$\widehat{\lambda x+\mu y}(x^*) = x^*(\lambda x+\mu y)$ (9)

$= \lambda x^*(x) + \mu x^*(y) = \lambda \hat{x}(x^*) + \mu \hat{y}(x^*)$

$\forall x^*$

Άρα, ο ι είναι γραμμικός και ισομετρική εμφύτευση.

<u>Άλγεβρα II</u> Μάθημα.

<u>ημιαπλά πρότυπα</u>: (ευθέα) αθροίσματα απλών προτ.

R (αρ.) ημιαπλός $\Rightarrow$ R (αρ.) της Ναetner (Artin).

$\left(R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n, \ I_j \text{ ελαχιστικά} \right)$

αρ. ιδεώδη

ο $R_1, \dots, R_n$ (αρ.) ημιαπλοί δακτύλιοι

$\Rightarrow R_1 \times \dots \times R_n$ (αρ.) ημιαπλός.

Σταθεροποιώ ένα διαιρετικό δακτ. D και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρώ $R = M_n(D)$

<u>Ιδιότητες του</u> R:

① Ο R είναι απλός, δηλ. για ②
κάθε αμφίπλευρο ιδεώδες I του
$R \Rightarrow I = 0$ ή $I = R$

απόδ: Έστω $I \subseteq R$ ιδεώδες $\neq 0$
και $A \in I$, $A \neq 0$. Γράφω

$$A = (a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}.$$ Υπάρχουν κ, λ

τ.ω. $a_{\kappa\lambda} \neq 0$.

Για να δείξω ότι $I = M_n(D)$ αρκεί
$E_{\alpha\beta} \in I$, $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$. Μια και

τότε $\forall X = (x_{ij}) \in M_n(D)$:

$$X = \sum_{i,j} x_{ij} E_{ij} = \sum_{i,j} (x_{ij} I_n) E_{ij} \in I$$

Όμως,

$$E_{\alpha\kappa} (a_{\kappa\lambda}^{-1}) E_{\kappa\lambda} E_{\lambda\beta} = E_{\alpha\beta}.$$

καθώς
$$E_{\alpha\kappa} E_{ij} E_{\lambda\beta} = \begin{cases} 0, & \kappa \neq i \text{ ή } \lambda \neq j \\ E_{\alpha\beta}, & \kappa = i \text{ και } \lambda = j \end{cases}$$

② Ο R είναι αριστερά της Noether και του Artin.

απόδ. Ο D είναι εμφυτευμένος ③
υποδακτύλιος του R μέσω του οποίου:
$d \longmapsto d I_n \in M_n(D)$, $d \in D$.
Συνεπώς, κάθε αρ. ιδεώδες $J \leq R$
είναι ένας D-~~αρ~~ δια. υπόχωρος
του $R = M_n(D)$. Όμως, $\dim_D M_n(D) = n^2$

③ Η αβελιανή ομάδα $V = D^n$
είναι ένα απλό R-πρότυπο με
την φυσιολογική δράση (γινόμενο πινά-
κων)

απόδ: Πρέπει νδο. $\forall v \in V, v \neq 0$ είναι
$R \cdot v = V$. [Πράγματι, $\forall u \in V$:
υπάρχει $f: V \to V$ D-γραμμ. τ.ω
$f(v) = u$.]

④ $\mathrm{End}_R V \cong D^{op}$.
Θεωρώ $\forall d \in D$ την γραμμική
$r_d: V \to V$ όπου:
$r_d(v_1, \dots, v_n) = (v_1 d, \dots, v_n d)$

η r_d είναι R-γραμμική.

Πράγματι, $\forall A=(a_{ij}) \in R = M_n(D)$

και $v = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in V$ είναι

$$r_d(A \cdot v) = r_d \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} d_j \\ | \\ \sum_j a_{nj} d_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} d_j d \\ | \\ \sum_j a_{nj} d_j d \end{pmatrix} = A \circ r_d(v).$$

• Η απεικόνιση $r : D \to End_R(V)$ είναι 1-1, επί, απεικονίζει το 1 στην $Id : V \to V$ και $r(d \cdot d') = r(d') \circ r(d)$.

(α) <u>1-1</u> : $r_d = r_{d'} \Rightarrow r_d(v) = r_{d'}(v)$ $\forall v \in V$.

$$\Rightarrow r_d \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{d'} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d = d'$

(β) $r_{d+d'} = r_d + r_{d'}$

(σ) Επί: Έστω $\varphi: V \to V$

προσθ. με $\varphi(Av) = A\cdot\varphi v$, $\forall A \in R$, $\forall v \in V$.

Θεωρώ $\varphi\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\ * \\ \vdots \\ *\end{pmatrix} \in V$, $d \in D$.

Τώρα $\forall v = \begin{pmatrix}d_1\\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix} \in V$ έχουμε

$$\varphi(v) = \varphi\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix} = \cancel{\varphi\begin{pmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}}$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix}d_1 & \\ \vdots & 0 \\ d_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}d_1 & \\ \vdots & 0 \\ d_n & \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}d_1 & \\ \vdots & 0 \\ d_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ * \\ \vdots \\ *\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_1 d\\ \vdots \\ d_n d\end{pmatrix} = r_d(v).$$

(5) $_R R \cong \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n} = V^n.$

$$R = \begin{pmatrix}* & \\ \vdots & 0 \\ * & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}0 & * & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & * & \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \vdots \\ & *\end{pmatrix}$$

$= I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, όπου $I_k \leq R$ είναι σύνολο (αρ. ιδεώδ). των $n \times n$ που φέρονται στην k-στήλη.

Πόρισμα Ο R είναι αρ. ημι-(s) πλήρως.

Στόχος: Κάθε απλό R-πρότυπο είναι ισόμορφο με το V.

Συμβ. Αν M, N R-προτ. ορίζουμε $Hom_R(M,N)$ για την αβελ. ομάδα των R-ορ. απεικονίσεων $f: M \to N$.

Παρατηρήσεις: (1) "καθολική ιδιότητα γινομένων"

Αν $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια οικογένεια R-πρoτ. και $N = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ και $p_\lambda : N \to M_\lambda$ την προβ. στην λ-συντ., $\forall \lambda \in \Lambda$

$$Hom_R(M,N) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} Hom_R(M, M_\lambda)$$

$$f \mapsto (p_\lambda \circ f)_{\lambda \in \Lambda}$$ είναι ισομορφ. αβελ.

(2) "καθολική ιδιότητα του ευθέως αθροίσματος"

Αν $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ οικογένεια R-προτ. και $N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ με εμφυτεύσεις $i_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow N$

$$\to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\lambda, N) \quad (\varphi)$$

$\varphi \mapsto (\varphi \circ i_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ισομορφ.

α βελ.

$R = M_n(D)$, $V = D^n$

Κάθε απλό R-πρότυπο είναι ισόμορφο με το V.

απόδ: Έστω U ένα απλό R-

πρότ. με $V \not\cong U$. Είναι $U \neq 0$

$\Rightarrow U \cong R/I$, για κάποιο (αριστ) ιδεώδες I του R. Η απεικόνιση πηλίκο

$p : R \to R/I = U$ είναι $\neq 0$. και άρα

$\mathrm{Hom}_R(R, U) \neq 0$

όμως ${}_R R = V \oplus \cdots \oplus V$ και άρα.

$\mathrm{Hom}_R(R, U) = \mathrm{Hom}_R(V \oplus \cdots \oplus V, U)$

$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Hom}_R(V, U)}_{0} = 0$ ΑΤΟΠΟ

Πόρισμα: Έστω $r \in \mathbb{N}$, $D_1, \ldots, D_r$ δ.δ.

και $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ τότε.

$R = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ είναι αρ. ημιαπλός.