Μη μεταθετική Άλγεβρα Δακτυλίων

1. Θεωρία Wedderburn-Artin
2. Το ριζικό Jacobson (όχι ταυτόσημο με ριζικό μεταθετικής)
3. Αναπαραστάσεις Ομάδων
4. Δομή των primitive δακτυλίων

Δακτύλιοι: πάντα με 1,
Ομομορφισμοί δακτυλίων: διατηρούν τη μονάδα.
Υποδακτύλιος $S \subseteq R$: το 1 του R ανήκει στο S.

<u>Παραδείγματα</u>: (i) R δακτύλιος, $M_n(R) = \{n\times n$ πίνακες στο $R\}$
$(M_3(M_4(\mathbb{C})) \cong M_{12}(\mathbb{C}))$.

(ii) $(M,+)$ αβελιανή ομάδα, το $\mathrm{End}\, M$ γίνεται δακτύλιος
<u>πρόσθεση</u>: $f,g: M \to M$, $f+g: x \mapsto f(x)+g(x)$ είναι προσθετική
άρα $f+g \in \mathrm{End}\, M$
<u>γινόμενο</u>: η σύνθεση απεικονίσεων
Ισχύουν τα αξιώματα των δακτυλίων.

(ii)' F σώμα, V F-δχ. $\mathcal{L}(V) = \{f: V \to V \mid f$ γραμμική$\}$ είναι F-δχ και έχει γινόμενο τη σύνθεση (F-άλγεβρα)

(ii)'' Αν $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert τότε ορίζεται
$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{T: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid$ γραμμική, συνεχής$\}$

(iii) k μεταθετικός δακτύλιος, G ομάδα
$kG = \{f: G \to k \mid \mathrm{supp}\, f$ πεπερασμένο$\}$
<u>πχ</u> Αν $g \in G$ τότε $\delta_g \in kG$ όπου $\delta_g(x) = \begin{cases} 1, & x=g \\ 0, & x\neq g. \end{cases}$

<u>άθροισμα</u>: κατά σημείο (αν $\mathrm{supp}\, f$, $\mathrm{supp}\, \varphi$ πεπερ. τότε $\mathrm{supp}(f+\varphi)$ πεπερ.)

γινόμενο (συνέλιξη): Αν $f, \varphi \in kG$ τότε η $f * \varphi : G \to k$

$$g \mapsto \sum_{\substack{x,y \in G \\ xy = g}} f(x)\varphi(y)$$

ανήκει στο kG καθώς $\mathrm{supp}(f*\varphi) \subseteq \mathrm{supp} f \cdot \mathrm{supp} \varphi$ πολλ/σμός ομάδας

μονάδα: δ_e

Συμβολισμός: αν $f \in kG$ τότε $f = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g := \sum f(g) g$

πχ στοιχεία της $\mathbb{C}S_3$:

$$2(12) - i(123) + \sqrt{5}(132) = 2\delta_{(12)} - i\delta_{(123)} + \sqrt{5}\delta_{(132)}$$

άρα

$$kG = \{ \sum_g \lambda_g g \mid \lambda_g \in k \text{ και } \lambda_g = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } g \}$$

πχ $G = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$: $kG = \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n t^n \mid \lambda_n = 0 \text{ σχ. } \forall n \} = k[t, t^{-1}]$

– πολυώνυμα Laurent

Πράξεις στο σύνολο ιδεωδών (αριστερών)

Αν $I, J \subseteq R$ αριστερά ιδεώδη, τότε

- $I \cap J \subseteq R$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες (είναι το μέγιστο αριστερό ιδεώδες που περιέχεται στα I, J)
- $I + J = \{ r \in R \mid \exists x \in I, y \in J : r = x + y \}$ είναι αριστερό ιδεώδες (είναι το ελάχιστο αριστ. ιδ. που περιέχει τα I, J)
- $IJ = \{ r \in R \mid r = x_1y_1 + \dots + x_ny_n \text{ για } x_i \in I, y_i \in J \}$ είναι αριστ. ιδεώδες, $IJ \subseteq J$ (και αν R μεταθετικός ή I αμφίπλευρο τότε $IJ \subseteq I$)

Πρότυπα

Παραδείγματα

(i) F σώμα, V F-δ.χ και $\varphi : V \to V$ γραμμική, ορίζουμε στην αβελιανή $(V,+)$ τη δομή $F[x]$ — προτύπου μέσω:

$$f(x)\cdot v := f(\varphi)v$$

(ii) R δακτύλιος, I αριστ. ιδεώδες, τότε I αριστερό R-πρότυ με τις πράξεις του R

(iii) Αν $(M,+)$ αβελιανή ομάδα, μπορούμε να ορίσουμε στη M μια φυσιολογική δομή ως $\operatorname{End} M$-προτύπου, ως εξής

$$f\cdot x = f(x) \in M$$

π.χ. Αν F σώμα και $n \in \mathbb{N}$, τότε ο $V = F^n$ λαμβάνει τη δο ως $M_n(F)$-προτύπου με συνήθη πολ/σμό πινάκων-στηλώ

π.χ. Αν H χώρος Hilbert, τότε ο H γίνεται $B(H)$-πρότυπο

(iv) R δακτύλιος και $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ οικογένεια R-προτύπων. Το καρτ. γινόμενο $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ γίνεται R-πρότυπο θέτοντας

- $(x_\lambda)_\lambda + (y_\lambda)_\lambda = (x_\lambda + y_\lambda)_\lambda$
- $r\cdot(x_\lambda)_\lambda = (r\cdot x_\lambda)_\lambda$

Το υποσύνολο $M' \subseteq M$ που ορίζεται θέτοντας

$$M' = \{(x_\lambda)_\lambda \mid x_\lambda = 0 \in M_\lambda \text{ σχεδόν } \forall \lambda \in \Lambda\}$$

με τις ίδιες πράξεις είναι R-πρότυπο. Το M' είναι το ευθ άθροισμα της οικογένειας και γραφ. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$

☞ Αν $|\Lambda| < \infty$ τότε $M' = M$

(v) Έστω $\varphi: S \to R$ ομομορφ. δακτυλίων και M R-πρότυπο, τότε το M γίνεται S-πρότυπο, θέτοντας:

$$s \cdot x = \varphi(s) \cdot x \in M$$

("περιορισμός των βαθμωτών")

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\ell"] & \mathrm{End}\, M \\ S \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "\ell\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(vi)

<u>Ορσ</u>: Ο μηδενιστής $\mathrm{Ann}_R M$ ενός R-προτύπου M είναι

$$\mathrm{Ann}_R M = \{ r \in R \mid r \cdot x = 0, \forall x \in M \}$$

(Είναι ο $\ker(R \to \mathrm{End} M)$ και άρα ιδεώδες, μάλιστα αμφίπλευρο)

Έστω R δακτύλιος, I ιδεώδες και $\pi: R \to R/I$

- Για κάθε R/I-πρότυπο M θεωρούμε το επαγόμενο R-πρότυπο $\pi_* M$. Παρατηρούμε ότι $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(\pi_* M)$
- Έστω N R-πρότυπο με $I \subseteq \mathrm{Ann}_R N$ τότε το N γίνεται R/I-πρότυπο N' ώστε $N = \pi_* N'$. Ορίζουμε

$$\cancel{rx = (r+I)x \in N}$$

$$(r+I)x = rx \in N$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, "\ell"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ R/I \arrow[r, dashed, "\bar{\ell}"'] & \mathrm{End}\, M \end{tikzcd}$$

(ο $\bar{\ell}$ υπάρχει από καθολική ιδιότητα του πηλίκου)

<u>Υποπρότυπα</u>

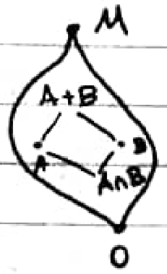
<u>Ορσ</u> Ένα R-υποπρότυπο $N \subseteq M$ είναι υποομάδα του M ώστε $RN \subseteq N$.

Παραδείγματα:

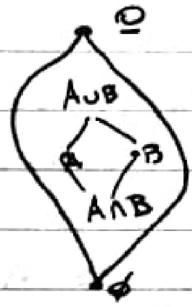
(i) Τα αριστερά ιδεώδη είναι υποπρότυπα του R.

(ii) Αν F σώμα, V F-δχ και $\varphi \in \mathrm{End}\, V \rightsquigarrow F[x]$-πρότυπο. Τα $F[x]$-υποπρότυπα $U \leq V$ είναι ακριβώς οι φ-αναλλοίωτοι διαν. υπόχωροι

M R-πρότυπο
$\mathcal{L}(M) = \{$υποπρότυπα του $M\}$



Ω σύνολο
$\mathcal{P}(\Omega) = \{$υποσύνολα $\Omega\}$



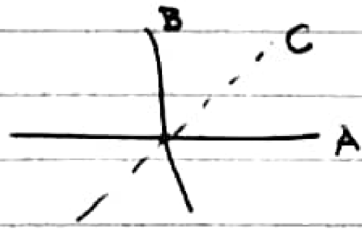
☞ Αν $A, B \leq M$ υποπρότυπα τότε $A \cap B$ υποπρότυπο και είναι το μέγιστο υποπρότυπο που περιέχεται στα A, B

Το $A+B = \{x \in M \mid x = a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$ είναι υποπρότυπο του M και είναι το ελάχιστο που περιέχει και το A και το B.

Ερώτηση: Αν $A, B, C \leq M$ υποπρότυπα ισχύει ότι
$$A\cap C + B \cap C = (A+B)\cap C \ ;$$

Απόδειξη του "$\leq$": $A\cap C, B\cap C \leq C \Rightarrow A\cap C + B\cap C \leq C$
και $A \cap C \leq A$, $B\cap C \leq B \Rightarrow A\cap C + B \cap C \leq A+B$. □

Ο "$\geq$" δεν ισχύει πάντα πχ



Λήμμα: Αν $A \subseteq C$, τότε $A + (B \cap C) = (A+B) \cap C$ (modularity τω

Εφαρμογή: Έστω $A, C \subseteq M$ υποπρότυπα με $A \subseteq C$. Αν υπάρχει $B \leq M$ υποπρότυπο με $A \cap B = C \cap B$ και $A + B = C + B$ τότε $A = C$.

Απόδειξη: Είναι

$$A + (B \cap C) = (A+B) \cap C$$
$$\Rightarrow A + A \cap B = (C+B) \cap C$$
$$\Rightarrow A = C$$

□

Ορσ.: Αν $A, B \leq M$ με $A \cap B = 0$, $A + B = M$ τότε το M είναι το ευθύ άθροισμα των A, B και γράφ. $M = A \oplus B$

Ορσ.: Έστω $N_\lambda \leq M$, $\lambda \in \Lambda$ R-υποπρότυπα του M τότε:
(i) η τομή $\bigcap_\lambda N_\lambda$ είναι R-υποπρότυπο
(ii) το άθροισμα $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = \bigcup \{ \sum_{\lambda \in \Lambda'} N_\lambda \mid \Lambda' \subseteq \Lambda$ πεπερ.$\}$ είναι υποπρότυπο

Λέμε ότι το άθροισμα είναι ευθύ αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$

$$N_\lambda \cap \Big(\sum_{\lambda' \neq \lambda} N_{\lambda'} \Big) = 0$$

[Τότε $\forall x \in \sum_\lambda N_\lambda$ υπάρχουν μοναδικά $x_\lambda \in N_\lambda$ σχεδόν όλα
με $x = \sum_\lambda x_\lambda$]