριστερά ημιαπλός.

απόδειξη

$R \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ — δ.

$R^{op} \simeq \left[\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)\right]^{op} \simeq \prod_{i=1}^{r} \left[M_{n_i}(D_i)\right]^{op}$

$\simeq \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i^{op})$. αριστερά ημιαπλός

$\square$

Πόρισμα: Οι μεταθετικοί ημιαπλοί δακτύλιοι είναι ακριβώς της μορφής $F_1 \times \dots \times F_r$, $r \in \mathbb{N}$ και $F_1, \dots, F_r$ είναι σώματα.

αποδ: $(\leftarrow)$ ✓ $(\rightarrow)$. Αν $n \in \mathbb{N}$ και D διαιρετικός δακτύλιος τότε ο $M_n(D)$ είναι μεταθετικός αν $n = 1$ και D μεταθετικός

$\square$

Πρόταση: τ.α.ε.ι για ένα δακτύλιο R.

(α) $R = M_n(D)$, για κάποιο $n \geq 1$ D δ.δ.

(β) R είναι απλός και ημιαπλός

(γ) ο R είναι απλός και αριστερά του Artin.

[(γ') R είναι απλός και δεξιά του Artin.] ④

<u>αποδ</u>: (α) → (β)

(β) → (α). R ημιαπλός ⇒

$$R = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i), \quad D_1 \dots D_r \text{ δ.δ.}$$

Όμως $r=1$, αφού R απλός.

(β) → (γ) ✓ (γ) → (β).

Έστω I ένα ελαχιστικό (αρ) ιδεώδ. $\neq 0$.

$\Rightarrow \mathcal{J} = \sum \{ I' \mid I' \leq R \text{ (αρ) ιδεώδ. } I' \simeq I \}$

ως R-πρότυπο.

<u>Ισχ</u>: $\mathcal{J}$ αμφίπλευρο ιδ. του R.

Καθώς $0 \neq I \leq \mathcal{J}$ και R απλός.

$\Rightarrow \mathcal{J} = R \Rightarrow {}_R R$ είναι άθροισμα απλών προτύπων, δηλ. ημιαπλός.

Θ.δ.ο. $\mathcal{J}$ είναι δεξιό ιδεώδες του R. Αν. δ.ο. για κάθε αριστερό ιδ. $I' \leq R$ με $I' \simeq I$ και $\forall r \in R$ ότι $I'r \subseteq \mathcal{J}$.

Για τον σκοπό αυτό θεωρώ την (5).

$Pr: \mathcal{I}' \to R$ $x \mapsto x \cdot r$ (αριστερά)

R-γραμμ. $\mathrm{Im}\,Pr = \mathcal{I}'r$, $\ker Pr \subset \mathcal{I}'$

$\mathcal{I}'$ ελαχιστικό

$\Rightarrow$ $\ker pr = 0$ ή $\ker pr = \mathcal{I}'$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I}'r = 0$ ή $\mathcal{I}'r \simeq \mathcal{I}'$

Σε κάθε περίπτωση, $\mathcal{I}'r \subseteq \mathcal{I}$ □.

<u>Παράδειγμα</u> (απλός δακτύλιος ο οποίος <u>δεν</u> είναι αριστερά του Artin).

F σώμα, V ένας F δx και $\dim_F V = \infty$ με $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ βάση του V. Έστω $R = \mathrm{End}_F V$.

Θεωρώ $\mathcal{I} = \left\{ f: V \to V \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ γραμμ.} \\ \dim \mathrm{Im} f < \infty \end{array} \right\}$

Παρατηρώ $\mathcal{I} \trianglelefteq R$ (αμφ.).

- Αν $f, g \in R \Rightarrow \mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$

$\Rightarrow \mathcal{I}$ κλειστό ως προς τα αθροίσματα

- Αν $f, g \in R \Rightarrow \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im} f$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f \circ g) \leq \dim \mathrm{Im} f$.

- $Im(g\circ f) = g(f(V)) \longrightarrow$

$\dim g[Im(g\circ f)] \leq \dim f(V)$

$= \dim Im f$.

Άρα αν $f \in I, g \in R \to f\circ g$, $g\circ f \in I$.

- Θεωρώ τώρα $S = R / I$.

Θ.δ.ο. S είναι απλός. Θ.δ.ο. $\forall s \in S, s \neq 0$ υπάρχουν $s_1, s_2 \in S$ τ.ω. $s_1 . s . s_2 = 1$. Ισοδ. $\forall f \in R$. $f \notin I$, υπάρχουν $g, w \in R$ τ.ω. $g\circ f\circ w = I_V$.

$\dim Im f = \infty$.

Πράγματι, είναι $\dim Im f = \infty$.

Πράγματι, είναι και άρα υπάρχει βάση της μορφής $\{f(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ για κάποια $u_1, u_2 \ldots$

Ορίζω $h: V \to V$, $e_n \mapsto u_n$.

και την g. Θέτοντας $g(f(u_n)) = e_n$

Τότε $g \circ f \circ w(e_n) = e_n$, $\forall n$.

Ο S δεν είναι αριστερά του.

Artin.

Αν $U \subseteq V$ δ.υ. θεωρώ

$I_U = \{ f \in R \mid f|_U = 0 \}$. Προφανώς $\hookrightarrow U \subseteq \ker f$.

$I_U \subseteq R$ αρ. ιδ.

Επίσης αν $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ υπόχωροι

$\Rightarrow I_{U_2} \subseteq I_{U_1}$

Ισχ: Αν $U \subsetneq W \subseteq V$ και $\dim \frac{W}{U} = \infty$

$\Rightarrow I + I_W \subsetneq I + I_U$.

αποδ: Έστω $\{u_1, \ldots\}$ βάση του U

$\{u_1, u_2, \ldots\} \cup \{\underbrace{w_1 \ldots w_n \ldots}_{\text{άπειρο σύνολο}}\}$ βάση W

Γνωρίζω ότι υπάρχει $f \in R$ με

$U \subseteq \ker f$: $f(w_i) = w_i$, $\forall i$

$\Rightarrow f \in I_U$ αλλά $I + I_W \not\ni f$.

Αν υπήρχε $g \in I$, $u \in I_W$: $f = g + u$

τότε θα είχα

$\varphi(w_i) = g(w_i) + u(w_i) = g(w_i) \in \operatorname{Im} g$.

άτοπο γιατί $\dim \operatorname{im}(g) < \infty$.

Στην περίπτωση αυτή, συνθ. εγγ.

δεν ισχύει αριστερών ιδεωδών του.

$S = \frac{R}{I}$ ως εξής $\frac{I + I_n}{I} \subsetneq \frac{I + I_{n}}{I}$

Θεωρώντας μια αύξουσα ακολουθία

υποχώρων:

$U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \ldots$ του U τ.ω.

$\dim U_{i+1}/U_i = \infty$, $\forall i \geq 1$.

προκύπτει μια γνήσια αύξουσα

ακολ. αρ. ιδεωδών του $S = R/I$.