① Άλγεβρα ΙΙ   Μάθημα 0-

Πρόταση: Τα ε.ε.ι. για ένα R-πρότυπο M.

(i) Κάθε υποπρότυπο $N \subseteq M$ είναι π.π.

(ii) Ισχύει η συνθήκη αύξουσας αλυσίδας (δεν υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία υποπρότ.).

(iii) Κάθε μη-κενή συλλογή $\mathcal{X}$ υποπρότ. του M έχει μεγιστικό στοιχείο. (M: πρότ. της Noether)

αποδ (i) → (ii).

Έστω $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_k \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολ. υποπροτ. του M.

Θεωρώ $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$. Το $N \leq M$ είναι π.π. και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in N$ ώστε $N = \sum_{i=1}^{n} R x_i$

καθώς $x_i \in \bigcup_k N_k$, $\exists\, k_i \in \mathbb{N}$: (2)

$x_i \in N_{k_i}$, $i = 1 \dots n$

Αν $k = \max\{k_i \mid i = 1 \dots n\} \Rightarrow x_i \in N_k$ $\forall i$

$$\Rightarrow N = \sum_{i=1}^{n} R x_i \subseteq N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq \dots \subseteq N$$

Τελικά, $N_k = N_{k+1} = \dots$

(ii) $\rightarrow$ (iii) Υποθέτω ότι ισχύει το
(ii) και $\mathcal{X} \neq \emptyset$ συλλογή υποπροτ. που
δεν έχει μεγιστικό στοιχείο. Θα κατασ-
κευάσω μια γνήσια αύξουσα ακολ. υποπ-
ροτύπων του $\mathcal{M}$. Υποθέτοντας ότι
Έστω $N_0 \in \mathcal{X}$. κατασκευάσει μια γνή-
ακτο και έχω
σια αύξουσα ακολουθία $N_0 \subsetneq \dots \subsetneq N_{k-1}$
της $\mathcal{X}$ καθώς $N_{k-1} \in \mathcal{X}$ και
$\mathcal{X}$ δεν έχει μεγ. στοιχείο $\Rightarrow$ υπάρχει
$N_k \in \mathcal{X}$: $N_{k-1} \subsetneq N_k$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $N \le M$ και

$\mathcal{X}$ η συλλογή των π.π. προτύπων του N. Είναι $\mathcal{X} \neq \emptyset$, $0 \in \mathcal{X}$.

Έστω $N' \in \mathcal{X}$ μεγιστ. της $\mathcal{X}$

Θ.δ.ο. $N' = N$ ($\Rightarrow N$ π.π.). $N' \subseteq N$

αν $\exists\, x \in N \setminus N' \Rightarrow N'' = N' + Rx \le N$

$N' \subsetneq N''$, $N'' \in \mathcal{X}$ άτοπο. □

<u>Πρόταση:</u> Τα ε.ι. για ένα R-πρότυπο M.

(i) Ισχύει η συνθήκη φθίνουσας άλυσης (δεν υπάρχει γνήσια φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων)

[redacted] δηλ. κάθε φθίνουσα ακολ. υποπρωτ. του M είναι τελικά σταθερή.

(ii) Κάθε μη-κενή συλλογή $\mathcal{X}$ υποπρωτ. του M έχει ελαχιστικό στοιχείο

(δηλ. υπάρχει $N \in \mathcal{X}$ τ.ω. $\forall$
$N' \in \mathcal{X}$: $N' \subseteq N \Rightarrow N' = N$.)

Στην περίπτωση αυτή καλείται Artin.

<u>Πρότυπο του Artin</u>: Όπως πριν.

<u>αποδ</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολ. υποπροτ. του M και $\mathcal{X} = \{N_0, N_1, \dots\}$. Αν N_t είναι ελαχιστικό $\Rightarrow$ $\forall t' \geq t$ έχω $N_{t'} \in \mathcal{X}$, $N_{t'} \subseteq N_t \Rightarrow N_t = N_{t'}$

<u>Παραδείγματα</u>: (i) Το $\mathbb{Z}$-πρτ. είναι της Noether αλλά όχι του Artin: $2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq \dots$

(ii). Έστω p πρώτος και θεωρώ το $\mathbb{Z}$-πρότυπο: $C(p^\infty) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N} \}$

$$\left(\cong \frac{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]}{\mathbb{Z}} \right)$$

Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $C(p^\infty)$ είναι του Artin αλλά όχι της Noether.

Για κάθε $t \in \mathbb{N}$ ορίζω την υποομάδα $C_t \subseteq C(p^\infty)$ ως εξής

$$C_t = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^{p^t} = 1 \} = \langle e^{\frac{2\pi i}{p^t}} \rangle$$

κυκλική ομάδα τάξης p^t.

είναι $C_0 \subsetneqq C_1 \subsetneqq C_2 \subsetneqq \cdots$

$\leadsto$ όχι της Noether.)

Λήμμα: Οι υποομάδες της $C(p^\infty)$ είναι ακριβώς οι $(C_t)_{t \in \mathbb{N}}$ και η ίδια η $C(p^\infty)$.

Αποδ: Θ.δο. κάθε γνήσια υποομάδα ~~της~~ $A \subsetneqq C(p^\infty)$ είναι ακριβώς μια από τις C_t.

Έστω $A \subsetneq C(p^\infty)$ υποομ. (6)

$C(p^\infty) = \bigcup_t C_t \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}:$

$C_t \not\subseteq A$. Καθώς $C_0 \subseteq A \Rightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}: C_n \subseteq A, A \not\supseteq C_{n+1}$. Τότε

<u>Ισχυρ.</u> $A = C_n$.

<u>απόδ ισχυρ:</u> Έστω $a \in A \subseteq C(p^\infty)$

$o(a) = p^\lambda \Rightarrow \langle a \rangle = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^\lambda} = 1\}$

$= C_\lambda$.

- Αν $\lambda \leq n \Rightarrow a \in \langle a \rangle = C_\lambda \subseteq C_n$.
- Αν $\lambda > n \Rightarrow \lambda \geq n+1 \Rightarrow C_{n+1} \subseteq C_\lambda = \langle a \rangle$

Άτοπο. $\square$

(3) Αν F σώμα και V F-δχ.

$\Rightarrow V$ είναι F-πρότυπο του Artin

$\Leftrightarrow V$ " της Noether

$\Leftrightarrow \dim_F V < \infty$.

Είναι προφανές ότι αν $\dim \mathcal{V} < \infty$ $\textcircled{f}$
$\Rightarrow$ ισχύουν οι συνθήκες της.

Noether και των Artin για τους

υποχώρους του $\mathcal{V}$

- αν $\dim \mathcal{V} = \infty$. και $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \in \mathcal{V}$

είναι γρ. ανεξ. $\Rightarrow$

$$0 \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subsetneq \cdots$$

Η ακολουθία

$$\underbrace{\langle e_1, e_2, \dots \rangle}_{\mathcal{V}} \supsetneq \langle e_2, e_3, \dots \rangle \supsetneq \langle e_3, e_4, \dots \rangle \supsetneq \cdots$$

(4) Έστω $F \subseteq E$ σώματα και

$\mathcal{V}$ ένας E-δ.χ. Θεωρώ τον δακτ.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & \mathcal{V} \\ 0 & F \end{pmatrix}}_{R} = \left\{ \begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} e \in E, \ f \in F \\ v \in \mathcal{V} \end{matrix} \right\}.$$

με πρόσθεση. $\begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e' & v' \\ 0 & f' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e+e' & v+v' \\ 0 & f+f' \end{pmatrix}$$

και γινόμενο: (8)

$$\begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e' & v' \\ 0 & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ee' & ev' + f'v \\ 0 & ff' \end{pmatrix}$$

Υπάρχει ομομορφ. δακτυλίων

$$\begin{pmatrix} E & V \\ 0 & F \end{pmatrix} \xrightarrow{g} E \times F, \quad \begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \longmapsto (e, f)$$

με πυρήνα $\ker g = I = \begin{pmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρώ ότι $\begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$

$$\begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{**}{=} \begin{pmatrix} 0 & ev' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & fv' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>π.χ.</u> $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ υποδακτ.

Ο δακτύλιος R <u>δεν</u> είναι δεξιά του Artin, ούτε δεξιά

(9) της Noether· καθώς $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

μπορώ να βρω ακολουθίες (*) - δ.χ.

$$U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subseteq \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$\mathbb{R} \supseteq W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq \cdots$$

Από την (*) προκύπτουν ακολουθίες δεξιών ιδεωδών:

$$\begin{pmatrix} 0 & U_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subsetneq \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subsetneq \cdots \subseteq \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $$R \supseteq \begin{pmatrix} 0 & W_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supsetneq \begin{pmatrix} 0 & W_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supsetneq \cdots$$

Όμως, R είναι αριστερά της Noether και αριστερά του Artin.

Από (**) το αριστερό ιδεώδες $\mathbb{Q}$-R-υποπρότυπα έχει μόνο το 0 και το $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ το αριστερό R-πρτ. $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι Noether και Artin.

Καθώς το πηλίκο·

$$\frac{R}{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{R}{\ker g} \cong \operatorname{im} g = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{Q}}_{\text{της Noether Artin}}.$$

έπεται ότι το Αριστερό R-πρότ. R είναι της Noether και του Artin. από το εξής γενικό ισχυρισμός:

- αν M R-πρότυπο και $N \leq M$ ώστε τα R-προτ. N, M/N να είναι της Noether (Artin) $\Rightarrow$ M της Noether (Artin).