① Άλγεβρα ΙΙ Μάθημα 05 (01/03/2023)

Αν M είναι ένα R-πρότ.

$N \leq M$ τ.α.ε.ι.

(i) M είναι της Noether. (Artin)

(ii) τα N και M/N είναι της Noether (Artin)

για Noether

απόδ: (i) $\Rightarrow$ (ii) Υποθέτω ότι M της Noether. Για να δείξω ότι N της Noether $L \leq N \Rightarrow L \leq M$

$\Rightarrow L$ π.π.

Για το M/N. Θεωρώ $\bar{K} \leq M/N$.

$\Rightarrow \exists\ K \leq M,\ K \supseteq N:\ K/N = \bar{K}$

το K είναι π.π. $\Rightarrow \bar{K}$ π.π.

(ii) $\rightarrow$ (i) για Artin

Έστω $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολ. υποπρότ. του M.

Θεωρώ τις φθίνουσες ακολουθ.

$M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq \dots \supseteq M_n \cap N \supseteq \dots$ ②

και

$M_0 + N/N \supseteq M_1 + N/N \supseteq \dots$

Από την υπόθεση έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώ.

$M_{n_0} \cap N = M_n \cap N$ ⊛

ένγινο: $\dfrac{M_{n_0} + N}{N} = \dfrac{M_n + N}{N} \Rightarrow M_{n_0} + N = M_n + N$ ⊛

⊛ ⊛⊛ $\Rightarrow M_{n_0} = M_n$.

$M_{n_0} \supseteq M_n$. $\forall n \geq n_0$

Πόρισμα: Αν $A, B \leq M$ ένως της Noether (Artin) $\Rightarrow A + B$ είναι της Noether (Artin).

απόδ: $A \leq A + B$ υποπρότ. και άρα α.ν.δο. A και $\dfrac{A+B}{A}$ είναι της Noether. Επίσης, B είναι της Noether και $B/A \cap B$ της Noether. □

$\simeq A + B/A$.

Πόρισμα: Αν $k \in \mathbb{N}$ και $A_1, \dots, A_k$ ③
υΜ της Noether (Artin) $\Rightarrow$
$A_1 + \dots + A_k$ είναι της Noether
(Artin).

Ορσ: Ο δακτύλιος R καλείται αριστερά της Noether (Artin) αν το αριστερό R-πρότυπο R είναι της Noether (Artin).

Πόρισμα: αν R είναι αριστερά της Noether (Artin) και το M είναι π.π R-πρότυπο είναι της Noether (Artin).
$\Rightarrow M$ της Noether.

απόδ: $\exists k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in M$ έτσι ώστε: $M = \sum_{i=1}^{k} R x_i$. Όμως για κάθε $i = 1 \dots k$ η απεικόνιση
$f_i : R \to Rx_i$, $f_i(r) = r x_i \in R x_i$ $\forall r \in R$
είναι γραμμική, επί και άρα
$Rx_i \simeq R / \ker f_i$

$$\underbrace{Rx_i \cong R/\ker f_i}_{\text{της Noether.}}$$

$\Rightarrow Rx_i$ της Noether. □

<u>Πρόταση</u>: Τ.α.ε.ι. για ένα R-πρότυπο M.

(i) M είναι $\neq 0$ και δεν έχει γνήσια, μη-μηδενικά υποπρότυπα.

(ii) $\forall x \in M \setminus \{0\}$: $M = \langle x \rangle = Rx$.

(iii) $M \cong R/I$ για κάποιο μεγιστι-κό αριστερό ιδεώδες I του R.

(δηλ. $I \subsetneq R$ αρ. ιδεώδες. γνήσιο. και $\forall\, J \trianglelefteq R$ αρ. με $I \subseteq J \Rightarrow I = J$ ή $J = R$).

Στην περίπτωση αυτή το R-πρότ. M καλείται <u>απλό</u>.

<u>Απόδ</u>: (i) $\to$ (ii). Αν $x \in M$.

$x \neq 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{Rx} \leq M \overset{(i)}{\Rightarrow} M = Rx.$

$(ii) \to (iii)$ Επιλέγω $x \in M$, $x \neq 0$ και θεωρώ την απεικόνιση: $f : R \to M$, $f(r) = rx \in M$

f γραμμική, $\operatorname{im} f = Rx = M$.

και άρα για $I = \ker f \trianglelefteq R$

έχω ότι $M = \operatorname{im} f \simeq R/\ker f = R/I$

Είναι $M \neq 0 \Rightarrow I \neq R$. Αν

$J \subseteq R$ αριστερό ιδεώδες με

$J \supsetneq I$ για $r \in J \setminus I$. το

$R(r+I) \leq R/I$ είναι $\neq 0$.

$\Rightarrow R(r+I) = R/I \Rightarrow 1 + I = s(r+I)$

$\Rightarrow 1 - sr \in I \subseteq J \Rightarrow 1 \in J$

$\Rightarrow J = R$. $\square$

$(iii) \to (i)$. Τα υποπρότ. του R/I

είναι ακριβώς τα πρότ. J/I

όπου $J \subseteq R$ αρ. ιδεώδες, $J \supseteq I$

$\Rightarrow J = I$ ή $J = R$. και άρα.

2) Παραδείγματα: {απλά $\mathbb{Z}$-πρότυπα}

$= \{ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid p$ πρώτος $\}$.

Πρόταση (Λήμμα του Schur).

Έστω $\varphi : M \to N$ γραμμική μεταξύ απλών R-προτύπων.

$\Rightarrow \varphi = 0$ ή φ ισομορφισμός.

Ειδικότερα, αν M απλό, τότε ο δακτύλιος $\mathrm{End}_R(M)$ είναι (διαιρετικός)

Απόδ. Αν $\varphi \neq 0 \Rightarrow \ker \varphi \neq M$

M απλό $\Rightarrow \ker \varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ 1-1

Ομοίως, $\varphi \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$. $\overset{N \text{ απλό}}{\Rightarrow} \mathrm{Im}\,\varphi = N$

$\Rightarrow \varphi$ επί ◁.

Ορσ: Ένα R-πρότ. M καλείται ημιαπλό αν για κάθε $N \leq M$ $\exists K \leq M : M = N \oplus K$. $\left(\begin{array}{l} M = N + K \\ N \cap K = \{0\} \end{array} \right)$

Πρόταση: Έστω M ένα ημι- φ απλό R-προτ. και $N \leq M$ $\Rightarrow$ N, M/N είναι ημιαπλά.

απόδ: • Έστω $K \leq N \Rightarrow \exists\, L \leq M$

$M = K \oplus L$ $(M = L + K,\ L \cap K = 0)$

θ.δ.ο $N = K \oplus (N \cap L)$ δηλ. ότι

$K \cap (N \cap L) \overset{(*)}{=} 0$, $K + (N \cap L) \overset{(**)}{=} N$

$(*)$ άμεσο

$(**)$ έπεται από την modularity.

$$K + (L \cap N) \overset{K \leq N}{=} (\underbrace{K + L}_{M}) \cap N = N$$

• θ.δ.ο M/N είναι ημιαπλό.

Υπάρχει $N' \leq M$: $M = N \oplus N'$

Άρα $M/N = N' \oplus N / N \simeq \dfrac{N'}{\underbrace{N' \cap N}_{0}} = \underbrace{N'}_{\downarrow \text{ ημιαπλό}}$

Πρόταση: Έστω M ένα R-πρότυπο με $M \neq 0$ ημιαπλό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει ένα απλό πρότυπο $N \leq M$.

Υποδ: Έστω $x \neq 0$ στο M. ⊜

Μπορώ να υποθέσω ότι $M = Rx$.

Έστω $\mathcal{X} = \{ K \leq M \mid x \notin K \}$.

Είναι $\mathcal{X} \neq \emptyset$ καθώς $0 \in \mathcal{X}$. Από το λήμμα του Zorn επιλέγω ένα μεγιστικό στοιχείο $K \in \mathcal{X}$.

Υπάρχει $M \geq N$: $M = K \oplus N$.

Θ.δο. N είναι απλό.

- $N \neq 0$. (αν $N = 0 \Rightarrow x \notin N$ άτοπο)

  $M = N + K$

Έστω $N' \subseteq N$ με $N' \neq 0$

- $K \subsetneq K + N'$ γιατί αν $K = K + N'$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} N' \subseteq K \\ N' \subseteq N \end{array}\right\} \Rightarrow N' \subseteq K \cap N = \{0\}.$$

Άρα $K + N' \notin \mathcal{X} \Rightarrow x \in K + N'$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \cancel{x} \; K + N' = M = K + N \quad (1) \\ \Rightarrow N' \cap K = N \cap K = 0. \quad (2) \\ N' \subseteq N \quad (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{N' = N}$$

□