Άλγεβρα

(15/03/2023)

D διαιρετικός δακτύλιος $n \in \mathbb{N}$.

$R = M_n(D)$. Ο R είναι:

- απλός (δηλ. δεν έχει αμφίπλευρα ιδεώδη)
- αριστερά ημιαπλός.
- μοναδικό απλό R-πρότυπο $V = D^n$.

$$\mathrm{End}_R(V) \cong D^{op}, \quad n = \dim_{\mathrm{End}_R(V)} V.$$

$D_1, \dots, D_r$ διαιρετικοί δακτύλιοι

$n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i)$ είναι

αριστερά ημιαπλός.

- $\mathrm{Hom}_R\left(M, \prod_{i \in I} N_i\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i)$

$$\varphi \mapsto (p_i \circ \varphi)_{i \in I}.$$

- $\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$

$$g \mapsto (g \circ \nu_i)_{i \in I} = (g|_{M_i})_{i \in I}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $M_1,\dots,M_m$ και $N_1,\dots,N_n$ είναι R-πρότυπα και

$$M=\bigoplus_{j=1}^{m} M_j,\quad N=\bigoplus_{i=1}^{n} N_i \left(=\prod_{i=1}^{n} N_i\right)$$

τότε υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$Hom_R(M,N) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_R(M,N_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{m} Hom_R(M_j,N_i)$$

$$\varphi \mapsto (p_i\circ\varphi)_i \mapsto (p_i\circ\varphi\circ u_j)_{i,j}$$

Άρα, η αβελιανή ομάδα

$$Hom_R(M,N) \cong \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & Hom_R(M_j,N_i) & \\ & & \end{pmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

$n\times m$ πίνακας

όπου $Hom_R(M_j,N_i)$ στη (i,j) θέση.

- Η αντιστοιχία αυτή αντιστοιχεί στη σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων το "γινόμενο πινάκων".

Έχουμε $M=\bigoplus_{j=1}^{m} M_j$, $N=\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$

$$L=\bigoplus_{k=1}^{l} L_k.$$

$M \xrightarrow{f} N \rightsquigarrow (f_{ij})_{i,j}$ με $f_{ij} = p_i \circ f \circ u_j$

$: M_j \longrightarrow N_i$

$N \xrightarrow{g} L \rightsquigarrow (g_{ki})_{k,i}$ με $g_{ki} = \pi_k \circ g \circ q_i$

όπου $q_i : N_i \xhookrightarrow{\text{ένθεση}} N$ $\quad : N_i \longrightarrow M_k$

Η σύνθεση $M \xrightarrow{g \circ f} L$ αντιστοιχεί

στον πίνακα: $\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ki} \circ f_{ij} \right)_{k,j}$

Είναι $f(m_j) = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(m_j), \forall m_j \in M_j$

και $g(v_i) = \sum_{k=1}^{l} g_{ki}(v_i), \ \forall v_i \in N_i$

Άρα για κάθε $j = 1, \dots, m$ και $m_j \in M_j$:

$$(g \circ f)(m_j) = g\left(\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(m_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} g \circ f_{ij}(m_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} g_{ki} \circ f_{ij}(m_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ki} \circ f_{ij}(m_j) \right)}_{\in \, Hom_R(M_j, L_k)}$$

Άρα έχουμε συμβατότητα με τον συμβολισμό.

Υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων.

$$End_R(M^n) \cong M_n(End_R M)$$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ και

$Hom_R(M_i, M_j) = 0, \ \forall i \neq j \to$

$$End_R(M) \cong \prod_{i=1}^{n} End_R(M_i).$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν R ένας δακτύλιος

$\to End_R(R) \cong R^{op}$.

<u>απόδ.</u>:
Έστω $r \in R$ και $\varphi_r : R \to R$ η απεικόνιση $\varphi_r(x) = x \cdot r$. Η φ_r είναι R-γραμμική.

Πράγματι, • $\varphi_r(x+x') = (x+x')r = xr + x'r = \varphi_r(x) + \varphi_r(x')$

• $\varphi_r(\alpha x) = \alpha x r = \alpha \varphi_r(x)$, $\forall x, x', \alpha \in R$.

Η απεικόνιση $\varphi : R^{op} \to End_R(R)$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

<u>Προσθετικότητα</u>: άμεσο.

<u>Πολλαπλασιαστική</u>: $\varphi_r \circ \varphi_{r'} = \varphi_{r' \cdot r} \in End_R(R)$

Πράγματι, $\forall x \in R$:

$$(\varphi_r \circ \varphi_{r'})(x) = \varphi_r(\varphi_{r'}(x)) = \varphi_r(xr')$$
$$= (xr')r = x(r'r) = \varphi_{r'r}(x)$$

<u>Μονάδα</u> $\varphi(1) = id \in End_R(R)$

<u>1-1</u>: αν $r \in R$: $\varphi(r) = 0 \in End_R(R)$

$\Rightarrow \varphi(r)(1) = r = 0.$

<u>επί</u>: Έστω $g \in End_R(R)$. αν $x \in R$

$$g(x) = x \cdot g(1) = x \cdot \varphi_{g(1)}(x) \Rightarrow \boxed{g = \varphi_{g(1)}}.$$

<u>Θεώρημα</u> Κάθε αριστερά ημιαπλός δακτύλιος R είναι της μορφής

$$\boxed{R = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)}$$

όπου $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, $D_1, \dots, D_r$ είναι διαιρετικοί δακτύλιοι.

Επιπλέον, το r και η r-άδα $((n_1, D_1), \dots, (n_r, D_r))$ είναι μοναδικά ως προς αναδιάταξη.

[Π.χ. $R = \mathbb{C} \times M_3(\mathbb{C}) \times M_{10}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ ⑥

$\cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_{10}(\mathbb{C}) \times M_3(\mathbb{C})$]

<u>Απόδειξη</u>: Μπορώ να γράψω·

$R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$

για κάποια ελαχιστικά αρ. ιδεώδη

$I_1, \ldots, I_n \subseteq R$.

Μπορώ να γράψω·

${}_R R \cong U_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{n_r}$ (ομαδοποιώντας ισόμορφα), όπου $U_1, \ldots, U_r$ είναι απλά R-πρότυπα και $n_1, \ldots, n_r \geq 1$.

$\Rightarrow \mathrm{End}_R(R) \cong \mathrm{End}_R\left(U_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{n_r}\right)$

Ισχύει $\mathrm{End}_R(R) \cong R^{op}$.

Υπολογισμός του $S = \mathrm{End}_R\left(U_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{n_r}\right)$

Παρατηρώ ότι για $i \neq j$:

$\mathrm{Hom}_R\left(U_i^{n_i}, U_j^{n_j}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \end{array} \right)$ $n_j \times n_i$ πίνακα

με $\mathrm{Hom}_R(U_i, U_j)$ στη (i,j) θέση.

Όμως $\mathrm{Hom}_R(U_i, U_j) = 0$ (αυτό ισχύει υπάρχουν ισόμορφα (απλά) πρότυπα)

$\Rightarrow \operatorname{Hom}_R(U_i^{n_i}, U_j^{n_j}) = 0.$

Συνεπώς,

$$S \cong \prod_{i=1}^{r} \operatorname{End}_R(U_i^{n_i}) \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}[\operatorname{End}_R(U$$

Συνεπώς υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων:

$$R^{op} \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}[\operatorname{End}_R(U_i)] \Longrightarrow$$

$$R \cong \left[\prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\operatorname{End}_R(U_i))\right]^{op}.$$

$$\Rightarrow R \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}[(\operatorname{End}_R U_i)^{op}].$$

Γράφοντας, $D_i = [\operatorname{End}_R(U_i)]^{op}$

για $i = 1, \dots, r$ έχω την διάσπαση

Wedderburn – Artin.

[αφήνεται ως άσκηση ότι

(α) $M_n(T^{op}) \cong (M_n(T))^{op}$.

↪ αναστροφή

(β) αν T_1, T_2 δακτύλιοι

$T_1^{op} \times T_2^{op} \cong (T_1 \times T_2)^{op}$.]

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα!

Το r είναι το πλήθος των κλάσεων ισομορφίας των απλών R-προτύπων.

<u>Ισχυρισμός</u>: Η λίστα $V_1, \dots, V_r$ εξαντλεί (ως προς ισομορφισμό) τα απλά R-πρότυπα.

<u>απόδ</u>: Έστω V ένα απλό R-πρότυπο με $V \not\cong V_i$, $\forall i = 1, \dots, r$.

Καθώς, V είναι απλό $Hom_R(R, V) \neq 0$

άρα $Hom_R(\underbrace{V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}}_{= A}, V) \neq 0$

Όμως, $Hom_R(V_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{n_r}, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} Hom_R(V_i^{n_i}, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \left[Hom_R(V_i, V)\right]^{n_i}$

$= 0$ (λόγω Schur)